

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN SKALASINDA KUASİLİNEERİZASYON METODU VE
MONOTON İTERATİF TEKNİK

DOKTORA TEZİ

Şahap ÇETİN

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

SUBAT 2025

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN SKALASINDA KUASİLİNEERİZASYON METODU VE
MONOTON İTERATİF TEKNİK

DOKTORA TEZİ

Şahap ÇETİN

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yalçın YILMAZ

Ortak Danışman: Prof. Dr. Coşkun YAKAR

ŞUBAT 2025

Şahap Çetin tarafından hazırlanan “Zaman Skalasında Kuasilineerizasyon Metodu ve Monoton İteratif Teknik” adlı tez çalışması 14.02.2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı **Uygulamalı Matematik** Bilim Dalı’nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Jüri Başkanı :	Prof. Dr. Metin YAMAN Sakarya Üniversitesi	
Jüri Üyesi :	Doç. Dr. Yalçın YILMAZ (Danışman) Sakarya Üniversitesi	
Jüri Üyesi :	Prof. Dr. Şevket GÜR Sakarya Üniversitesi	
Jüri Üyesi :	Doç. Dr. Hakan ADIGÜZEL Bursa Teknik Üniversitesi	
Jüri Üyesi :	Dr. Öğretim Üyesi Sertaç ERMAN Sakarya Uygulamalı Bilimler Üniversitesi	



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine ve Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesine uygun olarak hazırlamış olduğum “Zaman Skalasında Kuazilineerizasyon Metodu ve Monoton İteratif Teknik” başlıklı tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın tüm aşamalarında yukarıda belirtilen yönetmelik ve yönergeye uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, bu tezi başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve 20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince Sakarya Üniversitesi’nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Enstitü tarafından belirlenmiş ölçütlere uygun rapor alındığını, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun ortaya çıkması halinde doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi beyan ederim.

(14/02/2025)

Şahap ÇETİN





Ahmet Emin'ime...



TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca ve bu tez çalışmasının her anında rehberliğiyle, tecrübesiyle ve birikimiyle yanımda olan ve her türlü yardımı benden esirgemeyen kıymetli danışmanlarım Doç. Dr. Yalçın Yılmaz'a ve Prof. Dr. Coşkun Yakar'a teşekkürlerimi sunarım.

Tüm yaşamım boyunca her daim yanımda olan, manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen canım anneme ve babama ve kardeşlerime, ayrıca beni her zaman yüreklendiren, bana güvenen ve sabır gösteren kıymetli eşime teşekkürlerimi sunarım.

Umut, yaşam ve ilham kaynağım biricik oğlum Ahmet Emin'ime sevgilerimi sunarım.

Son olarak, doktora eğitimim süresince 2211-Yurt içi doktora bursu ile bu tezin oluşturulmasında maddi desteklerini esirgemeyen TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı'na ve gerek akademik teşvik gerek üniversitenin bütün imkanlarını sunan Sakarya Üniversitesi'ne en içten teşekkürlerimi sunarım.

Şahap Çetin

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	v
TEŞEKKÜR.....	ix
İÇİNDEKİLER.....	xi
SİMGELER.....	xiii
ÖZET	xv
SUMMARY.....	xvii
1. GİRİŞ	1
1.1. Tezin Amacı ve Literatür Taraması.....	1
2. ZAMAN SKALASI.....	3
2.1. Temel Tanımlar.....	3
2.2. Diferansiyellenebilme.....	5
2.3. İntegrallenebilme.....	11
3. ÖN BİLGİLER.....	17
3.1. Çözümlerin Varlık ve Tekliği	17
3.2. Dinamik Eşitsizlikler	19
3.3. Ekstremal Çözümler	24
3.4. Alt ve Üst Çözümler.....	27
4. ZAMAN SKALASINDA MONOTON İTERATİF TEKNİK	35
4.1. Giriş	35
4.2. Genelleştirilmiş Monoton İteratif Teknik.....	38
5. ZAMAN SKALASINDA KUASİLİNEERİZASYON METODU	47
5.1. Giriş	47
5.2. Doğal Tipten Alt-Üst Çözüm Kullanılarak Kuasilineerizasyon Metodu	48
5.3. Farklı Tipten Alt-Üst Çözüm Kullanılarak Kuazilineerizasyon Metodu	114
6. TARTIŞMA VE SONUÇLAR.....	133
KAYNAKLAR.....	135
ÖZGEÇMİŞ	137



