

**ZAMAN SKALASINDA ÇOKLU NOKTA
SINIR DEĞER DİNAMİK SİSTEMİN ÇÖZÜMLERİ
VE KARARLILIĞININ İNCELENMESİ**

Mohammed TaĐi DASTCERDİ

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ARALIK 2006

ANKARA

Mohammed Tađi DASTCERDİ tarafından hazırlanan ZAMAN SKALASINDA ÇOKLU NOKTA SINIR DEĞER DİNAMİK SİSTEMİN ÇÖZÜMLERİ VE KARARLILIĞININ İNCELENMESİ adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Baki İrfan YAŞAR
Tez Yöneticisi

Bu çalışma jürimiz tarafından oybirliği ile Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR

Üye : Prof. Dr. Ömer AKIN (TOBB Ünı)

Üye : Prof. Dr. Hüseyin Ş. HÜSEYİNOV (Atılım Ünı)

Üye : Prof. Dr. Muhsin MERT (Başkent Ünı)

Üye : Prof. Dr. Baki İrfan YAŞAR

Tarih : 21/ 12 / 2006

Bu tez, Gazi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Mohammed Tağı DASTCERDİ

**ZAMAN SKALASINDA ÇOKLU NOKTA SINIR
DEĞER DİNAMİK SİSTEMİN ÇÖZÜMLERİ VE
KARARLILIĞININ İNCELENMESİ
(Doktora Tezi)**

Mohammed Tağı DASTCERDİ

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Aralık 2006

ÖZET

Bu tezde, ilk önce zaman skalasında delta ve nabla türevi içeren lineer dinamik sistemin çok noktalı sınır değer probleminin çözümü iki metot yardımıyla incelenmiştir. Bu metotlar Green fonksiyon metodu ve direkt metoddur. Sonra zaman skalasında lineer olmayan lineer kısmı dinamik sistemin çözümünün varlığı ve onun kararlılığı, uygun koşullar altında incelenmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.138
Anahtar Kelimeler : Dinamik sistem, Zaman skalası, Sınır değer problemi, Kararlılık
Sayfa Adedi : 90
Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Baki İrfan YAŞAR

**ON THE SOLUTIONS AND STABILITY OF DYNAMIC SYSTEMS WITH
MULTIPOINT BOUNDARY VALUES ON TIME SCALES**

(Ph. D. Thesis)

Mohammad Taghi DASTJERDI

GAZİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

December 2006

ABSTRACT

In this thesis, we first consider the solution of multipoint boundary values linear Dynamic system involving delta and nabla derivative by Green's function method and direct method. Then, the existence of solutions and stability of nonlinear dynamic systems with linear part are considered on time scales .

Science Code : 204.1.138

Key Words : Dynamic system, Time scale, Boundary value problem, Stability

Page Number : 90

Adviser : Prof. Dr. Baki İrfan YAŞAR

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla bana yol gösteren, yönlendiren önerilerde bulunarak değerli zamanını benden esirgemeyen sayın Hocalarım Prof. Dr. Baki İrfan YAŞAR, Prof. Dr. Ömer AKIN ve Prof Dr. Huseyin Ş. HUSEYİNOV ‘a ve desteğini benden esirgemeyen aileme teşekkürü borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	ix
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	x
SİMGELER VE KISALTMALAR	xi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE TANIMLAR	3
2.1. Zaman Skalası	3
2.2. Türev	6
2.3. İntegral	10
2.4. Birinci Mertebeden Lineer Dinamik Denklemler	15
2.4.1. Hilger 'in Kompleks Düzlemi	15
2.4.2. Yeni Toplama Grubu	17
2.5. Üstel Fonksiyon	20
2.6. Nabla Dinamik Denklemleri	23
2.7. Birinci Mertebeden Lineer Homogen Olmayan Denklemler	28
2.8. Kararlılık	32
2.9. Düzgün ve Üstel Kararlılık için Lyapunov Kriteri	38
3. ÇOK NOKTALI SINIR DEĞER PROBLEMİNİN GREEN FONKSİYON METODU İLE DİNAMİK SİSTEMLERİN ÇÖZÜMÜ	39

Sayfa

3.1. İki Nokta Sınır Değer Probleminin Genelleştirilmesi.....	39
3.2. Çok Noktalı Sınır Değer Probleminin Genelleştirilmesi	46
4. DELTA VE NABLA DİNAMİK SİSTEM İÇİN DİREKT METOT	49
4.1. Delta Dinamik Sistemlerin Çözümü	49
4.2. Nabla Dinamik Sistemlerin Çözümü	60
5. ZAMAN SKALASINDA LİNEER KISIMLI LİNEER OLMAYAN SINIR DEĞER DİNAMİK SİSTEMLERİN ÇÖZÜMÜN VARLIĞI	72
6. ZAMAN SKALASINDA LİNEER KISIMLI ZAMANLA DEĞİŞEN DİNAMİK SİSTEMLERİN DÜZGÜN VE ASİMTOTİK KARARLILIĞI	81
6.1. Kararlılık Perturbe Durumu	81
6.2. Lineer Olmayan Durumunda Kararlılık	82
7. SONUÇ	87
KAYNAKLAR	88
ÖZGEÇMİŞ	90

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. Noktaların sınıflandırılması	4
Çizelge 2.2 Zaman skalasına örnekler	6
Çizelge 2.3. R ve Z için örnekler	12
Çizelge 2.4. Toplamsal tersler.....	18
Çizelge 2.5. Nabla üstel fonksiyonlar	28
Çizelge 2.6. Nabla üstel fonksiyonlar	28

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Noktaların şematik sınıflandırılması.....	4
Şekil 2.2 Bazı zaman skalaları	6
Şekil 2.3 Hilger'in kompleks düzlemi	16
Şekil 2.4 Hilger'in kompleks sayıları	17

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamalar ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\ A\ $	A matrisinin spektral normu
$G(t,s)$	Sınır değer Dinamik sistemin Green fonksiyonu
T	Bir Zaman skala kümesi
$x^{\Delta}(t)$	x 'in Delta türevi
$x^{\nabla}(t)$	x 'in Nabla türevi
$\ x\ $	x vektörünün Euclid normu
$\Phi(t)=\Phi(t,t_0)$	Delta Dinamik sistemin Temel (Fundamental) matrisi
$\hat{\Phi}(t)=\hat{\Phi}(t,t_0)$	Nabla Dinamik sistemin Temel (Fundamental) matrisi
$\Re$	Regresif kümesi
$\Re^+$	Pozitif regresif kümesi

1. GİRİŞ

Son yıllarda, zaman skalasında, dinamik sistem teorisi ortaya çıkmıştır. Sürekli ve ayrık zamanları kapsar, zaman skalası demek reel sayıların keyfi bir altkümesidir. Bu teori bize aynı zamanda sürekli ve ayrık sistemlerin incelemesine iyi bir imkan verir.

İki nokta sınır değer problem (TPBVP) diferensiyel denklem ve fark denklem teorisinde çok bir önemli role sahiptir. Özellikle bu teoremin çoklu uygulamaları bu zamana kadar dinamik sistem, kontrol teorisi, optimal kontrol teorilerinde kullanılmaktadır.

[14] ve [15] de $x^\Delta(t) = A(t)x(t) + f(t)$, $Mx(t_0) = \alpha_1$, $Nx(t_1) = \alpha_2$, $M \in R^{k \times n}$, $N \in R^{(n-k) \times n}$ denklemin (TPBVP) çözümünün varlık ve tekliği, A matrisi sabit katsayılı olduğu takdirde (otonom halde) sürekli ve ayrık durumda ayrı ayrı incelenmiştir.

Bu tezin, ilk önce ikinci bölümde zaman skalası hakkında gerekli tanımlar ve teoremler verilmiştir [1,2]. Üçüncü bölümde delta dinamik sistemlerin çözümü çok noktalı sınır değer problem için Green fonksiyon metodu göze alınarak [11],

$$y^\nabla(t) = A(t)y(t) + f(t) \quad (1.1)$$

ve

$$My(t_0) + Nx(t_1) = \alpha, \quad M, N \in R^{n \times n} \quad (1.2)$$

nabla denklemi için gerekli ve yeterli koşullar çözümünün varlığı (TPBVP) altında tekrar Green fonksiyon metodu ile elde edilmiştir. Eş.1.1 de denklem sisteminin

$$\text{çözümü } y(t) = \hat{\Phi}_A(t, t_0)D^{-1}\alpha + \int_{t_0}^{t_1} G(t, \rho(s))f(s)\nabla s$$

biçimindedir. Burada Green fonksiyonu,

$$G(t, \rho(s)) = \begin{cases} \hat{\Phi}_A(t, t_0) D^{-1} M \hat{\Phi}_A(t_0, \rho(t)), & t_0 \leq s < t \leq t_1 \\ -\hat{\Phi}_A(t, t_0) D^{-1} N \hat{\Phi}_A(t_1, \rho(t)), & t_0 \leq t < s \leq t_1 \end{cases}, \text{ ve}$$

$$D = M \hat{\Phi}_A(t_0, t_0) + N \hat{\Phi}_A(t_1, t_0)$$

şeklindedir.

Dördüncü bölümde Eş.1.1 ve Eş.1.2 denklemin çözümünü direkt metodla hem ayrılmış hem de ayrılmamış sınır şartlar altında yeniden elde edilmiştir. Bu metodun çözümünü hesaplama için Green metoduna göre daha kolay olduğu açıktır, çünkü basit algoritmalarla program yazması mümkündür.

Beşinci bölümde,

$$y^\nabla(t) = A(t)y(t) + F(t, y(t)) \quad t \in [t_0, t_1]_T$$

$$My(t_0) + Ny(t_1) = \alpha$$

lineer olmayan sınır değer probleminin bazı koşullar altında çözümünün varlığı incelenmiştir. Bu sonuç $y^\nabla(t) = A(t)y(t) + F(t, y(\rho(t)))$ denklemi için aynı sınır şartları altında yapılabilir. Ayrıca yukarıdaki sonuçlar delta türev için sağlanır. Bu bölümde $A: [t_0, t_1] \rightarrow B(R^n)$ matrisi sağdan saçılımı ve regresivdir. M ve N matrisleri n 'inci mertebeden kare matrislerdir.

Altıncı bölümde, zaman skalasında Lyapunov kriteri yardımıyla,

$$x^\Delta(t) = A(t)x(t) + F(t, x(t))$$

lineer olmayan denklemin çözümünün kararlı olduğu uygun koşullar altında incelenmiştir. Yukarıdaki sonuç Lery-Schauder sabit nokta teoremin yardımıyla [10] da verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TANIMLAR

Bu bölümde ilk önce zaman skalası hakkında ihtiyaç duyulan kavramlar verilmiştir, Daha sonra temel lemmalar ve teoremler hatırlanmıştır. Ayrıca zaman skalasında başlangıç değeri lineer sistemler üzerinde önemli teoremler verilmiştir. Bu materyaller genelde [1,2 ve 13] dan kaynaklanmıştır.

2.1. Zaman Skalası

2.1. Tanım

Bir zaman skalası, boş olmayan kapalı keyfi bir gerçel sayılar kümesidir.

R, Z, N, N_0 yani gerçel sayılar, tamsayılar, doğal sayılar, $[0,1] \cup [2,3]$ ve $[0,1] \cup N_0$ kapalı aralıkları zaman skalasına örnektir. $Q, R - Q, C$ ve $(0,1)$ aralığındaki sayılar zaman skalası değildir. Bu çalışmada zaman skalası T ile gösterilecektir.

T üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu için f^Δ türevini;

i) $f^\Delta = f'$ alışılmış bilinen türev; $T = R$ ise

ii) $f^\Delta = \Delta f$ alışılmış bilinen ileri fark operatörü $T = Z$ ise

şeklinde göstereceğiz.

2.2. Tanım

T bir zaman skalası olsun. $t \in T$ için; $\sigma(t) : T \rightarrow T$ ileri sıçrama operatörü;

$$\sigma(t) = \inf_{s \in T} \{s > t\} \quad \rho(t) : T \rightarrow T \text{ geri sıçrama operatörü; } \rho(t) = \sup_{s \in T} \{s < t\}$$

ile tanımlanır. Bu tanımda $\inf \emptyset = \sup T$ ($\sigma(t) = t$ eğer T bir max t ye sahipse) ve

$\sup \emptyset = \inf T$ ($\rho(t) = t$ eğer T bir $\min t$ ye sahipse) olur. $\mu(t) : T \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu ; $\mu(t) = \sigma(t) - t$ ile tanımlanır.

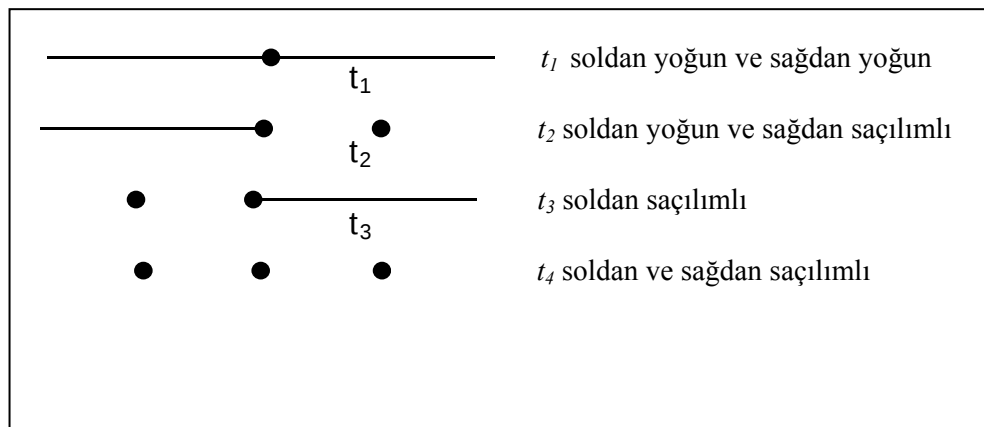
2.3. Tanım

Eğer $\sigma(t) > t$ ise t sağdan saçılımlı, $\rho(t) < t$ ise t soldan saçılımlıdır. Aynı anda sağdan saçılımlı ve soldan saçılımlı noktalar da izole nokta olarak adlandırılır.

Ayrıca, $t < \sup T$ ve $\sigma(t) = t$ ise t sağdan yoğun $t > \inf T$ ve $\rho(t) = t$ ise t soldan yoğun denir. Aynı anda soldan ve sağdan yoğun olan noktalara yoğun denir.

Çizelge 2.1. Noktaların sınıflandırılması

t sağdan saçılımlı	$t < \sigma(t)$
t sağdan yoğun	$t = \sigma(t)$
t soldan saçılımlı	$\rho(t) < t$
t soldan yoğun	$\rho(t) = t$
t izole	$\rho(t) < t < \sigma(t)$
t yoğun	$\rho(t) = t = \sigma(t)$



Şekil 2.1. Noktaların şematik sınıflandırılması

T zaman skalasından türetilmiş bir T^K kümesi,

$$T^K = \begin{cases} T - \{\sup T\} & , \sup T < \infty \text{ soldan saçılımlı} \\ T & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

2.1. Not

$f : T \rightarrow R$ bir fonksiyon, $f^\sigma : T \rightarrow R$, $f^\sigma(t) = f(\sigma(t)) \forall t \in T$ şeklinde tanımlanır.

2.1. Örnek

Aşağıdaki iki durumu inceleyelim.

i) Eğer $T = R$ ise $\forall t \in T$ için $\sigma(t) = \inf \{s \in R ; s > t\} = \inf(t, \infty) = t$

ve benzer şekilde $\rho(t) = \sup \{s \in R ; s < t\} = \sup(-\infty, t) = t$ olur.

Burada $\forall t \in T$ noktası yoğundur. μ fonksiyonu $\mu(t) \equiv 0, \forall t \in T$ için olur.

ii) Eğer $T = Z$ ise, bir $t \in T$ için

$$\sigma(t) = \inf \{s \in T ; s > t\} = \inf \{t+1, t+2, t+3, \dots\} = t+1$$

$$\rho(t) = \sup \{s \in T ; s < t\} = \sup \{t-1, t-2, t-3, \dots\} = t-1$$

Burada $t \in T$ noktası izoledir. μ fonksiyonu $\mu(t) \equiv 1 \forall t \in T$ için olur.

iii) Eğer $T = \{2^n : n \in Z\} \cup \{0\}$ ise $\sigma(2^n) = 2^{n+1}$, $\sigma(t) = 2t$

ve $\rho(2^n) = 2^{n-1}$, $\rho(t) = \frac{t}{2}$ burada $\forall t \in T$ izole noktadır.

R	_____
Z	
hZ	

Şekil 2.2 Bazı zaman skalaları

Çizelge 2.2 Zaman skalasına örnekler

T	$\mu(t)$	$\sigma(t)$	$\rho(t)$
R	0	t	t
Z	1	$t+1$	$t-1$
hZ	h	$t+h$	$t-h$
q^N	$(q-1)t$	qt	$\frac{t}{q}$
2^N	t	$2t$	$\frac{t}{2}$
N_0^2	$2\sqrt{t}+1$	$(\sqrt{t}+1)^2$	$(\sqrt{t}-1)^2$

2.2. Türev

2.4. Tanım

$f : T \rightarrow R$ bir fonksiyon ve $t \in T^k$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ olacak şekilde $f^\Delta(t)$ türevi,
 $||f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]|| \leq \varepsilon \quad |\sigma(t) - s| \quad \forall s \in U$ şeklinde tanımlanır.

$\exists \delta > 0$ için t nin bir U komşuluğu vardır. $U = (t - \delta, t + \delta) \cap T$ dir.

f^Δ , f fonksiyonunun delta (ya da Hilger) türevi olarak adlandırılır.

2.2. Örnek

i) Eğer $f : T \rightarrow R$, $\forall t \in T$ için $f(t) = \alpha$ ise, $f^\Delta(t) \equiv 0$ dır. Burada $\alpha \in R$ sabittir. $\forall \varepsilon > 0$ olması sebebiyle doğrudur.

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 0 \cdot [\sigma(t) - s]| = |\alpha - \alpha| = 0 \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|, \forall s \in T$$

ii) Eğer $f : T \rightarrow R$, $\forall t \in T$ için $f(t) = t$ ise $f^\Delta(t) \equiv 1$ dir. $\forall \varepsilon > 0$ olması sebebiyle doğrudur.

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 1 \cdot [\sigma(t) - s]| = |\sigma(t) - s - (\sigma(t) - s)| = 0 \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|, \forall s \in T$$

2.2. Not

i) $f : T \rightarrow R$, $\forall t \in T$ için $f(t) = t^2$ ile tanımlandığında, $f^\Delta(t) = t + \sigma(t)$

ii) $g : T \rightarrow R$ $t > 0$ olacak şekilde $\forall t \in T$ için $g(t) = \sqrt{t}$ ile tanımlandığında,

$$g^\Delta(t) = \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{\sigma(t)}} \text{ olur.}$$

2.1. Teorem

$f : T \rightarrow R$ bir fonksiyon ve $t \in T^k$ olsun. Bu durumda ,

i) Eğer f, t de türevlenebilirse, f, t de sürekli dir.

ii) Eğer f, t de sürekli ve t sağdan saçılımli ise, f, t de türevlenebilir. $f^\Delta(t) =$

$$\frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t}$$

iii) Eğer t sağdan yoğunsa, f, t de türevlenebilir. $f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$

iv) Eğer f fonksiyonu t de türevlenebilirse; $f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^\Delta(t)$

2.2. Teorem

$f, g : T \rightarrow R$ bir fonksiyon ve $t \in T^k$ da türevlenebilir olsun. Bu durumda;

i) $f + g : T \rightarrow R$ $(f+g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t)$ şeklinde t de türevlenebilir.

ii) Her sabit α için, $\alpha f : T \rightarrow R$, $(\alpha f)^\Delta(t) = \alpha \cdot f^\Delta(t)$ şeklinde t de türevlenebilir.

iii) $f \cdot g : T \rightarrow R$ $(fg)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t) = f(t)g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g(\sigma(t))$

$f^\Delta(t)g(t) + f^\sigma(t)g^\Delta(t) = f(t)g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g^\sigma(t)$ şeklinde t de türevlenebilir.

iv) Eğer $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{1}{f}, \left(\frac{1}{f}\right)^\Delta(t) = -\frac{f^\Delta(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$ şeklinde t de türevlenebilir.

v) Eğer $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}, \left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(t) \cdot g(t) - f(t) \cdot g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$ şeklinde t de

türevlenebilir.

2.5. Tanım

$f : T \rightarrow R$ f^Δ nın türevlenebilirliği $T^{k^2} = (T^k)^k$ nın üzerinde ikinci

türev $f^{\Delta\Delta} = (f^\Delta)^\Delta : T^{k^2} \rightarrow R$ şeklinde tanımlanır. n . mertebeden türev

$f^{\Delta^n} : T^{k^n} \rightarrow R$ şeklinde tanımlanır. $\sigma^2(t) = \sigma(\sigma(t))$, $\rho^2(t) = \rho(\rho(t))$

olur. Genelleştirirsek;

$\sigma^n(t) = t + nh$ ve $\rho^n(t) = t - nh \quad \forall n \in N_0$ olur.

2.3. Örnek

$(fg)^\Delta = f^\Delta g + f^\sigma g^\Delta$ ikinci türevini alalım.