SİMGELER

$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{T}$	: Zaman skalası
ρ	: Geri sıçrama operatörü
σ	: İleri sıçrama operatörü
C_{rd}	: Sağ-yoğun sürekli (rd-sürekli) fonksiyonların sınıfı
$\int f(t)\Delta t$	: f fonksiyonunun Δ -integrali
f^Δ	: f fonksiyonunun Δ -türevi
μ^*	: Graininess fonksiyonu
$\circ$	: Bileşke gösterimi
BDP	: Başlangıç Değer Problemi
KY	: Kuasilineerizasyon Yöntemi
MİT	: Monoton İteratif Teknik



ZAMAN SKALASINDA KUAZİLİNEERİZASYON METODU VE MONOTON İTERATİF TEKNİK

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Zaman skalası, Dinamik denklemler, Kuasilineerizasyon metodu, Monoton iteratif teknik, Karşılaştırma teoremleri, Üst ve alt çözüm çiftleri, Ekstremal çözümler.

Bu tez beş bölümden oluşmuştur. Tezin birinci bölümünde, zaman skalasının önem ve tarihinden ve bu konudaki günümüze kadar yapılmış olan çalışmaların tarihi gelişiminden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, zaman skalası analizi tanıtılmış ve zaman skalasında temel kavramlar verilerek zaman skalasında türev ve integralin temel teorem ve ispatları incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, varlık ve teklik teoremi, dinamik eşitsizlikler, Lipschitz koşulu, ekstremal çözümlerin varlığı, alt ve üst çözüm çiftlerinin tanımı, ispatlarda sıkça kullanılan karşılaştırma teoremleri ve Arzela-Ascoli teoremi verilmiştir.

Çalışmanın dördüncü bölümde,

$$u^A = f(t, u) + g(t, u) - h(t, u), u(0) = u_0$$

başlangıç değer problemi ele alındı. Burada

$$\Omega_0 = \{(t, u) : \alpha_0(t) \leq u \leq \beta_0(t) \ t \in T\}$$

olmak üzere, $\alpha_0(t), \beta_0(t) \in C_{rd}[T, R]$ ve $\alpha_0(t) \leq \beta_0(t)$ ve $f(t, u), g(t, u), h(t, u) \in C[\Omega_0, R]$ dır.

Zaman skalasında monoton iteratif tekniğiyle alt ve üst çözüm çiftleri kullanılarak çözümlere monoton iterasyonlar yapıp ele alınan problemin ekstremal çözümlerine düzgün ve monoton yakınsayan diziler elde edildi.

Beşinci bölümde

$$u^A = f(t, u) + g(t, u) + h(t, u), u(0) = u_0$$

başlangıç değer problemini ele alındı. Burada

$$\Omega_0 = \{(t, u) : \alpha_0(t) \leq u \leq \beta_0(t) \ t \in T\}$$

ve $\alpha_0(t), \beta_0(t) \in C_{rd}[T, R]$ olmak üzere $\alpha_0(t) \leq \beta_0(t)$ ve $f(t, u), g(t, u), h(t, u) \in C[\Omega_0, R]$ dır.

Zaman skalasında dinamik denklemin lineer olmayan başlangıç değeri problemi için bazı uygun koşullar altında genelleştirilmiş kuasilineerizasyon metodu araştırıldı ve karşılaştırma teoremi kullanılarak monoton diziler oluşturuldu. Elde edilen dizilerin ele alınan bu problemin tek çözümüne düzgün ve monoton olarak yakınsadıkları gösterildi. Fonksiyonların şartları değiştirildiğinde bu yakınsama hızının da değiştiği gözlemlenmiştir. Önce alt-üst çözüm çiftleri doğal tipten alınıp problemdeki fonksiyonlara farklı şartlar atayarak yakınsamanın kuadratik, yarı kuadratik veya zayıf kuadratik olduğu durumlar elde edildi. Daha sonra VII. tipten alt-üst çözüm çiftleri kullanılarak yakınsama hızı tespit edildi.



QUASILINEARIZATION METHOD AND MONOTONE ITERATIVE TECHNIQUE ON TIME SCALE

SUMMARY

Keywords: Time scale, Dynamic equations, Quasilinearization method, Monotone iterative technique, Comparison theorems, Coupled upper and lower solutions, Extremal solutions.

This thesis consists of five chapters. In the first chapter of the thesis, the importance and history of time scale and the historical developments of the studies on this subject until today are mentioned.

In the second chapter, time scale analysis is introduced and fundamental definitions and theorems and proofs of derivative and integral on time scale are examined by giving the basic concepts on time scale.

In the third chapter, the existence and uniqueness theorems, dynamic inequalities, the Lipschitz condition, the existence of extremal solutions, and definitions of coupled lower and upper solutions, comparison theorems frequently used in proofs and Arzela-Ascoli theorem are given.

In fourth chapter of the study, we consider the following non-linear initial value problem

$$u^\Delta = f(t, u) + g(t, u) - h(t, u), u(0) = u_0$$

where

$$\Omega_0 = \{(t, u) : \alpha_0(t) \leq u \leq \beta_0(t) \ t \in T\}$$

and $\alpha_0(t), \beta_0(t) \in C_{rd}[T, R]$, $\alpha_0(t) \leq \beta_0(t)$ and $f(t, u), g(t, u), h(t, u) \in C[\Omega_0, R]$.

Monotone iterations have been applied to the solutions using coupled lower and upper solutions on time scale and it has been observed that the sequences converged uniformly and monotonically to the extremal solutions of initial value problem. Lower and upper solution of type III of given above problem was discussed in the proof as follow, respectively:

$$\alpha_0^\Delta \leq f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) - h(t, \beta_0),$$

$$\beta_0^\Delta \geq f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) - h(t, \alpha_0).$$

Furthermore, coupled solution of type III is as follows:

$$v^\Delta(t) = f(t, v(t) + g(t, v(t)) - h(t, w(t)), v(0) = v_0,$$

$$w^\Delta(t) = f(t, w(t) + g(t, w(t)) - h(t, v(t)), w(0) = w_0.$$

The sequences $\{\alpha_m(t)\}$ and $\{\beta_m(t)\}$ converge to ρ and r respectively, where ρ, r are the coupled of minimal and maximal solutions type III of the problem and satisfied the following system:

$$\rho^\Delta = f(t, \rho) + g(t, \rho) - h(t, r), \rho(0) = u_0,$$

$$r^\Delta = f(t, r) + g(t, r) - h(t, \rho), r(0) = u_0.$$

In this chapter, we gave a numerical example that satisfies the conditions of the theorem.

In the fifth chapter, starting from the question of whether it is possible to improve monotone sequences that converge to a solution of the original problem, we extended to a large class by generalized quasilinearization. We consider given below non-linear initial value problem

$$u^\Delta = f(t, u) + g(t, u) + h(t, u), u(0) = u_0.$$

where

$$\Omega_0 = \{(t, u) : \alpha_0(t) \leq u \leq \beta_0(t) \ t \in T\}$$

$$\alpha_0(t), \beta_0(t) \in C_{rd}[T, R], \alpha_0(t) \leq \beta_0(t) \text{ and } f(t, u), g(t, u), h(t, u) \in C[\Omega_0, R].$$