$((fg)^\Delta)^\Delta = (f^\Delta g + f^\sigma g^\Delta)^\Delta = f^{\Delta\Delta} g + f^{\Delta\sigma} g^\Delta + f^{\sigma\Delta} g^\Delta + f^{\sigma\sigma} g^{\Delta\Delta}$

$$= f^{\Delta\Delta}g + (f^{\Delta\sigma} + f^{\sigma\Delta})g^{\Delta} + f^{\sigma\sigma}g^{\Delta\Delta} \text{ olur. Burada } f^{\Delta\sigma} = f^{\sigma\Delta} \text{ dir.}$$

2.4. Örnek

$h > 0$ için $T = hZ = \{hk : k \in Z\}$ olsun . Bu durumda ;

$\sigma(t) = \inf \{s \in T : s > t\} = \inf \{t + nh : n \in N\} = t + h \quad t \in T$ için olur ve benzer şekilde $\rho(t) = t - h \quad \forall t \in T$ noktası izole edilmiştir.

$\mu(t) = \sigma(t) - t = t + h - t = h \quad \forall t \in T$ olur .Böylece bu örnekteki μ sabittir.

$f : T \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun.

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \quad \forall t \in T$$

$$f^{\Delta\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(\sigma(t)) - f^{\Delta}(t)}{\mu(t)} = \frac{f^{\Delta}(t+h) - f^{\Delta}(t)}{h}$$

$$= \frac{\frac{f(t+2h) - f(t+h)}{h} - \frac{f(t+h) - f(t)}{h}}{h}$$

$$= \frac{f(t+2h) - f(t+h) - f(t+h) + f(t)}{h^2}$$

$$= \frac{f(t+2h) - 2f(t+h) + f(t)}{h^2}$$

olur. $f^{\Delta^n}(t)$ yi $f^{\Delta^n}(t) = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(t+kh)$ şeklinde yazabiliriz.

2.3. İntegral

2.6. Tanım

$f : T \rightarrow R$ tanımlanan , T deki sağdan yoğun olan noktalarda sağdan limitleri ve soldan yoğun olan noktalarda soldan limitleri olan fonksiyonlara regüle fonksiyon denir.

2.7. Tanım

$f : T \rightarrow R$ tanımlanan T deki sağdan yoğun noktalarda sürekli olan ve T deki soldan yoğun noktalarda soldan limitleri olan fonksiyona *rd-sürekli fonksiyon* denir.
 $f : T \rightarrow R$ rd-sürekli fonksiyonların kümesi $C_{rd} = C_{rd}(T) = C_{rd}(T, R)$ şeklindedir.

$f : T \rightarrow R$ diferensiyellenebilir ve türevleri sürekli olan fonksiyonların kümesi

$C_{rd}^1 = C_{rd}^1(T) = C_{rd}^1(T, R)$ şeklinde gösterilir.

Aşağıdaki teorem rd-sürekli ve regüle fonksiyonları içeren bazı sonuçları içermektedir.

2.3. Teorem

$f : T \rightarrow R$ bir fonksiyon

- i) f sürekli ise f rd-sürekli.
- ii) f rd sürekli ise f regüledir.
- iii) Sıçrama operatörü σ , rd-sürekli.
- iv) f regüle veya rd-sürekli ise f^σ da regüle veya rd-sürekli.

2.8. Tanım

$f : T \rightarrow R$ sürekli fonksiyonu $D \subset T^k : T^k \setminus D$ ve T nin sağdan saçılımlı elemanlarını içeren ve her noktasında f in diferensiyellenebilir olduğu durumlarda D ile ön diferensiyellenebilir.

2.4. Teorem

Kompakt aralıktaki her regüle fonksiyon sınırlıdır.

2.5. Teorem (Ortalama Değer Teoremi)

f ve g T üzerinde tanımlanan reel değerli fonksiyonlar olsunlar ve her ikisi de D ile ön diferansiyellenebilir olsun. O zaman, $|f^\Delta(t)| \leq g^\Delta(t) \quad \forall t \in D$ için ve $|f(s) - f(r)| \leq g(s) - g(r) \quad \forall r, s \in T, r \leq s$ için olur.

2.1. Sonuç

f ve g fonksiyonları D ile ön diferensiyallenebilir olsun.

(i) Eğer $U, r, s \in T$ uç noktaları ile bir kompakt aralık ise,

$$|f(s) - f(r)| \leq \left\{ \sup_{t \in U \cap D} |f^\Delta(t)| \right\} |s - r| \text{ olur.}$$

(ii) Eğer $\forall t \in D$ için $f^\Delta(t) = 0$ ise, f bir sabit fonksiyondur.

(iii) Eğer $\forall t \in D$ için $f^\Delta(t) = g^\Delta(t)$ ise, $g(t) = f(t) + C \quad \forall t \in T$ için olur.

2.6. Teorem (Ön Anti Türev)

f regüle fonksiyon olsun. D diferansiyellenme bölgesiyle ön diferansiyellenebilir bir F fonksiyonu; $F^\Delta(t) = f(t) \quad \forall t \in D$ için vardır.

2.9. Tanım

$f : T \rightarrow R$ regüle bir fonksiyon olsun. f nin belirsiz integrali

$\int f(t) \Delta t = F(t) + C$ şeklinde tanımlanır. C bir keyfi sabittir, F , f fonksiyonunun bir ön anti türevidir. Cauchy integrali $\int_r^s f(t) \Delta t = F(s) - F(r) \quad \forall r, s \in T$ için şeklinde tanımlanır. $F : T \rightarrow R$ fonksiyonu $F^\Delta(t) = f(t) \quad \forall t \in T^k$ için $f : T \rightarrow R$ fonksiyonunun anti türevi olarak tanımlanır.

2.5. örnek

Eğer $T = Z$ ve $a \neq 1$ ise $\int a^t \Delta t$ 'yi hesaplayalım. $\left(\frac{a^t}{a-1} \right)^\Delta = \Delta \left(\frac{a^t}{a-1} \right) = \frac{a^{t-1} - a^t}{a-1}$
 $= a^t$ olduğundan, $\int a^t \Delta t = \frac{a^t}{a-1} + C$ elde edilir. Burada C keyfi bir sabittir.

2.7. Teorem (Anti Türev)

Her rd-sürekli fonksiyonun bir anti türevi vardır. Eğer $t_0 \in T$ ise ;

$F(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) \Delta \tau \quad t \in T$ için şeklinde tanımlanan $F(t)$, f nin bir anti türevidir.

Çizelge 2.3. R ve Z için örnekler

Zaman Skalası	R	Z
Geri sıçrama operatörü $\rho(t)$	t	$t - 1$
İleri sıçrama operatörü $\sigma(t)$	t	$t + 1$
$\mu(t)$	0	1
$F^\Delta(t)$ türevi	$f'(t)$	$\Delta f(t)$

$\int_a^b f(t) \Delta(t)$ integrali	$\int_a^b f(t) dt$	$\sum_{t=a}^{b-1} f(t)$ (eğer $a < b$)
Rd-sürekli f	sürekli f	herhangi bir f

2.8. Teorem

$$f \in C_{rd} \text{ ve } t \in T^k \text{ ise; } \int_t^{\sigma(t)} f(\tau) \Delta \tau = \mu(t)f(t)$$

2.9. Teorem

Eğer $f^\Delta \geq 0$, ise f azalan değildir.

2.10. Teorem

Eğer $a, b, c \in T$, $\alpha \in \mathbf{R}$ ve $f, g \in C_{rd}$, ise;

$$(i) \int_a^b [f(t) + g(t)] \Delta t = \int_a^b f(t) \Delta t + \int_a^b g(t) \Delta t;$$

$$(ii) \int_a^b (\alpha f)(t) \Delta t = \alpha \int_a^b f(t) \Delta t;$$

$$(iii) \int_a^b f(t) \Delta t = - \int_b^a f(t) \Delta t;$$

$$(iv) \int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^c f(t) \Delta t + \int_c^b f(t) \Delta t;$$

$$(v) \int_a^b f(\sigma(t))g^\Delta(t) \Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t)g(t) \Delta t;$$

$$(vi) \int_a^b f(t)g^\Delta(t) \Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t)g(\sigma(t)) \Delta t;$$

$$(vii) \int_a^a f(t) \Delta t = 0;$$

(viii) eğer (a, b) üzerinde $|f(t)| \leq g(t)$ ise, $\left| \int_a^b f(t) \Delta t \right| \leq \int_a^b g(t) \Delta t$;

(ix) eğer tüm $a \leq t < b$ için $f(t) \geq 0$ ise, $\int_a^b f(t) \Delta t \geq 0$ olur.

2.11. Teorem

$a, b \in T$ ve $f \in C_{rd}$ olsun.

(i) Eğer $T = R$ ise, $\int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^b f(t) dt$, burada sağdaki integral Riemann integralidir.

(ii) Eğer $[a, b]$ iki izole noktadan oluşuyorsa,

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{t \in [a, b)} \mu(t) f(t) & a < b \\ 0 & a = b \\ -\sum_{t \in [b, a)} \mu(t) f(t) & a > b \end{cases}$$

(iii) Eğer $T = hZ = \{hk : k \in Z\}$, $h > 0$ ise

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh) h & a < b \\ 0 & a = b \\ -\sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh) h & a > b \end{cases}$$

$$(iv) \text{ Eğer } T = Z \text{ ise, } \int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t) & a < b \\ 0 & a = b \\ -\sum_{t=a}^{b-1} f(t) & a > b \end{cases}$$

2.10. Tanım

Eğer $a \in T$, $\sup T = \infty$ ise ve f $[a, \infty)$ üzerinde rd-sürekli ise, has olmayan integrali $\int_a^\infty f(t) \Delta t = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \Delta t$ ile tanımlanır. Eğer limit varsa has olmayan integral yakınsak, limit yoksa integral ıraksaktır.

2.4. Birinci Mertebeden Lineer Dinamik Denklemler

2.4.1. Hilger 'in Kompleks Düzlemi

2.11. Tanım

$f : T \times R^2 \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun. Birinci dereceden dinamik denklem $y^\Delta = f(t, y, y^\sigma)$ (2.1)

şeklinde tanımlanır.

Eğer $f(t, y, y^\sigma) = f_1(t)y + f_2(t)$ veya $f(t, y, y^\sigma) = f_1(t)y^\sigma + f_2(t)$, f_1 ve f_2 fonksiyonları için Eş. 2.1 lineer denklem şeklinde yazılır. $y : T \rightarrow R$ Eş. 2.1 in çözümü olur.

2.12. Tanım

$h > 0$ için Hilger kompleks sayılarını, Hilger reel eksenini, Hilger alternatif eksenini ve Hilger sanal eksenini sırasıyla

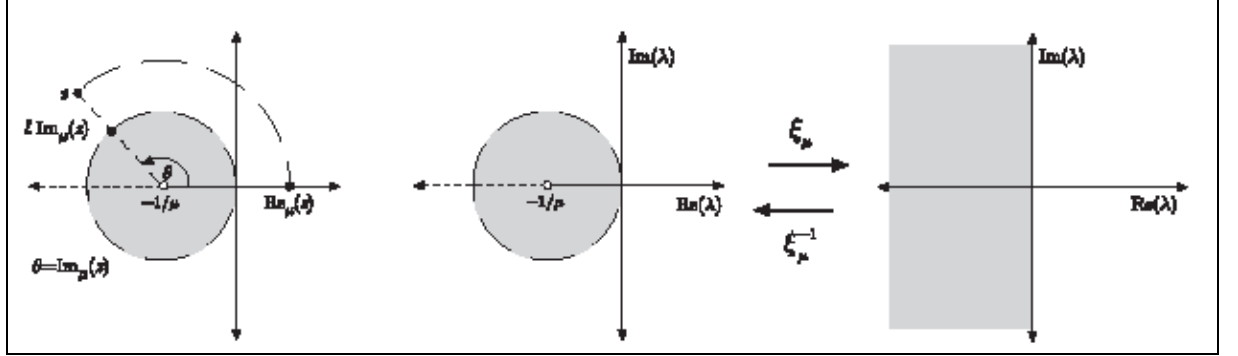
$$C_h = \{z \in C : z \neq -\frac{1}{h}\},$$

$$R_h = \{z \in C_h : z \in R \text{ ve } z > -\frac{1}{h}\},$$

$$A_h = \{z \in C_h : z \in R \text{ ve } z < -\frac{1}{h}\},$$

$$I_h = \{z \in C_h : \left|z + \frac{1}{h}\right| = \frac{1}{h}\}$$

olarak tanımlanır. $h = 0$ için $C_0 = C, R_0 = R, I_0 = iR, A_0 = \phi$ olur.



Şekil 2.3. Hilger'in kompleks düzlemi

2.13. Tanım

$h > 0$ ve $z \in C_h$, Hilger'in reel z parçası $\text{Re}_h(z) = \frac{|zh+1|-1}{h}$ ile ve Hilger'in sanal z parçası $\text{Im}_h(z) = \frac{\text{Arg}(zh+1)}{h}$ ile tanımlanır.

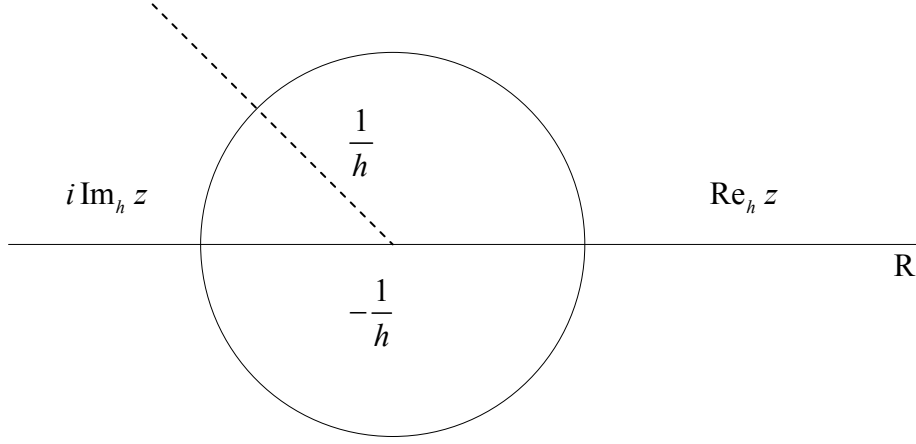
$\text{Arg}(z)$, z 'nin asal bağımsız değişkenini simgeler(örn: $-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$).

$$-\frac{1}{h} < \text{Re}_h(z) < \infty \text{ ve } -\frac{\pi}{h} < \text{Im}_h(z) \leq \frac{\pi}{h}$$

2.14. Tanım

$-\frac{\pi}{h} < w \leq \frac{\pi}{h}$ Hilgerin sanal sayısı i_w ile tanımlanır.

$$i_w = \frac{e^{iwh} - 1}{h} \quad z \in C_h, i \text{ Im}_h \in I_h \quad (2.2)$$



Şekil 2.4. Hilger'in kompleks sayıları

2.12. Teorem

$$\text{Eğer } -\frac{\pi}{h} < w \leq \frac{\pi}{h} \text{ ise, } |\dot{w}|^2 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{wh}{2} \quad (2.3)$$

2.4.2. Yeni Toplama Grubu

2.13. Teorem

Eğer C_h üzerinde $\oplus$ işlemini $z \oplus w = z + w + zwh$ ile tanımlarsak $(C_h, \oplus)$ Abel grubu olur.

2.3. Not

C_h üzerindeki $\oplus$ işleminin birleşme özelliği vardır.

2.14. Teorem

$z \in C_h$ için $z = \text{Re}_h z \oplus i \text{Im}_h z$ olur.

2.4. Not

$n \in \mathbb{N}$ ve $z \in C_h$ üzerinde Θ işlemi $n\Theta z = z \oplus z \oplus \dots \oplus z$ şeklinde tanımlanır.

bu son denklemde sağ tarafta n tane terim vardır.Bu

taktirde $n\Theta z = \frac{(zh+1)^n - 1}{h}$ seklinde olur.

Teorem 2.13 de $z \in C_h$ olduğundan Θ işlemine göre z nin ters toplamı

$$\Theta z = \frac{-z}{1+zh} \quad (2.4)$$

şeklinde bulunur.

2.15. Tanım

Θ işlemini C_h üzerinde $z \Theta w = z \oplus (\Theta w)$ Eş. 2.5 ile tanımlarız.

2.5. Not

Eğer $z, w \in C_h$, $h \geq 0$ için

(i) $z \Theta z = 0$

(ii) $z \Theta w = \frac{z-w}{1+wh}$

(iii) Eğer $h = 0$ ise $z \Theta w = z-w$ olur.

(iv) $z \in C_h$ ise $\bar{z} = \Theta z$ olur.

(v) $\Theta(iw) = \overline{iw}$ özellikleri vardır.

Çizelge 2.4. Toplamsal tersler

Z	0	1	I	$\frac{1}{h}$	$\frac{2}{h}$	$\frac{i-1}{h}$
Θz	0	$-\frac{1}{1+h}$	$\frac{1}{i-h}$	$-\frac{1}{2h}$	$-\frac{2}{h}$	$-\frac{i+1}{h}$

2.16. Tanım

Eğer $z \in C_h$ ise z nin genelleşmiş karesi $z^2 = (-z) (\Theta z) = \frac{z^2}{1+zh}$ şeklinde tanımlanır.

2.15. Teorem

$$z \in C_h \text{ için } (\Theta z)^2 = z^2 \quad (2.6)$$

$$1+zh = \frac{z^2}{z^2} \quad (2.7)$$

$$z+(\Theta z) = z^2 h \quad (2.8)$$

$$z \oplus z^2 = z + z^2 \quad (2.9)$$

$$z^2 \in R \Leftrightarrow z \in R_h \cup A_h \cup I_h \quad (2.10)$$

$$-\frac{\pi}{h} < w \leq \frac{\pi}{h} \text{ için } , -(iw)^2 = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{wh}{2}\right), \quad (2.11)$$

2.17. Tanım

$h>0$ için $\xi_h : C_h \rightarrow Z_h$ silindir dönüşümü $\xi_h(z) = \frac{1}{h} L \log(1+zh)$ şeklinde tanımlanır.

Burada Log asal logaritma fonksiyonudur. $h=0$ için $\xi_0(z) = z$ olur. $h>0$ olduğunda

Z_h yi silindir olur. Sınır çizgileri $Im(z) = -\frac{\pi}{h}$ ve $Im(z) = \frac{\pi}{h}$, Z_h üzerindeki

toplama $z + w = z + w \pmod{\frac{2\pi i}{h}}$ $z, w \in Z_h$ şeklinde tanımlanır.

2.6. Not

$h > 0$ için silindir dönüşümünün tersi $\xi_h^{-1}(z) = \frac{1}{h}(e^{zh} - 1)$, $z \in Z_h$ için $\xi_0^{-1}(z) = z$ olur.

2.16. Teorem

ξ_h Silindir dönüşümü Z_h üzerinde $+$ işlemi $(c_h : \oplus)$ den $(Z_h : +)$ grup homeomorfizmasıdır.

2.5. Üstel Fonksiyon

2.18. Tanım

$p : T \rightarrow R$ fonksiyonu regressedir. $1 + \mu(t)p(t) \neq 0 \quad \forall t \in T^k$ için Eş. 2.11 bütün regressive ve rd-sürekli fonksiyonların dizimi $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(T) = \mathfrak{R}(T, R)$ şeklinde tanımlanır.

2.7. Not

$\mathfrak{R}$, $\oplus$ işlemine göre abel gruptur.

$$(p \oplus q)(t) = p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t) \quad \forall t \in T^k \text{ için } p, q \in \mathfrak{R}$$

2.8. Not

$$p, q \in \mathfrak{R} \text{ ise } \Theta p \text{ ve } p \Theta q \text{ fonksiyonları } (\Theta p)(t) = \frac{p(t)}{1 + \mu(t)p(t)} \text{ her } t \in T^k$$

$$(p \Theta q)(t) = (p \Theta (\Theta q))(t) \quad \forall t \in T^k \quad (2.12)$$

ile tanımlanır. $p, q \in \mathfrak{R}$ olduğunda

$$(i) p \Theta p = 0$$

$$(ii) \Theta(\Theta p) = p$$

$$(iii) p\Theta q \in R$$

$$(iv) p\Theta q = \frac{p-q}{1-\mu p}$$

$$(v) \Theta(p\Theta q) = q\Theta p$$

$$(vi) \Theta(p\Theta q) = (\Theta p)\Theta(\Theta q) \text{ özellikleri elde edilir.}$$

2.19. Tanım

Eğer $p \in \mathfrak{R}$ ise üstel fonksiyon

$$e_p(t, s) = \exp \left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau \right) \quad s, t \in T \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlanır.

2.1. Lemma

Eğer $p \in \mathfrak{R}$ ise yarı grup özelliği $e_p(t, \tau)e_p(\tau, s) = e_p(t, s) \quad \forall \tau, s, t \in T$

şeklindedir.

2.20. Tanım

Eğer $p \in \mathfrak{R}$ ise birinci dereceden dinamik denklem regressive olarak tanımlanır.

$$y^\Delta = p(t)y \quad (2.14)$$

2.17. Teorem

$y^\Delta = p(t)y$ denklemi regressive olsun.

$$y^\Delta = p(t)y, \quad y(t_0) = 1, \quad t_0 \in T \quad (2.15)$$

$e_p(., t_0)$ başlangıç değer probleminin çözümüdür.

2.18. Teorem

Eğer Eş. 2.15 regressive ise Eş. 2.15 nin tek çözümü $e_p(., t_0)$ olur.

2.19. Teorem

$p, q \in \mathfrak{R}$ ise

$$(i) e_0(t, s) \equiv 1 \text{ ve } e_p(t, t) \equiv 1$$

$$(ii) e_p(\sigma(t), s) = (1 + \mu(t)p(t))e_p(t, s)$$

$$(iii) \frac{1}{e_p(t, s)} = e_{\ominus p}(t, s)$$

$$(iv) e_p(t, s) = \frac{1}{e_p(s, t)} = e_{\ominus p}(s, t)$$

$$(v) e_p(t, s)e_p(s, \Gamma) = e_p(t, \Gamma)$$

$$(vi) e_p(t, s)e_q(t, s) = e_{p \oplus q}(t, s)$$

$$(vii) \frac{e_p(t, s)}{e_q(t, s)} = e_{p \ominus q}(t, s)$$

$$(viii) \left(\frac{1}{e_p(., t_0)} \right)^\Delta = - \frac{p(t)}{e_p^\sigma(., t_0)} \text{ eşitlikleri vardır.}$$

2.6. Nabla Dinamik Denklemleri

2.21. Tanım

Eğer T , sağdan saçılımlı bir minimum m ye sahipse, $T_k = T - \{m\}$, diğer durumlarda, $T_k = T$ olur. $\nu: T_k \rightarrow R_0^+$ fonksiyonu $\nu(t) = t - \rho(t)$ ile tanımlanır.

2.22. Tanım

$f: T \rightarrow R$ bir fonksiyon ve $t \in T_k$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $f^\nabla(t)$ nabla türevi

$$|f(\rho(t)) - f(s) - f^\nabla(t)(\rho(t) - s)| \leq \varepsilon |\rho(t) - s| \quad \forall s \in U \text{ şeklinde tanımlanır.}$$

$\exists \delta > 0$ için t nin bir U komşuluğu vardır. $T = R$ için, alışılmış türev olan $f^\nabla(t) = f'(t)$, $T = Z$ için de geri fark operatörü olan $f^\nabla(t) = \nabla f(t) = f(t) - f(t - 1)$

$\alpha = \rho$ olması durumunda nabla türevinin alfa türevi olur. Bu bölümde verilen sonuçların birçoğu alfa türev durumuna göre genellenebilir.

2.23. Tanım

$f: T \rightarrow R$ fonksiyonu, T deki soldan yoğun noktalarda sürekli ve T deki sağdan yoğun noktalarda sağ limitleri var olan soldan yoğun sürekli veya

ld-sürekli fonksiyon denir.

2.6. Örnek

$T = R$ olursa f sürekli ise, f ld-sürekli dir.

Eğer $T = Z$ olursa herhangi bir fonksiyon ld-sürekli dir. f ld-sürekli olduğu zaman

$$F^\nabla(t) = f(t) \text{ Bu durumda } \int_a^b f(t) \nabla t = F(b) - F(a) \text{ olur.}$$

2.20. Teorem

$f : T \rightarrow R$ bir fonksiyon ve $t \in T_k$ olsun.

(i) Eğer f, t de nabla diferansiyellenebilir ise, f, t de sürekli.

(ii) Eğer f , soldan saçılımlı ve t de sürekli ise, f, t de

$$f^\nabla(t) = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{\nu(t)} \text{ ile nabla diferansiyellenebilir.}$$

(iii) Eğer t , soldan yoğun ise, f, t de nabla diferansiyellenebilir

$$f^\nabla(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \text{ olur.}$$

(vi) Eğer f, t de nabla diferansiyellenebilir ise, $f^\rho(t) = f(t) - \nu(t)f^\nabla(t)$ olur.

2.21. Teorem

$f, g : T \rightarrow R$ fonksiyonları $t \in T_k$ için nabla diferansiyellenebilir olsun.

(i) $f + g : T \rightarrow R, (f + g)^\nabla(t) = f^\nabla(t) + g^\nabla(t)$ nabla diferansiyellenebilirdir.

(ii) $fg : T \rightarrow R, (fg)^\nabla(t) = f^\nabla(t)g(t) + f^\rho(t)g^\nabla(t) = f(t)g^\nabla(t) + f^\nabla(t)g^\rho(t)$

nabla diferansiyellenebilirdir.

(iii) Eğer $g(t)g^\rho(t) \neq 0$ ise, $\frac{f}{g}, \left(\frac{f}{g}\right)^\nabla(t) = \frac{f^\nabla(t)g(t) - f(t)g^\nabla(t)}{g(t)g^\rho(t)}$ nabla

diferansiyellenebilirdir.

(iv) Eğer f ve f^∇ sürekli ise, $\left(\int_a^t f(t, s) \nabla s\right)^\nabla = f(\rho(t), t) + \int_a^t f^\nabla(t, s) \nabla s$ olur.

2.24. Tanım

$\forall t \in T_k$ için $1 - \nu(t)p(t) \neq 0$ ise p fonksiyonu ν -regresiftir denir.

T_k üzerindeki $\mathfrak{R}_\nu = \{p : T \rightarrow R : p \text{ ld-sürekli ve } \nu\text{-regresiftir}\}$ olan fonksiyonların ν -regresif sınıflarını tanımlayalım.

Eğer $p, q \in \mathfrak{R}_\nu$ ise, $\oplus_\nu$ işlemini $\forall t \in T_k$ için $(p \oplus_\nu q)(t) = p(t) + q(t) - p(t)q(t)\nu(t)$ ile tanımlanır.

2.22. Teorem

$(\mathfrak{R}_\nu, \oplus_\nu)$ kümesi bir Abel gurubudur.

2.25. Tanım

$p \in \mathfrak{R}_\nu$ için $\Theta_\nu p = -\frac{p}{1-p\nu}$ ile tanımlanır. p 'nin genelleştirilmiş karesini de

$p^2 = (-p)(\Theta_\nu p) = \frac{p^2}{1-p\nu}$ ile tanımlanır.

2.23. Teorem

$p \in \mathfrak{R}_\nu$ için,

$$(i) (\Theta_\nu p)^2 = p^2$$

$$(ii) 1 - p\nu = \frac{p^2}{p^2}$$

$$(iii) p + (\Theta_\nu p) = -p^2 \cdot \nu$$

$$(iv) (p \oplus_\nu p)^2 = p + p^2.$$

2.26. Tanım

$h > 0$ için, $Z_h = \{z \in C : \frac{-\pi}{h} < \text{Im}(z) < \frac{\pi}{h}\}$ ve $C_h = \left\{z \in C : z \neq \frac{1}{h}\right\}$ olsun.

$$\nu\text{-silindir dönüşümü } \hat{\xi}_h : C_h \rightarrow Z_h, \hat{\xi}_h(z) := -\frac{1}{h} \text{Log}(1-zh) \quad (2.16)$$

ile tanımlanır. Buradaki Log, asıl logaritma fonksiyonudur. $h = 0$ için $\forall z \in C_0 = C$ için $\hat{\xi}(z) = z$ tanımlanır.

2.27. Tanım

Eğer $p \in \mathfrak{R}_\nu$ ise, nabla üstel fonksiyonu

$$s, t \in T \text{ için } \hat{e}_p(t, s) = \exp\left(\int_s^t \hat{\xi}_\nu(\tau)(p(\tau)) \nabla \tau\right) \quad (2.17)$$

ile tanımlanır.

2.2. Lemma

(Yarıgrup Özelliği) Eğer $p \in \mathfrak{R}_\nu$ ise $\forall s, t, r \in T$ için

$$\hat{e}_p(t, r) \hat{e}_p(r, s) = \hat{e}_p(t, s) \text{ yarıgrup özelliği elde edilir.}$$

2.28. Tanım

$$\text{Eğer } p \in \mathfrak{R}_\nu \text{ ise, } y^\nabla = p(t)y \quad (2.18)$$

lineer dinamik denklemine ν -regresif denir.

2.24. Teorem

Denklemler Eş. 2.18 ν -regresif olsun.

$$y^\nabla = p(t)y, \quad y(t_0) = I, \quad t_0 \in T \text{ için} \quad (2.19)$$

$\hat{e}_p(., t_0)$ durumu, başlangıç değer probleminin çözümü olur.

2.25. Teorem

Eğer Eş. 2.15 ν -regresif ise, $\hat{e}_p(., t_0)$ durumu, başlangıç değer probleminin Eş. 2.16 tek çözümüdür.

2.26. Teorem

$p, q \in \mathfrak{R}_\nu$ ve $s, t, r \in T$ olsun.

$$(i) \quad \hat{e}_0(t, s) = 1 \text{ ve } \hat{e}_p(t, t) = 1;$$

$$(ii) \quad \hat{e}_p(p(t), s) = I - \nu(t)p(t) \hat{e}_p(t, s);$$

$$(iii) \quad \frac{1}{\hat{e}_p(t, s)} = \hat{e}_{\ominus \nu p}(t, s);$$

$$(iv) \quad \hat{e}_p(t, s) = \frac{1}{\hat{e}_p(s, t)} = \hat{e}_{\ominus \nu p}(s, t);$$

$$(v) \quad \hat{e}_p(t, r) \hat{e}_p(r, s) = \hat{e}_p(t, s)$$

$$(vi) \quad \hat{e}_p(t, s) \hat{e}_q(t, s) = \hat{e}_{p \oplus \nu q}(t, s);$$

$$(vii) \quad \frac{\hat{e}_p(t, s)}{\hat{e}_q(t, s)} = \hat{e}_{\ominus \nu p}(t, s);$$

$$(viii) \quad \left(\frac{1}{\hat{e}_p(t, s)} \right)^\nabla = \frac{-p(t)}{\hat{e}_p(t, s)} \text{ olur.}$$

2.27. Teorem

$p \in \mathfrak{R}_\nu$ ve $t_0 \in T$ olsun

(i) Eğer $t \in T$ için $1 - \nu(t)p(t) > 0$ ise, $\forall t \in T$ için $\hat{e}_p(t, t_0) > 0$ olur;

Çizelge 2.5. Nabla üstel fonksiyonlar

T	$\hat{e}_\alpha(t, t_0)$
R	$e^{\alpha(t-t_0)}$
Z	$\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^{t-t_0}$
hZ	$\left(\frac{1}{1-\alpha h}\right)^{(t-t_0)/h}$

Çizelge 2.6. Nabla üstel fonksiyonlar

T	t_0	$p(t)$	$\hat{e}_p(t, t_0)$
R	0	1	e^t
Z	0	-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^t$
hZ	0	1	$\left(\frac{1}{1-h}\right)^{t/h}$

2.7. Birinci Mertebeden Lineer Homogen Olmayan Denklemler

Bu bölümde önce homojen olmayan birinci mertebeden lineer denklem

$$y^\nabla = p(t)y + f(t) \quad (2.20)$$

ve buna karşılık gelen homojen denklem olan

$$y^\nabla = p(t)y \quad (2.21)$$

durumunu bir T zaman skalası üzerinde çalışacağız.

2.28. Teorem

$y^\nabla = p(t)y$ denklemi ν -regresif ve $t_0 \in T$, $y_0 \in R$ olsun.

$$y^\nabla = p(t)y, \quad y(t_0) = y_0 \quad (2.22)$$

Başlangıç değer probleminin tek çözümü olan problem $y(t) = \hat{e}_p(t, t_0)y_0$ ile verilmiştir.

2.29. Tanım

$p \in \mathfrak{R}_\nu$ için, $L_1 y(t) = y^\nabla(t) - p(t)y(t)$, $t \in T_k$ ile bir $L_1 : C_{ld}^1 \rightarrow C_{ld}$ operatörünü tanımlanır.

Daha sonra, Eş. 2.21, $L_1 y = 0$; Eş. 2.20 de $L_1 y = f(t)$ şeklinde yazılabilir. L_1 , bir lineer operatör olduğundan, Eş. 2.20'in bir lineer dinamik denklem olduğunu söyleyebiliriz. $y \in C_{ld}^1$; ve $t \in T_k$ durumu için $L_1 y(t) = f(t)$ olması koşuluyla y 'nin Eş. 2.20 nin bir çözümü olduğunu söyleriz.

2.30. Tanım

Bir eşlenik operatör olan $L_1^* : C_{ld}^1 \rightarrow C_{ld}$, $L_1^* x(t) = x^\nabla(t) + p(t)x^\rho(t)$, $t \in T_k$

ile tanımlanır.

2.7. Örnek

$$x(t) = (1 - \alpha h)^{\frac{t}{h}}, \quad t \in hZ \text{ fonksiyonunun } x^\nabla + \alpha x^\rho(t), \quad t \in hZ$$

eşlenik denkleminin bir çözümü olduğu görülür. Buradaki α , ν -regresif bir sabittir.

2.29. Teorem (Lagrange Özdeşliği)

Eğer $x, y \in C_{ld}^1$ ise, T_k üzerinde $x^\rho L_1 y + y L_1^* x = (xy)^\nabla$ olur.

2.30. Teorem

$p \in \mathfrak{R}_\nu$ ve $t_0 \in T$, $x_0 \in R$ olsun.

$$x^\nabla = -p(t)x^\rho, \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.23)$$

başlangıç değer probleminin tek çözümü $x(t) = \hat{e}_{\ominus p}(t, t_0)x_0$ ile verilmiştir.

$$\text{homojen olmayan problem } x^\nabla = -p(t)x^\rho + f(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.24)$$

burada, $p \in \mathfrak{R}_\nu$ ve $f \in C_{ld}^1$ olduğunu kabul ettik. Şimdi de x 'in Eş. 2.23 nin bir çözümü olduğunu kabul edelim. Eş. 2.24 deki dinamik denklemin her iki tarafını da integral katsayısı olan $\hat{e}_p(t, t_0)$ ile çarparak

$$\hat{e}_p(t, t_0)x^\nabla(t) + p(t)\hat{e}_p(t, t_0)x^\rho(t) = \hat{e}_p(t, t_0)f(t)$$

eşitliğini elde ederiz. Çarpım kuralını kullanarak $[\hat{e}_p(t, t_0)]^\nabla = \hat{e}_p(t, t_0)f(t)$

elde ederiz. Her iki tarafın nabla integralini alarak

$$\hat{e}_p(t, t_0)x(t) - \hat{e}_p(t, t_0)x(t_0) = \int_{t_0}^t \hat{e}_p(\tau, t_0)f(\tau)\nabla\tau \quad \text{elde ederiz. } x(t) \text{ durumunu}$$

$$\text{çözerek } x(t) = \hat{e}_{\ominus p}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \hat{e}_{\ominus p}(t, \tau)f(\tau)\nabla\tau \quad \text{elde ederiz.}$$

2.31. Teorem (Sabitlerin Değişimi)

Eş. 2.20 in regresif ve $t_0 \in T$, $x_0 \in R$ olsun. Başlangıç değer problemi olan $x^\nabla =$

$$-p(t)x^\rho + f(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.25)$$

$$\text{durumunun tek çözümü } x(t) = \hat{e}_{\Theta v p}(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^t \hat{e}_{\Theta v p}(t, \tau) f(\tau) \nabla \tau \quad (2.26)$$

ile verilmiştir.

2.9. Not

Teorem 2.26 (v) gereğince, başlangıç değer probleminin Eş. 2.25 alternatif bir çözüm biçimi $x(t) = \hat{e}_{\Theta v p}(t, t_0)[x_0 + \int_{t_0}^t \hat{e}_{\Theta v p}(t, \tau) f(\tau) \nabla \tau]$ ile verilmiştir.

2.32. Teorem

(Sabitlerin Değişimi). Eş. 2.20 nin regresif ve $t_0 \in T$, $y_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Başlangıç değer problemi olan

$$y^\nabla = -p(t)y + f(t), \quad y(t_0) = y_0 \quad (2.27)$$

durumunun tek çözümü $y(t) = \hat{e}_p(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t \hat{e}_p(t, \rho(\tau))f(\tau) \nabla \tau$ ile verilmiştir.

İspat

$$y^\nabla = p(t)y + f(t) \text{ durumunu denk biçimde } y^\nabla = p(t)[y^\rho + v(t)y^\nabla] + f(t) \text{ ve}$$

$$[1 - v(t)p(t)]y^\nabla = p(t)y^\rho + f(t), \text{ ve } y^\nabla = -(\Theta_v p)(t)y^\rho + \frac{f(\tau)}{1 - v(t)p(t)}$$

şeklinde tekrar yazarız ve Eş. 2.27 nin çözümünü bulmak için Teorem 2.32 u

$$y(t) = \hat{e}_p(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t \hat{e}_p(t, \tau) \frac{f(\tau)}{1 - v(\tau)p(\tau)} \nabla \tau$$

şeklinde uygularız. Teorem 6.7 nin (ii) ve (v) bölümlerini kullanarak

$$\frac{\hat{e}_p(t, \tau)}{1 - \nu(\tau)p(\tau)} = \frac{\hat{e}_p(t, \tau)}{\hat{e}_p(p(\tau), \tau)} = \hat{e}_p(t, \rho(\tau)) \text{ elde ederiz.}$$

2.33. Sonuç

Eş. 2.20 nin regresif ve $t_0 \in T$, $y_0 \in R$ olsun. Başlangıç değer problemi olan $y^\nabla(t) = A(t)y(t) + f(t)$ ve durumunun başlangıç değer problemin tek çözümü,

$$y(t) = \hat{e}_A(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t \hat{e}_A(t, \rho(\tau))f(\tau)\nabla\tau \text{ veya}$$

$$y(t) = \widehat{\Phi}_A(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t \widehat{\Phi}_A(t, \rho(\tau))f(\tau)\nabla\tau.$$

biçiminde verilmiştir.

2.8. Kararlılık

Bu kısımda, bazı istediğimiz tanımlar ve önemli olan kavramlar kararlılık hakkında verilecektir. t reel- değerli fonksiyon $n \times 1$ vektör $x(t)$ nin *Euklid normu*

$\|x(t)\| = \sqrt{x(t)^T x(t)}$ şekilde tanımlanır. $m \times n$ boyuttan A matrisin irkilmış normu

$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$ şekilde tanımlanır. A nın normu yukarıdaki irkilmış *Euklid normu*, A

matrisinin *spektral normu* ile bir olur, yani $\lambda_j(A)$, A matrisinin özdeğerleri olmak

üzere $\|A\| = \max_j \sqrt{|\lambda_j(A^* A)|}$, ayrıca $m \times n$ boyutlu A matrisinin spektral normu

$\|A\| = \left[\max_{\|x\|=1} x^T A^T A x \right]^{1/2}$ şekilde verilir. Bundan sonra matris normu $\|\cdot\|$ şekilde

verilir. Bir simetri matris M *pozitif yarıtanımlıdır* denir eğer her hangi bir $n \times 1$ boyutlu x vektör için $x^T M x \geq 0$ olsun ve *pozitif tanımlı* dır denir eğer $x^T M x > 0$, eşitlik sadece $x = 0$ durumunda sağlar. *Negatif yarıtanımlılık* ve *tanımlılık*, $-M$ nin

pozitifyarıtanımlılık yardım ıyla tanımlanır. Şimdi düzgün kararlılık ve düzgün üstel kararlılık kavramların tanımların vereceğiz. Bu iki kavram

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in T \quad (2.28)$$

lineer zamanla değişen dinamik denklemin çözümünün regresif ve sonlu olduğunu içeriyor.

2.31. Tanım

Zamanla değişen dinamik sistem Eş. 2.28 düzgün kararlılıdır denir, eğer bir sonlu $\gamma > 0$ varsa öyleki her hangi bir t_0 ve $x(t_0)$ için , sistemin karşı cevabı

$$\|x(t)\| \leq \gamma \|x(t_0)\|, \quad t \geq t_0 \quad (2.29)$$

sağlarsa.

Sonrakı tanım için, bir kararlılık özelliğini veririz öyleki Eş. 2.28 çözümün sonlu olduktan başka, iyice çözümün asimtotik karakteristiği olduğunada ilgileniyor. Eğer Eş. 2.28 in çözümleri aşağıdaki kararlılığa sahipse, o zaman $t \rightarrow \infty$ gidince çözümler üstel tipinden sifire gidecekler (yani çözümün normu bir azalan üstel fonksiyonla yukarıdan sonludur).

2.32. Tanım

Zamanla değişen dinamik sistem Eş. 2.28 düzgün üstel kararlılıdır denir, eğer sonlu $\gamma, \lambda > 0$ ve $-\lambda \in \mathbb{R}^+$ varsa öyleki her hangi bir t_0 ve $x(t_0)$ için , sistemin karşı cevabı

$$\|x(t)\| \leq \gamma \|x(t_0)\| e_{-\lambda}(t, t_0), \quad t \geq t_0 \quad (2.30)$$

sağlarsa.

Önceki tanımlardan açıktır ki $\gamma \geq 1$ olmalıdır. Düzgün kavramı kullandığı zaman, şunu gösterir ki γ, λ nın seçmesi t_0 başlangıç zamanına bağlantısı yoktur.

Son verilmiş kararlılık tanımında, düzgün üstel kararlılıktan düzgün kararlılık elde edilir.