We have investigated the generalized quasilinearization method under some convenient conditions for nonlinear initial value problem of dynamic equation on time scale and constructed by monotone sequences of function by using comparison theorem. The elements of the sequences are the solutions of the following linear system:

$$\alpha_{n+1}^\Delta = w(t, \alpha_n, \beta_n; \alpha_{n+1}), \alpha_{n+1}(0) = u_0,$$

$$\beta_{n+1}^\Delta = W(t, \alpha_n, \beta_n; \beta_{n+1}), \beta_{n+1}(0) = u_0.$$

Using coupled lower and upper solutions, it has been shown that the obtained sequences converge uniformly and monotonically to the unique solution of the problem. Also it has been observed that the convergence rate also changes when the conditions of the functions are changed. Firstly, by taking the natural type coupled lower-upper solution and assigning different conditions to the functions in the problem, cases where the convergence is quadratic, semi-quadratic or weakly quadratic were obtained. The natural lower and upper solution of given problem was discussed in the proof as follow:

$$\alpha_0^\Delta \leq f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) + h(t, \alpha_0),$$

$$\beta_0^\Delta \geq f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) + h(t, \beta_0).$$

Then, in another theorem, using lower-upper solution of type VII given below:

$$\alpha_0^\Delta \leq f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) + h(t, \beta_0),$$

$$\beta_0^\Delta \geq f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) + h(t, \alpha_0)$$

and considering the following inequalities

$$f(t, u) \leq f(t, v) + f_u(t, u)(u - v),$$

$$g(t, u) \leq g(t, v) + [g_u(t, u) + \varphi_u(t, u)](u - v)$$

$$-[\varphi(t, u) - \varphi(t, v)],$$

$$h(t, u) \leq h(t, v) + h_u(t, v)(u - v)$$

it was observed that the monotone sequences converge to the unique solution of the original problem uniformly and monotonically. Furthermore, we observed that this convergence is quadratic. We also observed that similar results were obtained in parallel with the results given by the classical derivative. The novelty of the applied quasilinearization method is the change in the convergence speed under different conditions.



1. GİRİŞ

1.1. Tezin Amacı ve Literatür Taraması

Bu tezin amacı, beşinci bölümde ele alınan lineer olmayan

$$u^A = f(t, u) + g(t, u) + h(t, u), u(0) = u_0. \quad (1.1)$$

başlangıç değeri probleminin tek çözümüne zaman skalasında düzgün ve monoton yakınsayan, alt ve üst çözümler yöntemi yardımıyla kuasilineerizasyon tekniği uygulanarak monoton diziler elde etmektir. Buna ek olarak problemi oluşturan fonksiyonlara yeni ve uygun şartlar atayarak bu yakınsamanın hızı incelenmiştir. Yakınsama hızının bazı durumlarda kuadratik, bazı durumlarda yarı kuadratik, bazı durumlarda ise zayıf kuadratik olduğu gözlemlenmiştir. Dördüncü bölümde ise lineer olmayan

$$u^A = f(t, u) + g(t, u) - h(t, u), u(0) = u_0 \quad (1.2)$$

başlangıç değeri problemi için monoton iteratif teknik yardımıyla çözümler için varlık sonuçları incelendi. Alt ve üst çözümler yardımıyla zaman skalasında başlangıç değeri problemiyle dinamik sistemlerin çözümlerine monoton iterasyonlar yapılarak monoton diziler elde edildi ve bu dizilerin zaman skalasında ele alınan problemin ekstremal çözüm çiftlerine düzgün ve monoton olarak yakınsadıkları gösterildi.

Zaman skalası teorisi, ilk olarak ayrık ve sürekli analizi birbirine bağlamak için 1990 yılında Stefan Hilger tarafından ortaya atılmıştır. Zaman skalası, tam sayılar kümesi olarak seçildiğinde dinamik denklem, fark denklemi görevi görür. Fakat gerçekte sayılar olarak seçildiğinde ise dinamik denklem, diferansiyel denklem işlevi sunar. Ana düşünce, bilinmeyen fonksiyonun tanım kümesi zaman skalası olarak bilinen reel sayıların herhangi boş olmayan kapalı bir alt kümesi olarak alındığında dinamik denklem için bir sonuç göstermektir. Zaman skalasında dinamik denklemler çalışmaları birçok araştırmacının ilgi alanına girdiği çok ilginç bir araştırma alanıdır. Son yıllarda birçok çalışma, kitap ve makaleler tartışıldı ve ilginç sonuçlar ortaya çıktı.

Monoton iteratif teknik olarak bilinen metot, lineer olmayan diferansiyel denklemlerin varlık sonuçlarını kanıtlamak için etkili ve esnek bir yöntemdir. Bu metot, Bhaskar (2002) ve West (2004) tarafından geliştirildi. Ramirez ve Vatsala (2012) bu çalışmayı Caputo kesirli diferansiyel denklemlere genişletti. Kaymakçalan ve Lawrence, bir başlangıç değeri problemi için klasik metotla monoton iteratif tekniğini kullandılar (Kaymakçalan ve Lawrence, 2003). Denton ve Vatsala (2011) lineer olmayan Riemann-Liouville kesirli diferansiyel denklemin karşılaştırma sonuçlarını sundu.

Kuazilineerizasyon metodunun amacı, yardımcı lineer diferansiyel denklemler oluşturarak lineer olmayan bir problemin tek çözümüne düzgün ve monoton yakınsayan monoton diziler elde etmektir. Elde edilecek monoton dizilerin elemanlarından her biri oluşturulan bu lineer diferansiyel denklemlerin çözümleridir. Bu konu ile ilgili yapılmış olan çalışmalar incelenirse, ilk olarak Bellman ve Kalaba (1965) nın çalışmaları karşımıza çıkar. Yazarlar, kuazilineerizasyon metodu ile sınır değeri problemleriyle alakalı çalışmalar yaptı. Lakshmikantham, Leela, Vatsala gibi birçok yazar bu metodu yaygın olarak geliştirdi.

2. ZAMAN SKALASI

2.1. Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1. Reel sayıların boş olmayan keyfi kapalı bir alt kümesine zaman skalası adı verilir. Örneğin; $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ kümeleri sırasıyla reel sayılar, tamsayılar, doğal sayılar ve negatif olmayan tamsayılar zaman skalasına birer örnektir. Buna ek olarak $[1,2] \cup [3,4]$ kümesi zaman skalası iken $(2,3), [1,3), (-1,0]$ kümeleri ve $\mathbb{Q}, \mathbb{C}$ zaman skalası değildir. Zaman skalası için en yaygın kullanılan gösterim $\mathbb{T}$ sembolüdür.

Tanım 2.1.2. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere $t \in \mathbb{T}$ için ileri sıçrama operatörü

$$\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}, \sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T}, s > t\} \quad (2.1)$$

ve geri sıçrama operatörü

$$\rho: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}, \rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T}, s < t\} \quad (2.2)$$

ile tanımlanır. μ , Graininess (tanecikli) fonksiyon olmak üzere

$$\mu: \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty) = \sigma(t) - t \quad (2.3)$$

ile tanımlanır. Ayrıca

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T} - \{m\}, & \mathbb{T} \text{ sol saçılmış bir maksimum } m \text{ noktasına sahipse} \\ \mathbb{T}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (2.4)$$

kümesi $\mathbb{T}$ de türevlenebilme bölgesi olarak adlandırılır. Son olarak $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $t \in \mathbb{T}$ için, $f^\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f^\sigma(t) = f(\sigma(t))$ dır.

Tanım 2.1.3. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve σ, ρ sırasıyla ileri sıçrama ve geri sıçrama operatörleri olmak üzere aşağıdaki noktaları sınıflayalım.