2.33. Tanım

Eş. 2.28 deki Lineer durum denklem düzgün asimtotik kararlıdır eğer düzgün kararlı ve verilmiş her hangi bir $\delta > 0$ için, bir $T > 0$ varsa öyleki her hangi bir t_0 ve $x(t_0)$ için , sistemin karşı cevabı

$$\|x(t)\| \leq \delta \|x(t_0)\|, \quad t \geq t_0 + T \quad (2.31)$$

sağlarsa.

Dikkat edelim çözümün normu Eş. 2.31 eşitsizliğinin sağlaması için T zaman süresi geçmesi gerekiyor ve $\delta > 0$ sabiti t_0 başlangıç zamanından bağımsızdır.

Şimdi burada Dacunha dan [13] verilmiş dört önemli teoremlerinden hatırlatalım. Bunlardan ilk üç teoremi, düzgün kararlılığın hakkında ve düzgün üstel kararlılığı Eş. 2.28 sistemin geçiş (temel) matrisin açısından incelenmiştir. Dördüncü teorem düzgün asimtotik kararlılık ve düzgün üstel kararlılığın arasındaki bağlantısını göstermektedir.

2.33. Teorem

Eş. 2.28 zamanla değişen lineer dinamik sistemi düzgün kararlıdır ancak ve ancak bir $\gamma > 0$ varsa öyleki

$$\|\Phi_A(t, t_0)\| \leq \gamma \text{ her hangi bir } t \geq t_0 \text{ ve } t, t_0 \in T.$$

2.34. Teorem

Eş. 2.28 zamanla değişen lineer dinamik sistemi düzgün üstel kararlıdır ancak ve ancak $\gamma, \lambda > 0$ ve $-\lambda \in \mathfrak{R}^+$ varsa öyleki

$$\|\Phi_A(t, t_0)\| \leq \gamma e_{-\lambda}(t, t_0) \text{ her hangi bir } t \geq t_0 \text{ ve } t, t_0 \in T.$$

2.35. Teorem

Bir sabit α alalım ki her hangi bir $t \in T$ için, $\|A(t)\| \leq \alpha$ olsa. O zaman Eş. 2.28 lineer durum denklem düzgün üstel kararlıdır ancak ve ancak bir sabit β varsa öyleki her hangi $t, \tau \in T$ ve $t \geq \sigma(\tau)$ için

$$\int_{\tau}^t \|\Phi_A(t, \sigma(s))\| \Delta s \leq \beta \quad (2.32)$$

2.36. Teorem

Eş. 2.28 lineer durum denkleminin düzgün üstel kararlı olması için gerek ve yeter şart düzgün asimtotik kararlı olmasıdır.

Şimdi

$$x^\Delta(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in T \quad (2.28)$$

Formun şeklindeki regresif zamanla değişen lineer dinamik sistemin kararlılığını ele alacağız. Amacımız güçlendirilmemiş bir sistemin kararlılığını, onun toplam enerjisinin zaman içinde sistemin durumunu göze alarak, incelemektir. Eğer sistemin toplam enerjisi zaman gittikçe azalıyorsa, o zaman durum vektörü bir sabit değere(denge noktası) yaklaşacaktır.

Sistemin kararlılığı durum denkleminin çözümünün karakteristiğinin büyümesini gerektirmektedir. Bu özellikler uygun bir durum vektörünün skalar fonksiyonu ile ölçülebilir. Burada Eş. 2.28 sistemin çözümünü davranışını $t \rightarrow \infty$ olduğu zaman sonluluk ve asimtotik özellikleri hakkında bahsedeceğiz. Şimdi uygun skalar fonksiyonun elde etmesine uğraşacağız.

T zaman skalasında $t \rightarrow \infty$ alalım. Burada lineer durum Eş. 2.28 i $\|x(t)\|^2 \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ takdirde sağlayan şartları bütün çözümler için gözde alacağız. Eş. 2.28 denklemin her çözümü için, skalar fonksiyonun $\|x(t)\|^2 = x(t)^T x(t)$ delta türevi t ye göre:

$$\begin{aligned} \left[\|x(t)\|^2 \right]^\Delta &= x(t)^T{}^\Delta x(t) + x(t)^T{}^\sigma x^\Delta(t) \\ &= x(t)^T A^T(t)x(t) + x(t)^T (I + \mu(t)A^T(t))A(t)x(t) \\ &= x(t)^T \left[A^T(t) + A(t) + \mu(t)A^T(t)A(t) \right] x(t) \end{aligned} \quad (2.33)$$

olur.

Dolayısıyla eğer elde edilmiş kuadratik formu negatif tanımlı ise, yani $A^T(t) + A(t) + \mu(t)A^T(t)A(t)$ her t için negatif tanımlı ise , o zaman $\|x(t)\|^2$, t artarken düzgün olarak azalacaktır. Sonra göstereceğiz ki eğer bir $\nu > 0$ varsa öyleki bütün t ler için $A^T(t) + A(t) + \mu(t)A^T(t)A(t) \leq -\nu I$ sağlanıyorsa, o zaman $t \rightarrow \infty$ olduğundan $\|x(t)\|^2 \rightarrow 0$ olur. Bu bahsı biçimlendirmek için, zamanla değişen kuadratik formları tanıttırılır çünkü kararlılığın analiz etmesine yararlıdır.

Kuadratik formlara, kuadratik Lyapunov fonksiyonların birleşimi olarak bakarız. Bir simetri matris $Q(t) \in C_{rd}^1(T, R^{n \times n})$ için, kuadratik Lyapunov fonksiyonu $x^T(t)Q(t)x(t)$ şeklinde yazabiliriz. Eğer $x(t)$, Eş. 2.28 in çözümü ise, $x^T(t)Q(t)x(t)$ nun bir skalar çıkışı olur, bizim istediğimiz, her $t \geq t_0$ için $x^T(t)Q(t)x(t)$ ifadenin değerinin davranışın incelenmesidir.

2.34. Tanım

$Q(t)$ yi bir simetri matris alalım öyleki $Q(t) \in C_{rd}^1(T, R^{n \times n})$ olsun. Bir kuadratik Lyapunov fonksiyonların birleşimi zaman skalasında

$$x^T(t)Q(t)x(t), \quad t \geq t_0 \quad (2.34)$$

biçimindedir ve onun delta türevi

$$\begin{aligned} \left[x^T(t)Q(t)x(t) \right]^{\Delta_t} &= x^T(t)[A^T(t)Q(t) \\ &\quad + (I + \mu(t)A^T(t))(Q^\Delta(t) + Q(t)A(t) + \mu(t)Q^\Delta(t)A(t))] \\ &= x(t)[A^T(t)Q(t) + Q(t)A(t) + \mu(t)A^T(t)Q(t)A(t) \\ &\quad + (I + \mu(t)A^T(t))Q^\Delta(t)(I + \mu(t)A(t))]x(t) \end{aligned}$$

şeklinde olur.

Elde edilmiş Eş. 2.34 matris dynamic denklemin türevi her t için

$$\begin{aligned} A^T(t)Q(t) + Q(t)A(t) + \mu(t)A^T(t)Q(t)A(t) \\ + (I + \mu(t)A^T(t))Q^\Delta(t)(I + \mu(t)A(t)) = -M, \quad M = M^T \end{aligned}$$

biçimindedir.

Açıktır bu ifade, tanımlı sürekli matris dynamic denklemini $T = R$ durumunu ve ayrık matris dynamic denklemini $T = Z$ durumunu birleştirir.

2.9. Düzgün ve Üstel kararlılık için Lyapunov kriteri

Bu kısımda, Eş. 2.28 sistemin düzgün kararlılığının kriterini hatırlatacağız. Teorem 2.31 deki kriter Liapunov kriterin ayrık ve sürekli kararlılığın bir genelleştirilmesidir.

Düzgün kararlılık Eş. 2.28 sistemin hep çözümlerin sonlu olduğunu gerektirmektedir ve sonraki teoremda, sistemin düzgün kararlılığı için yeterli şartlar verilecektir. [8,13] in yardımıyla, $Q(t)$ matrisi üzerine yeterli şartları bulmak öyleki onun karşı kuadratik formu düzgün kararlılığını versin.

2.37. Teorem

Eş. 2.28 zamanla değişen lineer dinamik sistemi düzgün kararlıdır eğerher hangi bir $t \in T$ için, bir $Q(t) \in C_{rd}^1(T, R^{n \times n})$ simetri matrisi varsa öyleki

$$(i) \quad \eta I \leq Q(t) \leq \rho I$$

$$(ii) \quad A^T(t)Q(t) + (I + \mu(t)A^T(t))(Q^\Delta(t) + Q(t)A(t) + \mu(t)Q^\Delta(t)A(t)) \leq 0$$

$$\text{ve } \eta, \rho \in R^+$$

2.38. Teorem

Eş. 2.28 zamanla değişen lineer dinamik sistemi düzgün üstel kararlıdır eğerher hangi bir $t \in T$ için, bir $Q(t) \in C_{rd}^1(T, R^{n \times n})$ simetri matrisi varsa öyleki

$$(i) \quad \eta I \leq Q(t) \leq \rho I$$

$$(ii) \quad A^T(t)Q(t) + (I + \mu(t)A^T(t))(Q^\Delta(t) + Q(t)A(t) + \mu(t)Q^\Delta(t)A(t)) \leq -\nu I$$

$$\text{ve } \eta, \rho, \nu \in R^+, \quad \frac{-\nu}{\rho} \in \mathfrak{R}^+.$$

3.ÇOK NOKTALI SINIR DEĞER PROBLEMİNİN GREEN FONKSİYON METODU İLE DİNAMİK SİSTEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde sınır değer problemi hakkında bazı kavramlar, formüller, iki nokta sınır değer problemin varlığı ve tekliği ve Green fonksiyonun özellikleri verilecektir. Elde edilen bu sonuçlar, çok noktalı sınır değer problemi için genelleştirilecektir.. Bu ifadeler delta türev için [11] de verilmiştir. Bu elde edilen sonuçlar nabla türev için de yapılmıştır.

Sonuç 2.33 den

$$y^{\nabla}(t) = A(t)y(t) + f(t) \quad (3.1)$$

$$y(t_0) = y_0 \in R \quad (3.2)$$

başlangıç değer problemin çözümü,

$$y(t) = \hat{e}_A(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t \hat{e}_A(t, \rho(\tau))f(\tau)\nabla\tau \quad \text{veya}$$

$$y(t) = \hat{\Phi}_A(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t \hat{\Phi}_A(t, \rho(\tau))f(\tau)\nabla\tau .$$

biçiminde verilmiştir.

3.1. İki nokta sınır değer probleminin genelleştirilmesi

3.1. Tanım

Eğer Eş. 3.1 denkleminde, $\hat{\Phi}_A(t, t_0)$ homogen denklemin temel çözümü ise, D matrisi, $D = M \hat{\Phi}_A(t_0, t_0) + N \hat{\Phi}_A(t_1, t_0)$ biçiminde gösterilir. Eğer $D = 0$ ise, Eş. 3.1 denkleminin karakteristik matrisi denir.

3.1. Teorem

$A : T_k \rightarrow B(X)$ sağdan sürekli, regresif ve $f : T_k \rightarrow X$ sürekli olsun. O zaman

$$x^\nabla(t) = A(t)x(t) + f(t) \quad (3.3)$$

lineer dinamik denkleminin bir tek çözümü vardır. Ayrıca

$$M x(t_0) + N x(t_1) = \alpha \quad (3.4)$$

genel sınır değer şartı sağlar. Burada M ve N , n inci mertebeden kare matrislerdir. $x(t)$, Eş. 3.3 denkleminin çözümü

$$x(t) = \widehat{\Phi}_A(t, t_0) D^{-1} \alpha + \int_{t_0}^{t_1} G(t, \rho(s)) f(s) \nabla s ,$$

şeklindedir. Burada $G(t, \rho(s))$ homogen lineer dinamik sistemin sınır değer probleminin Green fonksiyonudur.

İspat

Genelde $x^\nabla(t) = A(t)x(t) + f(t)$ lineer dinamik sistemin çözümü

$$x(t) = \widehat{\Phi}_A(t, t_0) C + \int_{t_0}^t \widehat{\Phi}_A(t, \rho(s)) f(s) \nabla s ,$$

biçiminde verilir. Bu çözüm Eş. 3.4 sınır şartına uygulanırsa, o zaman

$$\left[M \widehat{\Phi}_A(t_0, t_0) + N \widehat{\Phi}_A(t_1, t_0) \right] C + N \int_{t_0}^{t_1} \widehat{\Phi}_A(t, \rho(s)) f(s) \nabla s = \alpha$$

$$DC = \alpha - N \int_{t_0}^{t_1} \widehat{\Phi}_A(t, \rho(s)) f(s) \nabla s$$

$$C = D^{-1} \alpha - D^{-1} N \int_{t_0}^{t_1} \widehat{\Phi}_A(t, \rho(s)) f(s) \nabla s$$

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} x(t) &= \widehat{\Phi}_A(t, t_0) D^{-1} \alpha - \widehat{\Phi}_A(t, t_0) D^{-1} N \int_{t_0}^{t_1} \widehat{\Phi}_A(t, \rho(s)) f(s) \nabla s \\ &\quad + \int_{t_0}^t \widehat{\Phi}_A(t, \rho(s)) f(s) \nabla s \\ &= \widehat{\Phi}_A(t, t_0) D^{-1} \alpha - \widehat{\Phi}_A(t, t_0) D^{-1} N \int_{t_0}^{t_1} \widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s), t_0) f(s) \nabla s \\ &\quad + \widehat{\Phi}_A(t, t_0) \int_{t_0}^t \widehat{\Phi}_A(\rho(s), t_0) f(s) \nabla s \\ &= \widehat{\Phi}_A(t, t_0) D^{-1} \alpha - \widehat{\Phi}_A(t, t_0) D^{-1} N \int_{t_0}^{t_1} \widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s), t_0) f(s) \nabla s \\ &\quad + \int_t^{t_1} \widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s), t_0) f(s) \nabla s \Bigg] + \widehat{\Phi}_A(t, t_0) \int_{t_0}^t \widehat{\Phi}_A(\rho(s), t_0) f(s) \nabla s \\ &= \widehat{\Phi}_A(t, t_0) D^{-1} \alpha + \widehat{\Phi}_A(t, t_0) \Big[I - D^{-1} N \int_{t_0}^{t_1} \widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s), t_0) f(s) \nabla s \\ &\quad - \widehat{\Phi}_A(t, t_0) D^{-1} N \int_t^{t_1} \widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s), t_0) f(s) \nabla s \\ &= \widehat{\Phi}_A(t, t_0) D^{-1} \alpha + \widehat{\Phi}_A(t, t_0) \Big[D^{-1} D - D^{-1} N \int_{t_0}^{t_1} \widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s), t_0) f(s) \nabla s \\ &\quad - \widehat{\Phi}_A(t, t_0) D^{-1} N \int_t^{t_1} \widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s), t_0) f(s) \nabla s \\ &= \widehat{\Phi}_A(t, t_0) D^{-1} \alpha + \widehat{\Phi}_A(t, t_0) D^{-1} \Big[D - N \int_{t_0}^{t_1} \widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s), t_0) f(s) \nabla s \\ &\quad - \widehat{\Phi}_A(t, t_0) D^{-1} N \int_t^{t_1} \widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s), t_0) f(s) \nabla s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \widehat{\Phi}_A(t, t_0) D^{-1} \alpha + \widehat{\Phi}_A(t, t_0) D^{-1} M \widehat{\Phi}_A(t_0, t_0) \int_{t_0}^t \widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s), t_0) f(s) \nabla s \\
&\quad - \widehat{\Phi}_A(t, t_0) D^{-1} N \widehat{\Phi}_A(t_1, t_0) \int_t^{t_1} \widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s), t_0) f(s) \nabla s \\
&= \widehat{\Phi}_A(t, t_0) D^{-1} \alpha + \int_{t_0}^{t_1} G(t, \rho(s)) f(s) \nabla s
\end{aligned}$$

Burada $G(t, \rho(s))$ Green fonksiyonu,

$$G(t, \rho(s)) = \begin{cases} \widehat{\Phi}_A(t, t_0) D^{-1} M \widehat{\Phi}_A(t_0, t_0) \widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(t), t_0), & t_0 \leq s < t \leq t_1 \\ -\widehat{\Phi}_A(t, t_0) D^{-1} N \widehat{\Phi}_A(t_1, t_0) \widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(t), t_0), & t_0 \leq t < s \leq t_1 \end{cases}$$

biçimindedir. Buradan

$$G(t, \rho(s)) = \begin{cases} \widehat{\Phi}_A(t, t_0) D^{-1} M \widehat{\Phi}_A(t_0, \rho(t)), & t_0 \leq s < t \leq t_1 \\ -\widehat{\Phi}_A(t, t_0) D^{-1} N \widehat{\Phi}_A(t_1, \rho(t)), & t_0 \leq t < s \leq t_1 \end{cases}$$

elde edilebilir. İspat tamamlanmış olur.

3.2. Teorem

G Green fonksiyon aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(i) $G(t, \rho(s))$ fonksiyonunun elemanları, bir sabit s ve her t için $[a, s]$ ve $(s, b]$ aralıklarda birinci mertebeden sürekli türevi ve $t = s$ noktasında, G nin bir üst sıçrama süreksizliği vardır. Yani,

$$G(s^+, \rho(s)) - G(s^-, \rho(s)) = \widehat{\Phi}_A(s, \rho(s)) = \widehat{\Phi}_A(s) \widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s))$$

eşitlik sağlanır. Eğer $\widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s))$ sağdan sürekli ise, o zaman G nin sonlu bir birim büyüklükte süreklisizlik sıçraması vardır.

(ii) G homogen sınır değer problemin bir formal çözümüdür. bu çözüm tam değildir. Çünkü $t = s$ noktada süreksizliği vardır.

(iii) (i) ve (ii) özelliğine göre G fonksiyonu tekdir.

İspat

(i) Yukarıda verilen Green fonksiyonu G kolaylıkla

$$G(t, \rho(s)) = \begin{cases} \widehat{\Phi}_A(t) H_+ & , s < t \\ \widehat{\Phi}_A(t) H_- & , s < t \end{cases} \quad (3.5)$$

şeklinde yazılabilir. Burada H_+ ve H_- t den bağımsızlardır ve

$$H_+ = D^{-1} M \widehat{\Phi}_A(t_0, \rho(s))$$

ve

$$H_- = -D^{-1} N \widehat{\Phi}_A(t_1, \rho(s))$$

biçimindedir. Buradan

$$\begin{aligned} H_+ - H_- &= D^{-1} M \widehat{\Phi}_A(t_0, \rho(s)) + D^{-1} N \widehat{\Phi}_A(t_1, \rho(s)) \\ &= D^{-1} M \widehat{\Phi}_A(t_0) \widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s)) + D^{-1} N \widehat{\Phi}_A(t_1) \widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s)) \\ &= D^{-1} [M \widehat{\Phi}_A(t_0) + N \widehat{\Phi}_A(t_1)] \widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s)) \\ &= D^{-1} D \widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s)) \end{aligned}$$

$$=\widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s))$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} G(s^+, \rho(s)) - G(s^-, \rho(s)) &= \widehat{\Phi}_A(s)H_+ - \widehat{\Phi}_A(s)H_- \\ &= \Phi_A(s)[H_+ - H_-] \\ &= \Phi_A(s)\Phi_A^{-1}(\rho(s)) \end{aligned}$$

yazılabilir. Eğer $\widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s))$ sağdan sürekli ise $\widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s)) = \widehat{\Phi}_A^{-1}(s)$ olur.

Bu durumda $G(s^+, \rho(s)) - G(s^-, \rho(s)) = \widehat{\Phi}_A(s)\widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s))$ elde edilir.

(ii) Eş. 3.5 deki $G(t, \rho(s))$ gösterim, Eş. 3.3 ve Eş. 3.4 denklemlerin formal çözümünü verir. Yani tam bir gerçek çözüm olamaz. Çünkü $t = s$ noktasında süreksizliği vardır. $G(t, \rho(s))$ aşağıdaki homogen sınır şartlar sağladığından

$$\begin{aligned} &MG(t_0, \rho(s)) + NG(t_1, \rho(s)) \\ &= -M\widehat{\Phi}_A(t_0)D^{-1}N\widehat{\Phi}_A(t_1, \rho(s)) + N\widehat{\Phi}_A(t_1)D^{-1}M\widehat{\Phi}_A(t_0, \rho(s)) \\ &= -M\widehat{\Phi}_A(t_0)D^{-1}N\widehat{\Phi}_A(t_1)\widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s)) \\ &\quad + N\widehat{\Phi}_A(t_1)D^{-1}M\widehat{\Phi}_A(t_0)\widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s)) \\ &= -M\widehat{\Phi}_A(t_0)D^{-1}[D - M\widehat{\Phi}_A(t_0)]\widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s)) \\ &\quad + N\widehat{\Phi}_A(t_1)D^{-1}M\widehat{\Phi}_A(t_0)\widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s)) \\ &= -M\widehat{\Phi}_A(t_0)\widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s)) + M\widehat{\Phi}_A(t_0)D^{-1}M\widehat{\Phi}_A(t_0)\widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s)) \\ &\quad + [D - M\widehat{\Phi}_A(t_0)]D^{-1}M\widehat{\Phi}_A(t_0)\widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s)) \\ &= -M\widehat{\Phi}_A(t_0, \rho(s)) + M\widehat{\Phi}_A(t_0)D^{-1}M\widehat{\Phi}_A(t_0, \rho(s)) \\ &\quad + M\widehat{\Phi}_A(t_0, \rho(s)) - M\widehat{\Phi}_A(t_0)D^{-1}M\widehat{\Phi}_A(t_0, \rho(s)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

yazılabilir. Dolayısıyla G sınır şart problemin bir formal çözümüdür.

(iii) Şimdi (i) ve (ii) özelliklerinden G nin tekliğini ispatlayacağız. $G_1(t, \rho(s))$ (i) ve (ii) özelliğini sağlayan bir Green fonksiyonu olsun. $X(t, \rho(s)) = G(t, \rho(s)) - G_1(t, \rho(s))$ şekilde seçilsin. $t = s$ noktasında

$$\begin{aligned} X(s^+, \rho(s)) - X(s^-, \rho(s)) &= \\ &= G(s^+, \rho(s)) - G_1(s^+, \rho(s)) - G(s^-, \rho(s)) + G_1(s^-, \rho(s)) \\ &= G(s^+, \rho(s)) - G(s^-, \rho(s)) - G_1(s^+, \rho(s)) + G_1(s^-, \rho(s)) \\ &= \hat{\Phi}_A(s, \rho(s)) - \hat{\Phi}_A(s, \rho(s)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $X(t, \rho(s))$, $t = s$ noktasında kaldırabilir bir süreksizliğe sahiptir.

Uygun bir şekilde X fonksiyonu göze alınırsa, o zaman her $t \in [t_0, t_1]$ için daima $X(t, \rho(s))$ fonksiyonu sağdan sürekli alınabilir.

Bu durumda sınır koşulları lineerdir. X , G ve G_1 nin lineer kombinasyonudur.

$$\begin{aligned} MX(t_0, \rho(s)) + NX(t_1, \rho(s)) &= M[G(t_0, \rho(s)) - G_1(t_0, \rho(s))] + N[G(t_1, \rho(s)) - G_1(t_1, \rho(s))] \\ &= [MG(t_0, \rho(s)) + NG(t_1, \rho(s))] \\ &\quad - [MG_1(t_0, \rho(s)) + NG_1(t_1, \rho(s))] \\ &= \hat{\Phi}_A(s, \rho(s)) - \hat{\Phi}_A(s, \rho(s)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Her s sabiti için, $X(t, \rho(s))$ homogen sınır koşullunun bir çözümüdür.

Eğer $X(t, \rho(s))$ sağdan sürekli ve $t=s$ noktası hariç her noktada birinci mertebeden türevi sürekli ise, o zaman $X(t, \rho(s))$ de homogen sınır değer problemin bir çözümüdür.

Genelde süreklilik sağdan sürekliliği verir. Ancak tersi doğru değildir.

3.2. Çok noktalı sınır değer probleminin genelleştirilmesi

Bu kısımda yukarıda elde edilmiş sonuçlar çok noktalı sınır değer problemine genelleştirilecektir. Bu kısımdaki teoremlerin ispatları önceki teoremlerin basit sonuçlarıdır. Dolayısıyla ispatlara gerek yoktur. Şimdi aşağıdaki çok noktalı sınır değer problemi

$$y^\nabla(t) = A(t)y(t) + f(t) \quad (3.6)$$

$$\sum_{i=0}^n M_i x(t_i) = \alpha \quad (3.7)$$

göz önüne alınacaktır. Burada $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ ve bu diferensiyel denklemin, önceki kısımlarda kabul edilen bütün şartları sağladığı kabul edilir. M_i ler n inci mertebeden sabit kare matrislerdir.

3.2. Tanım

Eğer $\hat{\Phi}_A(t, t_0)$, Eş. 3.6 denklemin homogen tipi bir temel matrisi ise, o zaman

$$D_1 = \sum_{i=0}^n M_i \hat{\Phi}_A(t_1, t_0) \text{ matrisi şeklinde gösterilir. Eğer } D_1 = 0 \text{ ise, } D_1 \text{ matrisi Eş. 3.6}$$

ve Eş. 3.7 sınır değer probleminin karakteristik matrisidir denir.

3.4. Teorem

$A:T_k \rightarrow B(X)$ sağdan sürekli, regresif ve $f:T_k \rightarrow X$ sürekli fonksiyonu olsun. Bu taktirde Eş. 3.6 lineer dinamik denkleminin bir tek çözümü vardır. Ayrıca Eş. 3.7 sınır değer şartını sağlar.

Burada M_i ler n inci mertebeden kare matrislerdir. Eş. 3.6 ve Eş. 3.7 nin sınır değer probleminin çözümü $x(t) = \widehat{\Phi}_A(t, t_0) D_1^{-1} \alpha + \int_{t_0}^{t_n} G(t, \rho(s)) f(s) \nabla s$,

biçimindedir. $G(t, \rho(s))$, Eş. 3.7 çok noktalı sınır değer şartını sağlayan Eş. 3.6 homogen lineer dinamik denklemin sınır değer probleminin Green fonksiyonudur. $G(t, \rho(s))$ Green fonksiyonu $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $0 \leq k \leq n-1$ için.

$$G(t, \rho(s)) = \begin{cases} \widehat{\Phi}_A(t, t_0) D_1^{-1} \sum_{j=0}^k M_j \widehat{\Phi}_A(t_j, \rho(t)), & t \leq s \\ -\widehat{\Phi}_A(t, t_0) D_1^{-1} \sum_{j=k+1}^n M_j \widehat{\Phi}_A(t_j, \rho(t)), & t \geq s \end{cases}$$

şeklindedir.

3.5. Teorem

Green fonksiyon G aşağıdaki özellikleri sahiptir:

(i) $G(t, \rho(s))$ 'nin elemanları sabit s için bir t fonksiyonu bakarken $[t_0, s)$ ve $(s, t_n]$ 'da birinci mertebeden sürekli türevi vardır. $t = s$ noktada, G bir üst sıçrama süreksizliği vardır yani ,

$$G(s^+, \rho(s)) - G(s^-, \rho(s)) = \Phi_A(s, \rho(s)) = \widehat{\Phi}_A(s) \widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s))$$

Eğer $\widehat{\Phi}_A^{-1}(\rho(s))$ sağdan sürekli ise o zaman G sonlu bir birim büyüklükte süreklisizlik sıçraması vardır.

(ii) G homogen sınır değer problemin bir formal çözümüdür, ve bu bir tam çözüm değildir çünkü $t = s$ noktada süreksizlik vardır.

(iii) özellik (i) and (ii)'ye göre G tekdir.

4. DELTA VE NABLA DİNAMİK SİSTEM İÇİN DİREKT METOT

Bu bölümün birinci kısımda Delta Dinamik sistemlerin çözümü sınır değer problemler (SDP) için incelenmiştir, ve ikinci kısmın benzer şeklinde Nabla Dinamik sistemlerin sınır değer problemler çözümü için verilmiştir. Bu metotlar önceki bölümün Green fonksiyon metodun karşılaştırdığı zaman, daha avantajlıdır çünkü algoritmik metotlardır. Hal bu ki Green fonksiyon metodu bir formal çözümdür ve bir bakıştan gerçek çözümler olamazlar zira $s = t$ noktasında bir süreksizlik vardır.

4.1. Delta Dinamik sistemlerin çözümü

4.1.1. (İki nokta SDP)

$J_1 := [t_0, t_1]_T \subseteq T$ alalım. Homogen olmayan zamanla değişmeyen lineer sistem iki nokta sınır değer problemi

$$\begin{cases} x^\Delta(t) = A(t)x(t) + f(t), & t \in J_1^k \\ Lx(t_0) = \varphi; & Rx(t_1) = \psi \end{cases} \quad (D1)$$

şeklinde alalım. Burada $A(t) = (a_{ij}(t))$ bir $N \times N$ boyutlu, L bir $k \times N$ boyutlu ve R bir $(N - k) \times N$ boyutlu reel matrislerdir, φ, ψ $k, (N-k)$ boyutlu reel sütun sabit vektörler ve $f(t)$ zaman skalasında bir N boyutlu reel sütun fonksiyonudur.

Burada ilk sonucumuz teorem 4.1 de verilmiştir. Açıktır [14,theorem 4.1] in sürekli durumu ve [15, theorem 4.3.1] in ayrık durumu Eş.D nin otonom özel bir örnekleri olurlar.

4.1. Teorem

Eş.D bir regresif sistem olsun ve $\Phi_A(t, t_0) = e_A(t, t_0)$, Eş.D1 nin homogen temel matrisi alalım. Ayrıca $W = \Phi_A(t_1, t_0) = e_A(t_1, t_0)$. O zaman H matrisini $H = \begin{pmatrix} L \\ RW \end{pmatrix}$ biçiminde alalım. Eğer H matrisi singüler olmazsa, o zaman Eş.D nin problemi:

$$x(t) = e_A(t, t_0) H^{-1} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi - R \int_{t_0}^{t_1} e_A(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta \tau \end{pmatrix} + \int_{t_0}^t e_A(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta \tau \quad (4.1)$$

tek çözüme sahiptir.

Açıktır Eş.4.1 yi $\Phi_A(t, t_0)$ ye göre de yazılabilir.

4.1.2. (Üç nokta SDP) $j_2 := [t_0, t_2]_T \subseteq T$ ve $t_1 \in (t_0, t_2)_T$ alalım. Homogen olmayan zamanla değişmeyen lineer sistem üç ayrık nokta sınır değer problemi

$$\begin{cases} x^\Delta(t) = A(t)x(t) + f(t), & t \in j_2^k \\ B_0 x(t_0) = \varphi_0 & ; B_1 x(t_1) = \varphi_1 & ; B_2 x(t_2) = \varphi_2 \end{cases} \quad (E1)$$

$$(E2)$$

şeklinde alalım. Burada $A(t) = (a_{ij}(t))$ bir $N \times N$ boyutlu, B_0 bir $k_0 \times N$ boyutlu ve B_1 bir $k_1 \times N$ boyutlu ve B_2 bir $k_2 \times N$ boyutlu reel matrislerdir ve $(k_0 + k_1 + k_2 = N)$, $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$, k_1, k_2, k_3 boyutlu reel sütun sabit vektörler ve $f(t)$ zaman skalasında bir N boyutlu reel sütun fonksiyonudur.

4.2. Teorem

Eş.E bir regresif sistem olsun ve $\Phi_A(t, t_0) = e_A(t, t_0)$, Eş.E1 in homogen temel matrisi alalım. Ayrıca $W_1 = \Phi_A(t_1, t_0) = e_A(t_1, t_0)$; $W_2 = \Phi_A(t_2, t_0) = e_A(t_2, t_0)$. O

zaman H matrisini $H = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 W_1 \\ B_2 W_2 \end{pmatrix}$ biçiminde alalım. Eğer H matrisi singüler olmazsa,

o zaman Eş.D problemi;

$$x(t) = e_A(t, t_0) H^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 - B_1 \int_{t_0}^{t_1} e_A(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta \tau \\ \varphi_2 - B_2 \int_{t_0}^{t_2} e_A(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta \tau \end{pmatrix} + \int_{t_0}^t e_A(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta \tau \quad (4.2)$$

tek çözüme sahiptir.

Şimdi kolayca yukarıdaki teoremi çok nokta sınır değer probleme uygulanabilir.

4.1.3. (Çok nokta SDP) $j := [t_0, t_n]_T \subseteq T$ ve $t_k \in (t_0, t_n)_T$; $0 < k < n$ alalım.

Homogen olmayan zamanla değişmeyen lineer sistem ayrık çok nokta sınır değer problemi

$$\begin{cases} x^\Delta(t) = A(t)x(t) + f(t), t \in j^k & (F1) \\ B_i x(t_i) = \varphi_i; 0 \leq i \leq n; \quad \forall t_i \in [t_0, t_n], t_i < t_{i+1} & (F2) \end{cases}$$

şeklinde alalım. Burada $A(t) = (a_{ij}(t))$ bir $N \times N$ boyutlu, B_i ler $k_i \times N$ boyutlu reel matrislerdir ve $(\sum_{0 \leq i \leq n} k_i = N)$, φ_i ($0 \leq i \leq n$) ler, k_i boyutlu reel sütun sabit vektörler ve $f(t)$ zaman skalasında bir N boyutlu reel sütun fonksiyonudur. Bu problemin çözümü Teorem 4.3 de verilmiştir.

4.3. Teorem

Eş.F bir regresif sistem olsun ve $\Phi_A(t, t_0) = e_A(t, t_0)$, Eş.F1 in homogen temel matrisi alalım. Ayrıca $W_i = \Phi_A(t_i, t_0) = e_A(t_i, t_0)$, $1 \leq i \leq n$. O zaman H matrisini

$$H = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 W_1 \\ B_2 W_2 \\ \dots \\ B_n W_n \end{pmatrix} \text{ biçiminde alalım. Eğer H matrisi singüler olmazsa, o zaman Eş.F}$$

problemi;

$$x(t) = e_A(t, t_0) H^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 - B_1 \int_{t_0}^{t_1} e_A(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta \tau \\ \varphi_2 - B_2 \int_{t_0}^{t_2} e_A(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta \tau \\ \dots \\ \varphi_n - B_n \int_{t_0}^{t_n} e_A(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta \tau \end{pmatrix} + \int_{t_0}^t e_A(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta \tau \quad (4.3)$$

tek çözüme sahiptir.

4.1.4. (İki nokta ayrılmamış SDP) $J_1 := [t_0, t_1]_T \subseteq T$ alalım. Homogen olmayan zamanla değişmeyen lineer sistem ayrılmamış iki nokta sınır değer problemi

$$\begin{cases} x^\Delta(t) = A(t)x(t) + f(t), & t \in J_1^k \\ Lx(t_0) + Rx(t_1) = \alpha \end{cases} \quad \begin{matrix} (ND1) \\ (ND2) \end{matrix}$$

şeklinde alalım. Burada $A(t) = (a_{ij}(t))$ bir $N \times N$ boyutlu, L ve R $N \times N$ boyutlu reel matrislerdir, α N boyutlu reel sütun sabit vektör ve $f(t)$ zaman skalasında bir N boyutlu reel sütun fonksiyonudur.

4.4. Teorem

Eş. ND bir regresif sistem olsun ve $\Phi_A(t, t_0) = e_A(t, t_0)$, Eş. ND1 in homogen temel matrisi alalım. Ayrıca $W = \Phi_A(t_1, t_0) = e_A(t_1, t_0)$. O zaman H matrisini $H = (L + RW)$ biçiminde alalım. Eğer H matrisi singüler olmazsa, o zaman Eş. ND problemi:

$$x(t) = e_A(t, t_0)H^{-1}(\alpha - R \int_{t_0}^{t_1} e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau) + \int_{t_0}^t e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau \quad (4.4)$$

tek çözüme sahiptir.

4.1.5. (Üç nokta ayrılmamış SDP) $j_2 := [t_0, t_2]_T \subseteq T$ alalım. Homogen olmayan zamanla değişmeyen lineer sistem ayrılmamış üç nokta sınır değer problemi

$$\begin{cases} x^\Delta(t) = A(t)x(t) + f(t), & t \in j_2^k \\ B_0x(t_0) + B_1x(t_1) + B_2x(t_2) = \alpha \end{cases} \quad \begin{matrix} (NE1) \\ (NE2) \end{matrix}$$

şeklinde alalım. Burada $A(t) = (a_{ij}(t))$ bir $N \times N$ boyutlu, L ve R $N \times N$ boyutlu reel matrislerdir, α N boyutlu reel sütun sabit vektör ve $f(t)$ zaman skalasında bir N boyutlu reel sütun fonksiyonudur.

4.5. Teorem

Eş. NE bir regresif sistem olsun ve $\Phi_A(t, t_0) = e_A(t, t_0)$, Eş. NE1 in homogen temel matrisi alalım. Ayrıca $W_1 = \Phi_A(t_1, t_0) = e_A(t_1, t_0)$; $W_2 = \Phi_A(t_2, t_0) = e_A(t_2, t_0)$. O zaman H matrisini $H = (B_0 + B_1W_1 + B_2W_2)$ biçiminde alalım. Eğer H matrisi singüler olmazsa, o zaman Eş. NE problemi:

$$x(t) = e_A(t, t_0)H^{-1}(\alpha - B_1 \int_{t_0}^{t_1} e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau - B_2 \int_{t_0}^{t_2} e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau) + \int_{t_0}^t e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau \quad (4.5)$$

tek çözüme sahiptir.

Şimdi kolayca yukarıdaki teoremi çok nokta sınır değer probleme uygulanabilir.

4.1.6. (Çok nokta ayrılmamış SDP) $j := [t_0, t_n]_T \subseteq T$ ve $t_k \in (t_0, t_n)_T$; $0 < k < n$ alalım. Homogen olmayan zamanla değişmeyen lineer sistem ayrılmamış üç nokta sınır değer problemi

$$\begin{cases} x^\Delta(t) = A(t)x(t) + f(t) & , \quad t \in j^k \\ \sum_{0 \leq i \leq n} B_i x(t_i) = \alpha & \forall t_i \in [t_0, t_n], t_i < t_{i+1} \end{cases} \quad \begin{matrix} (NF1) \\ (NF2) \end{matrix}$$

şeklinde alalım. Burada $A(t) = (a_{ij}(t))$ bir $N \times N$ boyutlu, B_i ler $N \times N$ boyutlu reel matrislerdir, α N boyutlu reel sütun sabit vektör ve $f(t)$ zaman skalasında bir N boyutlu reel sütun fonksiyonudur.

4.6. Teorem

Eş. NF bir regresif sistem olsun ve $\Phi_A(t, t_0) = e_A(t, t_0)$, Eş. NF1 in homogen temel matrisi alalım. Ayrıca $W_i = \Phi_A(t_i, t_0) = e_A(t_i, t_0)$, $1 \leq i \leq n$. O zaman H matrisini $H = (B_0 + B_1 W_1 + B_2 W_2 + \dots + B_n W_n)$ biçiminde alalım. Eğer H matrisi singüler olmazsa, o zaman Eş. NF problemi:

$$x(t) = e_A(t, t_0)H^{-1} \left(\alpha - B_1 \int_{t_0}^{t_1} e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau - B_2 \int_{t_0}^{t_2} e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau - \dots - B_n \int_{t_0}^{t_n} e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau \right) + \int_{t_0}^t e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau \quad (4.6)$$

tek çözüme sahiptir.

Teoremlerin İspatları

4.1. Teoremin ispatı

(Varlık): Önceki bölümlerden 2.3 kısımdan Eş. D nin genel çözümü

$$x(t) = e_A(t, t_0)C + \int_{t_0}^t e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau \quad (4.7)$$

biçiminde yazılabilir. $C, x(t_0)$ ve $x(t_1)$ de belirsizdir, dolayısıyla eğer Eş. 4.7 i Eş.

D2 denkleminde uygulanırsa

$$Lx(t_0) = \varphi \Rightarrow Le_A(t_0, t_0)C + \int_{t_0}^{t_0} e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau = \varphi \Rightarrow LC = \varphi \quad (4.8)$$

$$Rx(t_1) = \psi \Rightarrow R(e_A(t_1, t_0)C + \int_{t_0}^{t_1} e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau) = \psi \Rightarrow$$

$$Re_A(t_1, t_0)C = \psi - R \int_{t_0}^{t_1} e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau. \quad (4.9)$$

olur. Şimdi Eş. 4.8 ve Eş. 4.9 den

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} L \\ Re_A(t_1, t_0) \end{pmatrix} C &= \begin{pmatrix} L \\ R\Phi_A(t_1, t_0) \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi - R \int_{t_0}^{t_1} e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau \end{pmatrix} \Rightarrow \\ C &= H^{-1} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi - R \int_{t_0}^{t_1} e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau \end{pmatrix} \end{aligned}$$

C ni Eş. 4.7 ye konuluğu zaman çözümün varlığının ispatı tamamlanır.

(Teklik): $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ iki farklı Eş. D nin çözümü olsun, şimdi

$z(t) = x_2(t) - x_1(t)$, alalım Eş. D nin yardımıyla yazabiliriz:

$$\begin{cases} z^\Delta(t) = A(t)Z(t), & t \in j^k \\ Lz(t_0) = 0, & Rz(t_1) = 0 \end{cases}$$

ve Eş. 4.1 den, $z(t) \equiv 0$ olduğundan, $x_2(t) \equiv x_1(t)$ olur bu da $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ farklı olduğundan bir çelişkidir. dolayısıyla çözümün tekliği elde edilir.

4.2. Teoremin ispatı

(Varlık): Tekrar genel çözümü Eş. 4.7 den başlayalım. $C, x(t_0), x(t_1)$ ve $x(t_2)$ de belirsizdir, dolayısıyla eğer Eş. 4.7 i Eş. E2 denkleminde uygulanırsa

$$B_0 x(t_0) = \varphi_0 \Rightarrow B_0 (e_A(t_0, t_0)C + \int_{t_0}^{t_0} e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau) = \varphi_0 \Rightarrow B_0 C = \varphi_0 \quad (4.10)$$

$$B_1 x(t_1) = \varphi_1 \Rightarrow B_1 (e_A(t_1, t_0)C + \int_{t_0}^{t_1} e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau) = \varphi_1 \Rightarrow$$

$$B_1 e_A(t_1, t_0)C = \varphi_1 - B_1 \int_{t_0}^{t_1} e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau. \quad (4.11)$$

$$B_2 x(t_2) = \varphi_2 \Rightarrow B_2 (e_A(t_2, t_0)C + \int_{t_0}^{t_2} e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau) = \varphi_2 \Rightarrow$$

$$B_2 e_A(t_2, t_0)C = \varphi_2 - B_2 \int_{t_0}^{t_2} e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau \quad (4.12)$$

olur. Şimdi Eş. 4.10 ve Eş. 4.11 ve Eş. 4.12 den

$$\begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 e_A(t_1, t_0) \\ B_2 e_A(t_2, t_0) \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \Phi_A(t_1, t_0) \\ B_2 \Phi_A(t_2, t_0) \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 - B_1 \int_{t_0}^{t_1} e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau \\ \varphi_2 - B_2 \int_{t_0}^{t_2} e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$C = H^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 - B_1 \int_{t_0}^{t_1} e_A(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta \tau \\ \varphi_2 - B_2 \int_{t_0}^{t_2} e_A(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta \tau \\ \vdots \\ \varphi_n - B_n \int_{t_0}^{t_n} e_A(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta \tau \end{pmatrix}$$

C ni Eş. 4.7 ye konuluğu zaman çözümün varlığının ispatı tamamlanır.

(Teklik): Aynen önceki teoremin nedeniyle elde edilir.

4.3. Teoremin ispatı

(Varlık): Tekrar genel çözümü Eş. 4.7 den başlayalım. $C, x(t_i)$ lerde belirsizdir, dolayısıyla eğer Eş. 4.7 i Eş. F2 denkleminde uygulanırsa

$$B_i x(t_i) = \varphi_i \Rightarrow B_i (e_A(t_i, t_0) C + \int_{t_0}^{t_i} e_A(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta \tau) = \varphi_i \Rightarrow$$

$$B_i e_A(t_i, t_0) C = \varphi_i - B_i \int_{t_0}^{t_i} e_A(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta \tau \quad . \quad 0 \leq i \leq n \quad (4.13)$$

olur. Şimdi Eş. 4.13 den

$$\begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 e_A(t_1, t_0) \\ B_2 e_A(t_2, t_0) \\ \vdots \\ B_n e_A(t_n, t_0) \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \Phi_A(t_1, t_0) \\ B_2 \Phi_A(t_2, t_0) \\ \vdots \\ B_n \Phi_A(t_n, t_0) \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 - B_1 \int_{t_0}^{t_1} e_A(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta \tau \\ \varphi_2 - B_2 \int_{t_0}^{t_2} e_A(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta \tau \\ \vdots \\ \varphi_n - B_n \int_{t_0}^{t_n} e_A(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta \tau \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$C = H^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 - B_1 \int_{t_0}^{t_1} e_A(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta \tau \\ \varphi_2 - B_2 \int_{t_0}^{t_2} e_A(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta \tau \\ \dots \\ \varphi_n - B_n \int_{t_0}^{t_n} e_A(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta \tau \end{pmatrix}$$

C yi Eş. 4.7 ye konuluğu zaman çözümün varlığının ispatı tamamlanır.

(Teklik): Aynen önceki teoremin nedeniyle elde edilir.

4.4. Teoremin ispatı

Önceki bölümlerden 2.3 kısımdan Eş. ND nin genel çözümü

$$x(t) = e_A(t, t_0)C + \int_{t_0}^t e_A(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta \tau \quad (4.14)$$

biçiminde yazılabilir. C, $x(t_0)$ ve $x(t_1)$ de belirsizdir, dolayısıyla eğer Eş. 4.14 i Eş.

ND2 denkleminde uygulanırsa

$$Lx(t_0) + Rx(t_1) = \alpha \Rightarrow \begin{cases} L(e_A(t_0, t_0)C + \int_{t_0}^{t_0} e_A(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta \tau) + \\ R(e_A(t_1, t_0)C + \int_{t_0}^{t_1} e_A(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta \tau) = \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow (L + Re_A(t_1, t_0))C = \alpha - R \int_{t_0}^{t_1} e_A(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta \tau$$

$$\Rightarrow C = H^{-1} \left(\alpha - R \int_{t_0}^{t_1} e_A(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta \tau \right)$$

C yi Eş. 4.14 ye konuluğu zaman çözümü varlığının ispatı tamamlanır.

Çözümün tekliği açıktır.

4.5. Teoremin ispatı

Benzer şekilde Eş. 4.14 i ve Eş. NE nin genel çözümü alırken öyleki C, $x(t_0)$, $x(t_1)$ ve $x(t_2)$ de belirsizdir, dolayısıyla eğer Eş. 4.14 i Eş. NE2 denkleminde uygulanırsa

$$\begin{aligned}
 B_0 x(t_0) + B_1 x(t_1) + B_2 x(t_2) = \alpha &\Rightarrow \begin{cases} B_0 (e_A(t_0, t_0)C + \int_{t_0}^{t_0} e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau) + \\ B_1 (e_A(t_1, t_0)C + \int_{t_0}^{t_1} e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau) + \\ B_2 (e_A(t_2, t_0)C + \int_{t_0}^{t_2} e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau) = \alpha \end{cases} \\
 \Rightarrow \begin{cases} (B_0 + B_1 e_A(t_1, t_0) + B_2 e_A(t_2, t_0))C = \\ \alpha - B_1 \int_{t_0}^{t_1} e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau - B_2 \int_{t_0}^{t_2} e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau \end{cases} \\
 \Rightarrow C = H^{-1} \left(\alpha - B_1 \int_{t_0}^{t_1} e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau - B_2 \int_{t_0}^{t_2} e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau \right)
 \end{aligned}$$

C yi Eş. 4.14 ye konuluğu zaman çözümü varlığının ispatı tamamlanır.

Çözümün tekliği açıktır.

4.6. Teoremin ispatı

Benzer şekilde Eş. 4.14 i , Eş. NF nin genel çözümü alırken öyleki C, $x(t_i)$ lerde belirsizdir, dolayısıyla eğer Eş. 4.14 i Eş. NF2 denkleminde uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{0 \leq i \leq n} B_i x(t_i) = \alpha &\Rightarrow \sum_{0 \leq i \leq n} B_i (e_A(t_i, t_0) C + \int_{t_0}^{t_i} e_A(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta \tau) = \alpha \\
&\Rightarrow (B_0 + \sum_{1 \leq i \leq n} B_i (e_A(t_i, t_0))) C = \alpha - \sum_{1 \leq i \leq n} B_i \int_{t_0}^{t_i} e_A(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta \tau \\
&\Rightarrow C = H^{-1} \left(\alpha - \sum_{1 \leq i \leq n} B_i \int_{t_0}^{t_i} e_A(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta \tau \right)
\end{aligned}$$

C yi Eş. 4.14 ye konuluğu zaman çözümün varlığının ispatı tamamlanır.

Çözümün tekliği açıktır.

4.2. Nabla Dinamik sistemlerin çözümü

4.2.1. (İki nokta SDP) $j := [t_0, t_1]_T \subseteq T$ alalım. Homogen olmayan zamanla değişmeyen lineer sistem iki nokta sınır değer problemi

$$x^\nabla = A(t) + f(t), t \in j_k \quad (N1)$$

$$Lx(t_0) = \varphi \quad ; \quad Rx(t_0) = \psi \quad (N2)$$

şeklinde alalım. Burada $A(t) = (a_{ij}(t))$ bir $N \times N$ boyutlu, L bir $k \times N$ boyutlu ve R bir $(N - k) \times N$ boyutlu reel matrislerdir, φ, ψ $k, (N-k)$ boyutlu reel sütun sabit vektörler ve $f(t)$ zaman skalasında bir N boyutlu reel sütun fonksiyonudur. Burada ilk sonucumuz Teorem 4.2.1 de verilmiştir.

4.7. Teorem

Eş. N bir ν -regresif sistem olsun ve $\hat{\Phi}_A(t, t_0) = e_A(t, t_0)$, Eş. N1 in homogen temel matrisi alalım. Ayrıca $W = \hat{\Phi}_A(t_1, t_0) = \hat{e}_A(t_1, t_0)$. O zaman H matrisini $H = \begin{pmatrix} L \\ RW \end{pmatrix}$ biçiminde alalım. Eğer H matrisi singüler olmazsa, o zaman Eş. N problemi;

$$x(t) = \hat{e}_A(t, t_0) H^{-1} \left(\begin{matrix} \varphi \\ \psi - R \int_{t_0}^{t_1} \hat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \Delta \tau \end{matrix} \right) + \int_{t_0}^t \hat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \Delta \tau \quad (4.15)$$

tek çözüme sahiptir.

Açıktır Eş. 4.15 i $\hat{\Phi}_A(t, t_0)$ ye göre de yazılabilir.

4.2.2. (Üç nokta SDP) $j := [t_0, t_2]_T \subseteq T$ ve $t_1 \in (t_0, t_2)_T$ alalım. Homogen olmayan zamanla değişmeyen lineer sistem üç nokta sınır değer problemi

$$\begin{cases} x^\nabla(t) = A(t)x(t) + f(t) & , t \in j_k \\ B_0 x(t_0) = \varphi_0 & ; B_1 x(t_1) = \varphi_1 & ; B_2 x(t_2) = \varphi_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} (E1) \\ (E2) \end{matrix}$$

şeklinde alalım. Burada $A(t) = (a_{ij}(t))$ bir $N \times N$ boyutlu, B_0 bir $k_0 \times N$, B_1 bir $k_1 \times N$ ve B_2 bir $k_2 \times N$ ($k_0 + k_1 + k_2 = N$) boyutlu reel matrislerdir, $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$, k_0, k_1, k_2 boyutlu reel sütun sabit vektörler ve $f(t)$ zaman skalasında bir N boyutlu reel sütun fonksiyonudur.

Burada ilk sonucumuz Teorem 4.8 de verilmiştir.

4.8. Teorem

Eş. E bir ν – regresif sistem olsun ve $\widehat{\Phi}_A(t, t_0) = \widehat{e}_A(t, t_0)$, Eş. E1 in homogen temel matrisi alalım. Ayrıca $W_1 = \widehat{\Phi}_A(t_1, t_0) = \widehat{e}_A(t_1, t_0)$, $W_2 = \widehat{\Phi}_A(t_2, t_0) = \widehat{e}_A(t_2, t_0)$; O

zaman H matrisini $H = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 W_1 \\ B_2 W_2 \end{pmatrix}$ biçiminde alalım. Eğer H matrisi singüler olmazsa,

o zaman Eş. E problemi;

$$x(t) = \widehat{e}_A(t, t_0) H^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 - B_1 \int_{t_0}^{t_1} \widehat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau \\ \varphi_2 - B_2 \int_{t_0}^{t_2} \widehat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau \end{pmatrix} + \int_{t_0}^t \widehat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau \quad (4.16)$$

tek çözüme sahiptir.

Şimdi kolayca yukarıdaki teoremi çok nokta sınır değer probleme uygulanabilir.

4.2.3. (Çok nokta SDP) $j := [t_0, t_n]_T \subseteq T$ ve $t_k \in (t_0, t_n)_T$; $0 < k < n$ alalım.

Homogen olmayan zamanla değişmeyen lineer sistem ayrık çok nokta sınır değer problemi

$$\begin{cases} x^\nabla(t) = A(t)x(t) + f(t), t \in j_k & (F1) \\ B_i x(t_i) = \varphi_i; 0 \leq i \leq n; \forall t_i \in [t_0, t_n]; t_i < t_{i+1} & (F2) \end{cases}$$

şeklinde alalım. Burada $A(t) = (a_{ij}(t))$ bir $N \times N$ boyutlu, B_i ler $k_i \times N$ boyutlu reel matrislerdir ve $(\sum_{0 \leq i \leq n} k_i = N)$, φ_i ($0 \leq i \leq n$) ler, k_i boyutlu reel sütun sabit

vektörler ve $f(t)$ zaman skalasında bir N boyutlu reel sütun fonksiyonudur. Bu problemin çözümü Teorem 4.9 de verilmiştir.

4.9. Teorem

Eş. F bir ν -regresif sistem olsun ve $\hat{\Phi}_A(t, t_0) = e_A(t, t_0)$, Eş. F1 in homogen temel matrisi alalım. Ayrıca $W_i = \hat{\Phi}_A(t_i, t_0) = \hat{e}_A(t_i, t_0)$, $1 \leq i \leq n$. O zaman H matrisini

$$H = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 W_1 \\ B_2 W_2 \\ \dots \\ B_n W_n \end{pmatrix} \text{ biçiminde alalım. Eğer H matrisi singüler olmazsa, o zaman Eş. F}$$

problemi:

$$x(t) = \hat{e}_A(t, t_0) H^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 - B_1 \int_{t_0}^{t_1} \hat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau \\ \varphi_2 - B_2 \int_{t_0}^{t_2} \hat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau \\ \dots \\ \varphi_n - B_n \int_{t_0}^{t_n} \hat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau \end{pmatrix} + \int_{t_0}^t \hat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau \quad (4.17)$$

tek çözüme sahiptir.

4.2.4. (İki nokta ayrılmamış SDP) $j := [t_0, t_1]_T \subseteq T$ alalım. Homogen olmayan zamanla değişmeyen lineer sistem ayrılmamış iki nokta sınır değer problemi

$$\begin{cases} x^\nabla(t) = A(t)x(t) + f(t), & t \in j_k \\ Lx(t_0) + Rx(t_1) = \alpha \end{cases} \quad (NN 1)$$

$$(NN 2)$$

şeklinde alalım. Burada $A(t) = (a_{ij}(t))$ bir $N \times N$ boyutlu, L ve R $N \times N$ boyutlu reel matrislerdir, α N boyutlu reel sütun sabit vektör ve $f(t)$ zaman skalasında bir N boyutlu reel sütun fonksiyonudur.

4.10. Teorem

Eş. NN bir ν -regresif sistem olsun ve $\hat{\Phi}_A(t, t_0) = \hat{e}_A(t, t_0)$, Eş. NN1 in homogen temel matrisi alalım. Ayrıca $W = \hat{\Phi}_A(t_1, t_0) = \hat{e}_A(t_1, t_0)$. O zaman H matrisini $H = (L + RW)$ biçiminde alalım. Eğer H matrisi singüler olmazsa, o zaman Eş. NN problemi;

$$x(t) = \hat{e}_A(t, t_0) H^{-1} \left(\alpha - R \int_{t_0}^{t_1} \hat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau \right) + \int_{t_0}^t \hat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau \quad (4.18)$$

tek çözüme sahiptir.

4.2.5. (Üç nokta ayrılmamış SDP) $j := [t_0, t_2]_T \subseteq T$ ve $t_1 \in (t_0, t_2)_T$ alalım. Homogen olmayan zamanla değişmeyen lineer sistem ayrılmamış üç nokta sınır değer problemi

$$\begin{cases} x^\nabla(t) = A(t)x(t) + f(t), & t \in j_k \\ B_0 x(t_0) + B_1 x(t_1) + B_2 x(t_2) = \alpha \end{cases} \quad \begin{matrix} (NE1) \\ (NE2) \end{matrix}$$

şeklinde alalım. Burada $A(t) = (a_{ij}(t))$ bir $N \times N$ boyutlu, B_0, B_1 ve B_2 , $N \times N$ boyutlu reel matrislerdir, α N boyutlu reel sütun sabit vektör ve $f(t)$ zaman skalasında bir N boyutlu reel sütun fonksiyonudur.

4.11. Teorem

Eş. NE bir ν -regresif sistem olsun ve $\widehat{\Phi}_A(t, t_0) = \widehat{e}_A(t, t_0)$, Eş. NE1 in homogen temel matrisi alalım. Ayrıca $W_1 = \widehat{\Phi}_A(t_1, t_0) = \widehat{e}_A(t_1, t_0)$; $W_2 = \widehat{\Phi}_A(t_2, t_0) = \widehat{e}_A(t_2, t_0)$. O zaman H matrisini $H = (B_0 + B_1 W_1 + B_2 W_2)$ biçiminde alalım. Eğer H matrisi singular olmazsa, o zaman Eş. NE problemi;

$$x(t) = \widehat{e}_A(t, t_0) H^{-1} \left(\alpha - B_1 \int_{t_0}^{t_1} \widehat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau - \right. \\ \left. B_2 \int_{t_0}^{t_2} \widehat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau + \int_{t_0}^t \widehat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau \right) \quad (4.19)$$

tek çözüme sahiptir.

Şimdi kolayca yukarıdaki teoremi çok nokta sınır değer probleme uygulanabilir.

4.1.6. (Çok nokta ayrılmamış SDP) $j := [t_0, t_n]_T \subseteq T$ ve $t_k \in (t_0, t_n)_T$; $0 < k < n$ alalım. Homogen olmayan zamanla değişmeyen lineer sistem ayrılmamış çok nokta sınır değer problemi

$$\begin{cases} x^\nabla(t) = A(t)x(t) + f(t) & , t \in j_k \\ \sum_{0 \leq i \leq n} B_i x(t_i) = \alpha & \forall t_i \in [t_0, t_n], t_i < t_{i+1} \end{cases} \quad \begin{matrix} (NF1) \\ (NF2) \end{matrix}$$

şeklinde alalım. Burada $A(t) = (a_{ij}(t))$ bir $N \times N$ boyutlu, B_i ler $N \times N$ boyutlu reel matrislerdir, α N boyutlu reel sütun sabit vektör ve $f(t)$ zaman skalasında bir N boyutlu reel sütun fonksiyonudur.

4.12. Teorem

Eş. NF bir ν -regresif sistem olsun ve $\widehat{\Phi}_A(t, t_0) = \widehat{e}_A(t, t_0)$, Eş. NF1 in homogen temel matrisi alalım. Ayrıca $W_i = \widehat{\Phi}_A(t_i, t_0) = \widehat{e}_A(t_i, t_0)$, $1 \leq i \leq n$. O zaman H matrisini $H = (B_0 + B_1 W_1 + B_2 W_2 + \dots + B_n W_n)$ biçiminde alalım. Eğer H matrisi singüler olmazsa, o zaman Eş. NF problemi:

$$x(t) = \widehat{e}_A(t, t_0) H^{-1} \left(\alpha - B_1 \int_{t_0}^{t_1} \widehat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau - B_2 \int_{t_0}^{t_2} \widehat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau - \dots - B_n \int_{t_0}^{t_n} \widehat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau \right) + \int_{t_0}^t \widehat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau \quad (4.20)$$

tek çözüme sahiptir.

Teoremlerin İspatları

4.7. Teoremin ispatı

(Varlık): Önceki bölümlerden 2.3 kısımdan Eş. D nin genel çözümü

$$x(t) = \widehat{e}_A(t, t_0) C + \int_{t_0}^t \widehat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau \quad (4.21)$$

biçiminde yazılabilir. $C, x(t_0)$ ve $x(t_1)$ de belirsizdir, dolayısıyla eğer Eş. 4.21 i Eş. D2 denkleminde uygulanırsa

$$Lx(t_0) = \varphi \Rightarrow L\widehat{e}_A(t_0, t_0)C + \int_{t_0}^{t_0} \widehat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau = \varphi \Rightarrow LC = \varphi \quad (4.22)$$

$$Rx(t_1) = \psi \Rightarrow R(\widehat{e}_A(t_1, t_0)C + \int_{t_0}^{t_1} \widehat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau) = \psi \Rightarrow$$

$$R\widehat{e}_A(t_1, t_0)C = \psi - R \int_{t_0}^{t_1} \widehat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau. \quad (4.23)$$

olur.Şimdi Eş. 4.22 ve Eş. 4.23 den

$$\begin{pmatrix} L \\ R\hat{e}_A(t_1, t_0) \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} L \\ R\Phi_A(t_1, t_0) \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi - R \int_{t_0}^{t_1} \hat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$C = H^{-1} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi - R \int_{t_0}^{t_1} \hat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau \end{pmatrix}$$

C yi Eş. 4.21 ye konuluğu zaman çözümün varlığının ispatı tamamlanır.

(Teklik): $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ iki farklı Eş. D nin çözümü olsun, şimdi $z(t) = x_2(t) - x_1(t)$, alalım Eş. D nin yardımıyla yazabiliriz:

$$\begin{cases} z^\nabla(t) = A(t)Z(t), & t \in j^k \\ Lz(t_0) = 0, & Rz(t_1) = 0 \end{cases}$$

ve Eş. 4.21 den, $z(t) \equiv 0$ olduğundan, $x_2(t) \equiv x_1(t)$ olur bu da $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ farklı olduğundan bir çelişkidir.dolayısıyla çözümün tekliği elde edilir.

4.8. Teoremin ispatı

(Varlık): Tekrar genel çözümü Eş. 4.21 den başlayalım. $C, x(t_0)$, $x(t_1)$ ve $x(t_2)$ de belirsizdir, dolayısıyla eğer Eş. 4.21 i Eş. E2 denklemine uygulanırsa

$$B_0 x(t_0) = \varphi_0 \Rightarrow B_0 (\hat{e}_A(t_0, t_0) C + \int_{t_0}^{t_0} \hat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau) = \varphi_0 \Rightarrow B_0 C = \varphi_0 \quad (4.24)$$

$$B_1 x(t_1) = \varphi_1 \Rightarrow B_1 (\hat{e}_A(t_1, t_0) C + \int_{t_0}^{t_1} \hat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau) = \varphi_1 \Rightarrow$$

$$B_1 \hat{e}_A(t_1, t_0)C = \varphi_1 - B_1 \int_{t_0}^{t_1} \hat{e}_A(t, \rho(\tau))f(\tau) \nabla \tau \quad . \quad (4.25)$$

$$B_2 x(t_2) = \varphi_2 \Rightarrow B_2 (\hat{e}_A(t_2, t_0)C + \int_{t_0}^{t_2} \hat{e}_A(t, \rho(\tau))f(\tau) \nabla \tau) = \varphi_2 \Rightarrow$$

$$B_2 \hat{e}_A(t_2, t_0)C = \varphi_2 - B_2 \int_{t_0}^{t_2} \hat{e}_A(t, \rho(\tau))f(\tau) \nabla \tau \quad . \quad (4.26)$$

olur. Şimdi Eş. 4.24 , Eş. 4.25 ve Eş. 4.25 den

$$\begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \hat{e}_A(t_1, t_0) \\ B_2 \hat{e}_A(t_2, t_0) \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \hat{\Phi}_A(t_1, t_0) \\ B_2 \hat{\Phi}_A(t_2, t_0) \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 - B_1 \int_{t_0}^{t_1} \hat{e}_A(t, \rho(\tau))f(\tau) \nabla \tau \\ \varphi_2 - B_2 \int_{t_0}^{t_2} \hat{e}_A(t, \rho(\tau))f(\tau) \nabla \tau \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$C = H^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 - B_1 \int_{t_0}^{t_1} \hat{e}_A(t, \rho(\tau))f(\tau) \nabla \tau \\ \varphi_2 - B_2 \int_{t_0}^{t_2} \hat{e}_A(t, \rho(\tau))f(\tau) \nabla \tau \end{pmatrix}$$

C ni Eş. 4.21 ye konuluğu zaman çözümün varlığının ispatı tamamlanır.

(Teklik): Aynen önceki teoremin nedeniyle elde edilir.

4.9. Teoremin ispatı

(Varlık): Tekrar genel çözümü Eş. 4.21 den başlayalım. C , x(t_i) lerde belirsizdir, dolayısıyla eğer Eş. 4.21 i Eş. F2 denkleminde uygulanırsa

$$B_i x(t_i) = \varphi_i \Rightarrow B_i (\hat{e}_A(t_i, t_0)C + \int_{t_0}^{t_i} \hat{e}_A(t, \rho(\tau))f(\tau) \nabla \tau) = \varphi_i \Rightarrow$$

$$B_i \hat{e}_A(t_i, t_0)C = \varphi_i - B_i \int_{t_0}^{t_i} \hat{e}_A(t, \rho(\tau))f(\tau) \nabla \tau \quad . \quad 0 \leq i \leq n \quad (4.27)$$

olur. Şimdi Eş. 4.27 den

$$\begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \hat{e}_A(t_1, t_0) \\ B_2 \hat{e}_A(t_2, t_0) \\ \dots \\ B_n \hat{e}_A(t_n, t_0) \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \hat{\Phi}_A(t_1, t_0) \\ B_2 \hat{\Phi}_A(t_2, t_0) \\ \dots \\ B_n \hat{\Phi}_A(t_n, t_0) \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 - B_1 \int_{t_0}^{t_1} \hat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau \\ \varphi_2 - B_2 \int_{t_0}^{t_2} \hat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau \\ \dots \\ \varphi_n - B_n \int_{t_0}^{t_n} \hat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$C = H^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 - B_1 \int_{t_0}^{t_1} \hat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau \\ \varphi_2 - B_2 \int_{t_0}^{t_2} \hat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau \\ \dots \\ \varphi_n - B_n \int_{t_0}^{t_n} \hat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau \end{pmatrix}$$

C yi Eş. 4.21 ye konuluğu zaman çözümün varlığının ispatı tamamlanır.

(Teklik): Aynen önceki teoremin nedeniyle elde edilir.

4.10. Teoremin ispatı

Önceki bölümlerden 2.3 kısımdan Eş. ND nin genel çözümü

$$x(t) = \hat{e}_A(t, t_0)C + \int_{t_0}^t \hat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau \quad (4.28)$$

biçiminde yazılabilir. C, $x(t_0)$ ve $x(t_1)$ de belirsizdir, dolayısıyla eğer Eş. 4.28 i Eş.

ND2 denlemine uygulanırsa

$$Lx(t_0) + Rx(t_1) = \alpha \Rightarrow \begin{cases} L(\hat{e}_A(t_0, t_0))C + \int_{t_0}^{t_0} \hat{e}_A(t, \rho(\tau))f(\tau)\nabla\tau + \\ R(\hat{e}_A(t_1, t_0))C + \int_{t_0}^{t_1} \hat{e}_A(t, \rho(\tau))f(\tau)\nabla\tau = \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow C = H^{-1} \left(\alpha - R \int_{t_0}^{t_1} \hat{e}_A(t, \rho(\tau))f(\tau)\nabla\tau \right)$$

C yi Eş. 4.28 ye konuluğu zaman çözümün varlığının ispatı tamamlanır.

Çözümün tekliği açıktır.

4.11. Teoremin ispatı

Benzer şekilde Eş. 4.28 i , Eş. NE nin genel çözümü alırken öyleki C, $x(t_0)$, $x(t_1)$ ve $x(t_2)$ de belirsizdir, dolayısıyla eğer Eş. 4.28 i Eş. NE2 denkleminde uygulanırsa

$$B_0x(t_0) + B_1x(t_1) + B_2x(t_2) = \alpha \Rightarrow \begin{cases} B_0(\hat{e}_A(t_0, t_0))C + \int_{t_0}^{t_0} \hat{e}_A(t, \rho(\tau))f(\tau)\nabla\tau + \\ B_1(\hat{e}_A(t_1, t_0))C + \int_{t_0}^{t_1} \hat{e}_A(t, \rho(\tau))f(\tau)\nabla\tau + \\ B_2(\hat{e}_A(t_2, t_0))C + \int_{t_0}^{t_2} \hat{e}_A(t, \rho(\tau))f(\tau)\nabla\tau = \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (B_0 + B_1\hat{e}_A(t_1, t_0) + B_2\hat{e}_A(t_2, t_0))C = \\ \alpha - B_1 \int_{t_0}^{t_1} \hat{e}_A(t, \rho(\tau))f(\tau)\nabla\tau - B_2 \int_{t_0}^{t_2} \hat{e}_A(t, \rho(\tau))f(\tau)\nabla\tau \end{cases}$$

$$\Rightarrow C = H^{-1} \left(\alpha - B_1 \int_{t_0}^{t_1} \hat{e}_A(t, \rho(\tau))f(\tau)\nabla\tau - B_2 \int_{t_0}^{t_2} \hat{e}_A(t, \rho(\tau))f(\tau)\nabla\tau \right)$$

C yi Eş. 4.28 ye konuluğu zaman çözümün varlığının ispatı tamamlanır.

Çözümün tekliği açıktır.

4.12. Teoremin ispatı

Benzer şekilde Eş. 4.28 i , Eş. NF nin genel çözümü alırken öyleki $C, x(t_i)$ lerde belirsizdir, dolayısıyla eğer Eş. 4.28 i Eş. NF2 denlemine uygulanırsa

$$\sum_{0 \leq i \leq n} B_i x(t_i) = \alpha \Rightarrow \sum_{0 \leq i \leq n} B_i (\hat{e}_A(t_i, t_0)C + \int_{t_0}^{t_i} \hat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau) = \alpha$$

$$\Rightarrow (B_0 + \sum_{1 \leq i \leq n} B_i (\hat{e}_A(t_i, t_0)))C = \alpha - \sum_{1 \leq i \leq n} B_i \int_{t_0}^{t_i} \hat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau$$

$$\Rightarrow C = H^{-1} \left(\alpha - \sum_{1 \leq i \leq n} B_i \int_{t_0}^{t_i} \hat{e}_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau \right)$$

C yi Eş. 4.28 ye konuluğu zaman çözümün varlığının ispatı tamamlanır. Çözümün tekliği açıktır.

5. ZAMAN SKALASINDA LİNEER KISIMLI LİNEER OLMAYAN SINIR DEĞER DİNAMİK SİSTEMLERİN ÇÖZÜMÜN VARLIĞI

Bu bölümde, zaman skalasında lineer olmayan

$$y^\nabla(t) = A(t)y(t) + F(t, y(t)), \quad t \in [t_0, t_1]_T \quad (5.1)$$

$$My(t_0) + Ny(t_1) = \alpha \quad (5.2)$$

sisteminin çözümünün varlığı incelenecektir. Bu sonuçlar delta türev ve

$$y^\nabla(t) = A(t)y(t) + F(t, y(\rho(t))) \quad (5.3)$$

problemleri için aynı şartlar altında uygulanabilir. Burada $A: [t_0, t_1] \rightarrow B(R^n)$ sağdan sürekli, regresifdir. M ve N , n inci mertebeden kare matrislerdir. Önceki bölümde Eş.5.2 sınır şartı altında $y^\nabla(t) = A(t)y(t) + f(t)$ denklemin çözümünün varlığı, gerekli ve yeterli şartlar altında incelendi. Bu taktirde

$$D = M \Phi_A(t_0, t_0) + N \Phi_A(t_1, t_0) \quad (5.4)$$

singüler değilse çözüm

$$x(t) = \Phi_A(t, t_0) D^{-1} \left(\alpha - N \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau \right) + \int_{t_0}^t \Phi_A(t, \rho(\tau)) f(\tau) \nabla \tau$$

şeklinde elde edilir. Yukarıdaki sonuç Lery-Schauder sabit nokta teoreminin yardımıyla Eş.5.1 ve Eş.5.2 den lineer olmayan sistemlerin çözümünün varlığı incelenecektir. Bu yüzden bu bölümde [10] da kullanılacak sabit nokta teoremi aşağıda verilmiştir.

5.1. Teorem

C, E Banach uzayının bir konveks alt kümesi olsun. $U, 0 \in U$ olmak üzere C nin bir alt kümesi alalım. Bu taktirde herhangi bir kompakt, sürekli bir $\Gamma: \bar{U} \rightarrow C$ fonksiyonu aşağıdaki iki özelliklerden en az birine sahiptir:

- (i) $\Gamma, \bar{U}$ da bir sabit noktası vardır.
- (ii) $x = \lambda \Gamma(x)$ eşitliğini sağlayan $\lambda \in (0,1)$ olmak üzere bir $x \in \partial U$ vardır.

Şimdi

$$y^\nabla(t) = A(t)y(t) + \mu F(t, y(t)), \quad t \in [t_0, t_1]_T \quad (5.5)$$

$$My(t_0) + Ny(t_1) = \alpha \quad (5.6)$$

sınır değer problemini göz önüne alalım. Burada $\mu > 0$ sabit bir katsayıdır.

5.2. Teorem

$A: [t_0, t_1] \rightarrow B(R^n)$ ld-sürekli, regresif ve $f: [t_0, t_1] \times R^n \rightarrow R^n$ fonksiyonu sürekli olsun. $\sup_{t \in [t_0, t_1]} \|\Phi_A(t, t_0)\| < \infty$ ve $D = M\Phi_A(t_0, t_0) + N\Phi_A(t_1, t_0)$ singüler olmayan matris olsun.

- (i) Bir sürekli, azalmayan $\psi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu herhangi bir $x \in B[t_0, t_1]$ ve $s \in B[t_0, t_1]$ için, $\|f(s, x(s))\| \leq r(s)\psi(\|x(s)\|) + q(s)$, $r(s) \geq 0, q(s) \geq 0$ eşitsizliği vardır.

$$(ii) \sup_{t \in [t_0, t_1]} \int_{t_0}^{t_1} \|\Phi_A(t, \rho(s))\| r(s) \nabla s \equiv W < \infty.$$

$$(iii) \sup_{t \in [t_0, t_1]} \int_{t_0}^{t_1} \|\Phi_A(t, \rho(s))\| q(s) \nabla s \equiv P < \infty.$$

$$(iv) \mu_0 \geq 0, \sup_{x \in (0, \infty)} \left(\frac{x}{E_0 \mu_0 \psi(x) + E_1 \mu_0 + E_2} \right) > 1$$

Burada $E_0 = W + WQ \|D^{-1}\| \|N\|$, $E_1 = P + PQ \|D^{-1}\| \|N\|$, $E_2 = Q \|D^{-1}\| \|\alpha\|$

ve $Q = \|\Phi_A\| = \sup_{t \in [t_0, t_1]} \|\Phi_A(t)\|$ dır.

Bu taktirde $0 \leq \mu \leq \mu_0$ ise, Eş.5.5 ve Eş.5.6 den lineer olmayan denklem sistemin (herhangi bir $\alpha \in R^n$ için) $B[t_0, t_1]$ da çözümü vardır.

İspat

$0 \leq \mu \leq \mu_0$ sabit olsun. $M_0 > 0$ için,

$$\frac{M_0}{E_0 \mu_0 \psi(M_0) + E_1 \mu_0 + E_2} > 1 \text{ eşitsizliği sağlasın.} \quad (5.7)$$

$T : D[t_0, t_1] \rightarrow D[t_0, t_1]$ operatörü $T(\bar{x})(t) = \bar{y}(t)$ şeklinde tanımlansın (burada $\bar{x} \in D[t_0, t_1]$). Herhangi bir $t \in [t_0, t_1]$ için,

$$y(t) = \Phi_A(t, t_0) D^{-1} \alpha + \int_{t_0}^t \Phi_A(t, \rho(s)) \mu f(s, \bar{x}(s)) \nabla s \\ - \Phi_A(t, t_0) D^{-1} N \left[\int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t, \rho(s)) \mu f(s, \bar{x}(s)) \nabla s \right]$$

yazılabilir. Bu sonuca teorem 5.1. uygulayacağız. İlk önce $T : D[t_0, t_1] \rightarrow D[t_0, t_1]$ nın sürekli olduğu gösterilecektir. Bunun için $\bar{x}, \bar{x}_n \in D[t_0, t_1]$ alalım. $\bar{y} = T(\bar{x})(t)$ ve $\bar{y}_n = T(\bar{x}_n)(t)$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
\|T(\bar{x}) - T(\bar{x}_n)\|_{D[t_0, t_1]} &= \|\bar{y} - \bar{y}_n\|_{D[t_0, t_1]} = \|\bar{y} - \bar{y}_n\| = \sup_{t \in [t_0, t_1]} \|\bar{y} - \bar{y}_n\| \\
&\leq \mu \sup_{t \in [t_0, t_1]} \int_{t_0}^{t_1} \|\Phi_A(t, \rho(s))\| \|f(s, \bar{x}(s)) - f(s, \bar{x}_n(s))\| \nabla s \\
&\quad + \mu Q \|D^{-1}\| \|N\| \sup_{t \in [t_0, t_1]} \int_{t_0}^{t_1} \|\Phi_A(t, \rho(s))\| \|f(s, \bar{x}(s)) - f(s, \bar{x}_n(s))\| \nabla s
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca kolaylıkla, $\|\bar{x} - \bar{x}_n\|_{D[t_0, t_1]} \rightarrow 0$ ve $n \rightarrow \infty$ olduğunda

$$\rho = \sup_{s \in [t_0, t_1]} \int_{t_0}^{t_1} \|\Phi_A(t, \rho(s))\| \|f(s, \bar{x}(s)) - f(s, \bar{x}_n(s))\| \nabla s \rightarrow 0$$

elde edilir. Bu sonuç

$$\begin{aligned}
\|T(\bar{x}) - T(\bar{x}_n)\|_{D[t_0, t_1]} &\leq \mu \rho \sup_{t \in [t_0, t_1]} \int_{t_0}^{t_1} \|\Phi_A(t, \rho(s))\| \nabla s \\
&\quad + \mu Q \|D^{-1}\| \|N\| \rho \sup_{t \in [t_0, t_1]} \int_{t_0}^{t_1} \|\Phi_A(t, \rho(s))\| \nabla s
\end{aligned}$$

eşitliği ile birlikte, $T : D[t_0, t_1] \rightarrow D[t_0, t_1]$ nin sürekli olduğunu garanti eder. Şimdi T nin tamamen sürekli olduğunu göstereceğiz. Ω , sonlu bir $D[t_0, t_1]$ kümesinin altkümesi olsun. Dolayısıyla bir $r_0 > 0$ ve herhangi bir $\bar{x} \in \Omega$ için, $\|\bar{x}\|_{D[t_0, t_1]} < r_0$ olur.

$\bar{x} \in \Omega$ için $\bar{y}(t) = T(\bar{x})(t)$ olsun.. O zaman

$$\begin{aligned}
\|T(\bar{x})\|_{D[t_0, t_1]} &= \|\bar{y}\|_{D[t_0, t_1]} = \|\bar{y}\| \\
&\leq Q \|D^{-1}\| \|\alpha\| + \mu \sup_{t \in [t_0, t_1]} \int_{t_0}^{t_1} \|\Phi_A(t, \rho(s))\| \|f(s, \bar{x}(s))\| \nabla s \\
&\quad + \mu Q \|D^{-1}\| \|N\| \sup_{t \in [t_0, t_1]} \int_{t_0}^{t_1} \|\Phi_A(t, \rho(s))\| \|f(s, \bar{x}(s))\| \nabla s \\
&\leq Q \|D^{-1}\| \|\alpha\| + \mu [W \psi(r_0) + P] + \mu Q \|D^{-1}\| \|N\| [W \psi(r_0) + P]
\end{aligned}$$

olur. $z_1, z_2 \in [t_0, t_1]$ için

$$\begin{aligned}
& \|T(\bar{x})(z_1) - T(\bar{x})(z_2)\| \leq \|\bar{y}(z_1) - \bar{y}(z_2)\| = \|y(z_1) - y(z_2)\| \\
& \leq \left\| [\Phi_A(z_1) - \Phi_A(z_2)] D^{-1} \alpha \right\| \\
& + \left\| \int_{t_0}^{z_1} \Phi_A(z_1, \rho(s)) \mu f(s, \bar{x}(s)) \nabla s - \int_{t_0}^{z_2} \Phi_A(z_2, \rho(s)) \mu f(s, \bar{x}(s)) \nabla s \right\| \\
& + \left\| [\Phi_A(z_1) - \Phi_A(z_2)] D^{-1} N \left[\int_{t_0}^t \Phi_A(t, \rho(s)) \mu f(s, \bar{x}(s)) \nabla s \right] \right\| \\
& \leq \left\| [\Phi_A(z_1) - \Phi_A(z_2)] D^{-1} \alpha \right\| \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \left\| \Phi_A(z_1, \rho(s)) - \Phi_A(z_2, \rho(s)) \right\| \mu [r(s) \psi(r_0) + q(s)] \nabla s \\
& + \left| \int_{z_1}^{z_2} \left\| \Phi_A(z_2, \rho(s)) \right\| \mu [r(s) \psi(r_0) + q(s)] \nabla s \right| \\
& + \left\| \Phi_A(z_1) - \Phi_A(z_2) \right\| \left\| D^{-1} \right\| \|N\| \times \\
& \sup_{t \in [t_0, t_1]} \int_{t_0}^{t_1} \left\| \Phi_A(t, \rho(s)) \right\| \mu [r(s) \psi(r_0) + q(s)] \nabla s
\end{aligned}$$

elde edilir. [4] de Arzela-Ascoli teoremi yardımıyla $T : D[t_0, t_1] \rightarrow D[t_0, t_1]$ operatörün tamamen sürekli olduğunu garanti eder. Şimdi

$$\bar{x}(t) = \lambda T(\bar{x})(t) \quad (5.8)$$

denklemin $D[t_0, t_1]$ da bir $0 < \lambda < 1$ için bir çözümü olduğunu kabul edelim.

Dolayısıyla

$$\|\bar{x}\|_{D[t_0, t_1]} = \|x\| \leq Q \|D^{-1}\| \|\alpha\| + \mu \sup_{t \in [t_0, t_1]} \int_{t_0}^{t_1} \left\| \Phi_A(t, \rho(s)) \right\| \|f(s, \bar{x}(s))\| \nabla s$$

$$\begin{aligned}
& + \mu Q \|D^{-1}\| \|N\| \sup_{t \in [t_0, t_1]} \int_{t_0}^{t_1} \|\Phi_A(t, \rho(s))\| \|f(s, \bar{x}(s))\| \nabla s \\
& \leq Q \|D^{-1}\| \|\alpha\| + \mu \left[W \psi(\|\bar{x}\|_{D[t_0, t_1]}) + P \right] \\
& + \mu Q \|D^{-1}\| \|N\| \left[W \psi(\|\bar{x}\|_{D[t_0, t_1]}) + P \right] \\
& = E_2 + E_1 \mu + E_0 \mu \psi(\|\bar{x}\|_{D[t_0, t_1]}) ,
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\|\bar{x}\|_{D[t_0, t_1]}}{E_2 + E_1 \mu + E_0 \mu \psi(\|\bar{x}\|_{D[t_0, t_1]})} \leq 1$$

bulunur. Bu sonuç ve Eş.5.7 birlikte Eş.5.8 de herhangi bir $\bar{x} \in D[t_0, t_1]$ çözümü için

$$\|\bar{x}\|_{D[t_0, t_1]} \neq M_0 \tag{5.9}$$

eşitsizliği sağlanır. Teorem 5.1 de

$$U = \left\{ \bar{x} \in D[t_0, t_1] : \|\bar{x}\|_{D[t_0, t_1]} < M_0 \right\}, \quad C = E = D[t_0, t_1]$$

kullandığında, Eş.5.9 dan dolayı (ii) şartı sağlanamaz. Bu nedenle T nin bir $\bar{x}$ sabit noktası olacaktır. Yani $\bar{x}(t) = T(\bar{x})(t)$ ve $\|\bar{x}\|_{D[t_0, t_1]} < M_0$. $t \in [t_0, t_1]$ için

$$\begin{aligned}
\bar{x}(t) &= \Phi_A(t, t_0) D^{-1} \alpha + \int_{t_0}^t \Phi_A(t, \rho(s)) \mu f(s, \bar{x}(s)) \nabla s \\
&\quad - \Phi_A(t, t_0) D^{-1} N \left[\int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t, \rho(s)) \mu f(s, \bar{x}(s)) \nabla s \right]
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu şekilde istediğimiz sonuç elde edilir.

Eğer (i) de ψ en fazla lineer artan ise ve Gronwall eşitsizliği kullanılırsa, o zaman teorem 5.2. ye benzer bir başka sonuç elde edilebilir.

5.3. Teorem

$A:[t_0, t_1] \rightarrow B(R^n)$ ld-sürekli, regresif ve $f:[t_0, t_1] \times R^n \rightarrow R^n$ fonksiyonu sürekli olsun. $\sup_{t \in [t_0, t_1]} \|\Phi_A(t, t_0)\| < \infty$ ve $D = M \Phi_A(t_0, t_0) + N \Phi_A(t_1, t_0)$ singüler olmayan matris olsun.

(i) Bir sürekli, azalmayan $\psi:[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu herhangi bir $x \in B[t_0, t_1]$ ve $s \in B[t_0, t_1]$ için, $\|f(s, x(s))\| \leq r(s) \psi(\|x(s)\|) + q(s)$, $r(s) \geq 0$, $q(s) \geq 0$ eşitsizliği vardır.

(ii) $\left\{ \begin{array}{l} \exists b:[t_0, t_1] \rightarrow [0, \infty) \text{ ve } K > 0 \text{ herhangi bir } s \in [t_0, t_1] \text{ için,} \\ \|\Phi_A(t, \rho(s))\| \leq Kb(s) \text{ herhangi bir } t \in [t_0, t_1] \text{ için} \end{array} \right.$.

(iii) $\int_{t_0}^{t_1} b(s) r(s) \nabla s \equiv W_0 < \infty$.

(iv) $\int_{t_0}^{t_1} b(s) q(s) \nabla s \equiv P_0 < \infty$

(v) $\mu E_3 \left(1 + \mu K \sup_{t \in [t_0, t_1]} \int_{t_0}^{t_1} b(s) r(s) \hat{e}_C(t, \rho(s)) \nabla s \right) < 1$, $\mu \geq 0$

Burada $C = \mu K b(s) r(s)$ ve $E_3 = Q \|G^{-1}\| \|N\| K W_0$ dır.

Böylece Eş.5.5 ve Eş.5.6 den herhangi $\alpha \in R^n$ için $B[t_0, t_1]$ da bir çözümü vardır.

İspat

$T : D[t_0, t_1] \rightarrow D[t_0, t_1]$ operatörü teorem 5.2. deki operatör olsun. Aslında teorem 5.2. deki benzer sonuçlar $T : D[t_0, t_1] \rightarrow D[t_0, t_1]$ fonksiyonun sürekliliğini ve tamamen sürekli olduğunu garanti eder. Şimdi $\bar{x}(t) = \lambda T(\bar{x})(t)$ denkleminin çözümü $\lambda \in (0, 1)$ için $D[t_0, t_1]$ da olsun. O zaman $t \in [t_0, t_1]$ için

$$\begin{aligned} \|x(t)\| \leq & Q \|D^{-1}\| \|\alpha\| + \mu K \int_{t_0}^{t_1} b(s) [r(s) \|x(s)\| + q(s)] \nabla s \\ & + \mu Q \|D^{-1}\| \|N\| + [W_0 \|\bar{x}\|_{D[t_0, t_1]} + P_0], \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} \|x(t)\| \leq & \left[Q \|D^{-1}\| \|\alpha\| + \mu K P_0 + \mu E_3 \|\bar{x}\|_{D[t_0, t_1]} + \mu Q \|D^{-1}\| \|N\| K P_0 \right] \\ & + \mu K \int_{t_0}^t b(s) r(s) \|x(s)\| \nabla s. \end{aligned}$$

Gronwal eşitsizliğinden,

$$\|x(t)\| \leq (E_4 + \mu E_5 + E_3 \|\bar{x}\|_{D[t_0, t_1]}) (1 + \mu K \int_{t_0}^t b(s) r(s) e_c(t, \rho(s)) \nabla s)$$

elde edilir. Burada $E_4 = Q \|D^{-1}\| \|\alpha\|$ ve $E_5 = K P_0 + Q \|D^{-1}\| \|N\| K P_0$. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} \|\bar{x}\|_{D[t_0, t_1]} \left\{ 1 - \mu E_3 (1 + \mu K \sup_{t \in [t_0, t_1]} \int_{t_0}^{t_1} b(s) r(s) e_c(t, \rho(s)) \nabla s) \right\} \\ \leq (E_4 + \mu E_5) \left\{ (1 + \mu K \sup_{t \in [t_0, t_1]} \int_{t_0}^{t_1} b(s) r(s) e_c(t, \rho(s)) \nabla s) \right\} \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \|\bar{x}\|_{D[t_0, t_1]} &\leq \frac{(E_4 + \mu E_5)(1 + \mu K \sup_{t \in [t_0, t_1]} \int_{t_0}^{t_1} b(s) r(s) e_C(t, \rho(s)) \nabla s)}{\left\{ 1 - \mu E_3 (1 + \mu K \sup_{t \in [t_0, t_1]} \int_{t_0}^{t_1} b(s) r(s) e_C(t, \rho(s)) \nabla s) \right\}} \\ &\equiv M . \end{aligned}$$

yazılır. Eğer $M_0 = M + 1$ ve Teorem 5.1 de

$$U = \left\{ \bar{x} \in D[t_0, t_1] : \|\bar{x}\|_{D[t_0, t_1]} < M_0 \right\}, \quad C = E = D[t_0, t_1]$$

alınırsa, Eş.5.9 dan dolayı (ii) şartı sağlanamaz. Bu nedenle T nin bir $\bar{x}$ sabit noktası olacaktır. Yani $\|\bar{x}\|_{D[t_0, t_1]} < M_0$ olmak üzere $\bar{x}(t) = T(\bar{x})(t)$ dır. Teoremin kalan ispatı

Teorem 5.2 deki gibi kullanılarak ispat tamamlanır.

6. ZAMAN SKALASINDA LİNEER KISIMLI ZAMANLA DEĞİŞEN DİNAMİK SİSTEMLERİN DÜZGÜN VE ASİMTOTİK KARARLILIĞI

6.1. Kararlılık Perturbe Durumu

Genelde düzgün kararlı olan bir lineer durum denklemin başka bir durum denklemine çok yakın olduğu zaman incelenmesinde fayda vardır. [16] dan eğer 2.8 kısmında Eş. 2.28 homogen denklem sisteminin kararlılığı uygun Lyapunov fonksiyonun yardımıyla belirlenebilirse, o zaman $F(t)$ perturbe matrisi belli koşullar altında perturbe lineer sistemdin kararlılığı garanti eder.

$$z^{\Delta}(t) = [A(t) + F(t)] z(t), z(t_0) = z_0 \quad t \geq t_0. \quad (6.1)$$

6.1. Teorem

Eş. 2.4.1 lineer durum denklemin düzgün kararlı olsun. Eğer bir $\beta \geq 0$ ve her τ için

$$\int_{\tau}^{\infty} \|F(s)\Delta s\| \leq \beta. \quad (6.2)$$

şartı sağlanıyorsa, o zaman Eş. 6.1 de perturbe lineer dinamik denklemi düzgün kararlıdır.

İspat

Teorem 1.6 dan Eş. 6.1 in çözümü her hangi bir t_0 ve $z(t_0) = z_0$ için,

$$z(t) = \Phi_A(t, t_0) z_0 + \int_{t_0}^t \Phi_A(t, \sigma(\tau)) F(\tau) z(\tau) \Delta \tau \quad (6.3)$$

biçimindedir. Burada $\Phi_A(t, t_0)$ Eş. 2.4.1 sistemin temel (geçiş) matrisidir. Eş. 2.4.1 nin düzgün kararlı olduğundan, sabit bir $\gamma > 0$ katsayısı, herhangi bir $t, \tau \in T$ ve $t \geq \tau$ için $\|\Phi_A(t, t_0)\| \leq \gamma$ yazılabilir. Eş. 6.3 den her iki tarafından normu alınırsa

$$\|z(t)\| = \gamma \|z_0\| + \int_{t_0}^t \gamma \|F(\tau)\| \|z(\tau)\| \Delta \tau, \quad t \geq t_0.$$

elde edilir. [1] de Gronwall eşitsizliğinden, [3] un bir sonucundan ve Eş. 6.2 nin eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \|z(t)\| &\leq \gamma \|z_0\| e_{\gamma \|F(s)\|}(t, t_0) \\ &= \gamma \|z_0\| \exp\left(\int_{t_0}^t \frac{\text{Log}(1 + \mu(s)\gamma \|F(s)\|)}{\mu(s)} \Delta s\right) \\ &\leq \gamma \|z_0\| \exp\left(\int_{t_0}^{\infty} \frac{\text{Log}(1 + \mu(s)\gamma \|F(s)\|)}{\mu(s)} \Delta s\right) \\ &\leq \gamma \|z_0\| \exp\left(\int_{t_0}^{\infty} \gamma \|F(s)\| \Delta s\right) \\ &\leq \gamma \|z_0\| e^{\gamma \beta}, \quad t \geq t_0 \end{aligned}$$

elde edilir. γ , herhangi bir t_0 ve $z(t_0)$ için kullandığından, Eş. 6.3 nin durum denklemi düzgün kararlıdır.

6.2. Lineer Olmayan Durumunda Kararlılık

Lineer olmayan sistemlerin davranışları lineer benzer (psedulinearwise) sistemlere kısıtlama yapılabilir. Ayrıca uygun durumlarda yerel davranışlar için de kullanılır. Bu durumlarda,

$$x^\Delta(t) = A(t)x(t) + F(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0 \quad (6.4)$$

sistemleri göze alabiliriz.

Herhangi bir t_0 ve $x(t_0) = x_0$ için, Teorem 1.6. dan Eş. 6.3 ün çözümü

$$x(t) = \Phi_A(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi_A(t, \sigma(s))F(s, x(s))\Delta s, t \geq t_0 \quad (6.5)$$

olur.

6.2. Teorem

$A : [t_0, \infty)_T \rightarrow B(R^{n \times n})$ zamanla değişen matrisi sınırlı, sağdan sürekli, regresif ve

$$x^\Delta(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in T \quad (6.6)$$

lineer denklemi düzgün kararlı olsun. Bu taktirde

(i) $\|F(t, x(t))\| \leq r(t) \|x(t)\|$ bir pozitif fonksiyon $r : T \rightarrow R$ için ve her hangi bir $t \in [t_0, \infty)_T$ sağlar

$$(ii) \int_{t_0}^{+\infty} r(s)\Delta s \equiv W_0 < \infty$$

şartları sağlanırsa, Eş. 6.4 sistemi düzgün kararlıdır.

İspat

Teorem 1.7 den Eş. 6.4 ün çözümü herhangi bir t_0 ve $z(t_0) = z(t_0)$ için Eş. 6.5 biçiminde yazılabilir. Burada $\Phi_A(t, t_0)$, Eş. 6.6 sistemin temel (geçiş) matrisidir. Eş.

6.6 in düzgün kararlılığından, bir sabit katsayı $\gamma_1 > 0$, herhangi bir $t, \tau \in T$ ve $t \geq \tau$ için. $\|\Phi_A(t, \tau)\| \leq \gamma_1$ dır. Eş. 6.5 in her iki tarafından norm alınırsa

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \gamma_1 \|x_0\| + \int_{t_0}^t \gamma_1 \|F(s, x(s))\| \Delta s, t \geq t_0 \\ &\leq \gamma_1 \|x_0\| + \int_{t_0}^t \gamma_1 r(s) \|x(s)\| \Delta s \end{aligned} \quad (6.7)$$

elde edilir. [1] de Gronwall eşitsizliğinden, [3] un bir sonucundan ve Eş. 6.7 eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} &\leq \gamma_1 \|x_0\| e_{\gamma_1 r(s)}(t, t_0) \\ &= \gamma_1 \|x_0\| \exp\left(\int_{t_0}^t \frac{\text{Log}(1 + \mu(s) \gamma_1 r(s))}{\mu(s)} \Delta s\right) \\ &\leq \gamma_1 \|x_0\| \exp\left(\int_{t_0}^t \gamma_1 r(s) \Delta s\right) \\ &\leq \gamma_1 \|x_0\| e^{\gamma_1 w_0} \end{aligned}$$

bulunur. Eğer $\gamma = \gamma_1 e^{\gamma_1 w_0}$ alınırsa ve γ herhangi bir t_0 ve $x(t_0)$ kullanılırsa, Eş. 6.4 denklemi düzgün kararlıdır.

6.3. Teorem

$A : [t_0, \infty)_T \rightarrow B(R^{n \times n})$ zamanla değişen matrisi sınırlı, sağdan sürekli, regresif ve Eş. 6.6 den lineer denklemi asimptotik kararlı, $\|x(t)\| \rightarrow 0$ düzgün sıfır olduğu zaman $\|F(t, x(t))\| = o(\|x(t)\|)$ olsun. O zaman Eş. 6.4 den asimptotik kararlıdır.

İspat

Eş. 4.1 de $x(t)$ çözümü $\|x(t_0)\|$ yeteri kadar küçük kalıyorsa, o zaman t arttırıldığında $\|x(t)\|$ yeteri kadar küçük kalsın. Eş. 6.5 in her iki tarafından norm alınır

$$\|x(t)\| \leq \|e_A(t, t_0)\| \|x_0\| + \int_{t_0}^t \|e_A(t, \sigma(s))\| \|F(s, x(s))\| \Delta s \quad (6.8)$$

elde edilir. Eş. P.5 ikinci bölümden asimptotik kararlıdır. O zaman bir $\lambda, \gamma > 0$ ve $-\lambda \in \Re^+$ olmak üzere,

$$\|\Phi_A(t, t_0)\| = \|e_A(t, t_0)\| \leq \gamma e_{-\lambda}(t, t_0) \quad (6.9)$$

olur. Eş. 6.7 ve Eş. 6.8 leri kullanıldığında

$$\|x(t)\| \leq \gamma \|x_0\| e_{-\lambda}(t, t_0) + \gamma \int_{t_0}^t e_{-\lambda}(t, \sigma(s)) \|F(s, x(s))\| \Delta s \quad (6.10)$$

elde edilir. Böylece verilmiş $\varepsilon > 0$ için ε na bağlı bir δ sayısı vardır $\|x(t)\| < \delta$ olur.

Böylece $\|F(s, x(s))\| \leq \varepsilon \frac{\|x(s)\|}{\gamma}$ yazılabilir. Dolayısıyla $\|x(t)\| < \delta$ olduğundan, Eş.

$$6.10 \text{ den } e_{\lambda}(t, t_0) \|x(t)\| \leq \gamma \|x(t_0)\| + \varepsilon \int_{t_0}^t e_{\lambda}(s, t_0) \|x(s)\| \Delta s$$

elde edilir. Gronwall eşitsizliğinden

$$e_{\lambda}(t, t_0) \|x(t)\| \leq \gamma \|x(t_0)\| e_{\varepsilon}(t, t_0)$$

veya

$$\|x(t)\| \leq \gamma \|x(t_0)\| e_{-(\lambda-\varepsilon)}(t, t_0), t \geq t_0. \quad (6.11)$$

yazılır. Eğer $\varepsilon < \lambda$ seçilirse, hem $\|x(t)\| \leq \delta$ ve hem $\|x(t)\| \leq \frac{\delta}{\gamma}$ durumlarında Eş.

6.11 den $\|x(t)\| \leq \gamma \|x(t_0)\|$ bulunur. Dolayısıyla Eş. 6.11 herhangi bir $t \geq t_0$ için geçerlidir.

6.1. Not

Yukarıda bahsedilen konular Nabla biçiminde verilen sistemlere de benzer şekilde uygulanabilir.

7. SONUÇ

Zaman skalasında, dinamik sistemlerin çözümü çok noktalı sınır değer problem için Green fonksiyon metodu bir formal çözümdür, halbuki direkt metot bir algoritmik yöntemdir ve pratikte hesaplamalar daha kolay olur.

Zaman skalasında, lineer olmayan

$$y^{\nabla}(t)=A(t)y(t)+F(t,y(t)) \quad t \in [t_0, t_1]_T \quad (7.1)$$

$My(t_0)+Ny(t_1)=\alpha$ sınır şart için F fonksiyonun ve sistemin homogen kısmın temel matrisi (transition matrix) verilmiş uygun şartlar altında çözümün varlığı garanti olur. Lineer olmayan sistemlerin davranışlar lineer benzer (pseduelinearwise) sistemlere kısıtlama yapılabilir ve uygun durumlarda yerel davranışlar için kullanır. Bu taktirde Teorem 6.2 ve Teorem 6.3 şartlar altında Eş.7.1 sistemi sırayla düzgün kararlılık ve asimptotik kararlılık olduğu elde edilir. Bu özellikler nabla biçiminde verilen sistemlere de benzer şekilde uygulanabilir.

KAYNAKLAR

1. Bohner, M. and Peterson, A., "Dynamic Equations on Time Scales", **Birkhauser**, Boston (2001).
2. Bohner, M. and Peterson, A., "Advances in Dynamic Equations on Time Scales", **Birkhauser**, Boston (2003).
3. Lakshmikantham., Sivasundaram S., Kaymakalan B., "Dynamic Systems on Measure Chains", **Kluwer Academic Publishers**, The Netherland (1996).
4. Munkres, "Topology", **Prentice Hall**, Englewood Cliffs (1975).
5. Burton T. A., "Wolterra Integral and Differential Equations", **Academic Press**, London (1983).
6. W.Kelly, A. Peterson, "Difference Equations: An Introduction with Applications", **Harcourt/Academic Press**, Burlington (2001).
7. Herbert B.Keller, "Numerical Methods For Two-Point Boundary Value Problems", **Dover Pub.Inc.**, New York (1992).
8. Earl A. Coddington, Norman Levinson, "Theory of Ordinary Differential Equations", **McGraw-Hill**, Massachusetts (1955).
9. Kelley W., Peterson A., "The Theory of Differential Equations : classical and qualitative", **Pearson Prentice Hall** (2004).
10. Agarwal R. P., Meehan M., O'Regan D., "Fixed point theory and applications", **Cambridge Univ. Press** (2002).
11. Murty K.N., Rao Y. S., "Two-Point boundary value Problems in homogeneous time scale linear dynamic processes", **JMAA**, 184 :22-34 (1994).
12. Deo S. Murty K.N., Sivasundaram S., "Two-Point boundary value Problems associated with a system of Generalized Matrix Differential Equations", **Dynamic systems and Applications**, 10 :45-52 (2001).
13. DaCunha J.J., "Stability for time varying linear dynamic systems on time scales", **J. Comput. App. Math.**, 176 :381-410 (2005).
14. Sayan H.H., "Numerical solutions by Guaranteed Accuracy Method of Two-Point boundary value problem for O.D.E. System with constant coefficients", Ph.D. thesis, **Ankara University** (1999).

15. Doğan N., “Numerical solutions by Guaranteed Accuracy Method of Two point Boundary value problem for ordinary discrete equation system with constant coefficients”, Ph.D. Thesis, **Ankara University** (1999).
16. Rugb W.J., “Linear system theory”, **Prentice-Hall**, Englewood Cliff (1996).
17. Agarwal R. P., Bohner, M., O'Regan D., “Time Scale Systems on infinite intervals”, **Nonlinear Analysis**, 47 :837-848 (2001).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı :DASTCERDİ, Mohammed Tağı

Uyruğu : İRAN

Doğum tarihi ve yeri : 13.07.1962 Tahran

Medeni hali : Evli

Telefon : 0555 371 67 44

e-mail : tdast@yahoo.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Doktora	Gazi Üniversitesi /Matematik Bölümü	2006
Yüksek lisans	Tarbiyet moallem Ün/ Matematik Bölümü Tahran/İRAN	1991
Lisans	Ferdowsi meşhad Ün/ Matematik Bölümü Meşhad/İRAN	1987
Lise	Ş.Bahoner Lisesi /Tahran/İRAN	1980

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
1991-2006	Zencan Üniversitesi/İRAN	Öğretim Üyesi

Yabancı Dil

İngilizce, Fransca

Hobiler

Futbol, Bilgisayar teknolojileri, Elektronik