$t \in \mathbb{T}$ olmak üzere;

- $\sigma(t) > t$ ise t , sağ saçılmış nokta,
- $\sigma(t) = t$ ise t , sağ yoğun nokta,
- $\rho(t) < t$ ise t , sol saçılmış nokta,
- $\rho(t) = t$ ise t , sol yoğun nokta,
- $\rho(t) < t < \sigma$ ise t , izole nokta,
- $\rho(t) = t = \sigma(t)$ ise t , noktası yoğun nokta adını alır (Bohner ve Peterson,2003).

Örnek 2.1.4. $\mathbb{T} = [1,2] \cup [3,4]$ zaman skalasını göz önüne alalım:

$t_1 = 1$ için $\sigma(1) = 1$ olduğundan $t_1 = 1$ sağ yoğun nokta,

$t_2 = 2$ için $\rho(2) = 2$ olduğundan $t_2 = 2$ sol yoğun nokta,

$\sigma(2) = 3$ olduğundan $t_2 = 2$ sağ saçılmış nokta,

$t_3 = 3$ için $\sigma(3) = 3$ olduğundan $t_3 = 3$ sağ yoğun nokta,

$\rho(3) = 2$ olduğundan $t_3 = 3$ sol saçılmış nokta,

$t_4 = 4$ için $\sigma(4) = 4$ ve $\rho(4) = 4$ olduğundan hem sağ yoğun hem sol yoğun noktadır. O halde $t_4 = 4$ noktası yoğun nokta adını alır.

Örnek 2.1.5. Şimdi literatürde en çok kullanılan zaman skalasının $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olduğu durumlarda ileri sıçrama, geri sıçrama ve Graininess (tanecikli) fonksiyonunu inceleyelim.

- $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alındığında her $t \in \mathbb{R}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{R}, s > t\} = \inf(t, \infty) = t \quad (2.5)$$

ve

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{R}, s < t\} = \sup(-\infty, t) = t \quad (2.6)$$

olur. Böylece $\rho(t) = t = \sigma(t)$ olduğundan her $t \in \mathbb{R}$ noktası yoğun noktadır ve dolayısıyla Graininess fonksiyonu

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = 0 \quad (2.7)$$

dır.

- $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alındığında ise her $t \in \mathbb{Z}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z}, s > t\} = \inf\{t+1, t+2, t+3, \dots\} = t+1 \quad (2.8)$$

ve

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{Z}, s < t\} = \sup\{\dots, t-3, t-2, t-1\} = t-1 \quad (2.9)$$

olur.

$\rho(t) < t < \sigma$ olduğundan her $t \in \mathbb{Z}$ noktası izole noktadır ve dolayısıyla Graininess fonksiyonu

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t+1 - t = 1 \quad (2.10)$$

olur.

Görüldüğü gibi yukarıda incelenen her iki durumda da Graininess fonksiyonu sabit fonksiyon olarak karşımıza çıktı. Bu fonksiyon zaman skalası analizinde önemli bir rol oynar ve pek çok formülde $\mu(t)$ çarpanını içeren terimler vardır.

2.2. Diferansiyellenebilme

Tanım 2.2.1. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için t nin en az bir $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}, \delta > 0$ komşuluğundaki her $s \in U$ için

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s| \quad (2.11)$$

olacak şekilde $f^\Delta(t)$ sayısı mevcut ise bu sayıya f fonksiyonunun t noktasındaki delta türevi veya Hilger türevi denir. Eğer her $t \in \mathbb{T}^k$ için $f^\Delta(t)$ mevcut ise f ye $\mathbb{T}^k$ kümesinde delta türevlenebilirdir denir (Bohner ve Peterson, 2003).

Teorem 2.2.2. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. Bu durumda aşağıdaki sonuçlar yazılabilir:

1. Eğer f fonksiyonu t noktasında delta türevlenebilirse o zaman f, t de süreklidir.
2. Eğer f fonksiyonu t de sürekli ve t sağ saçılmış bir nokta ise ($\sigma(t) > t$), o zaman f fonksiyonu t de delta türevlenebilirdir ve

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} \quad (2.12)$$

şeklindedir.

3. Eğer t sağ yoğun nokta ise ($\sigma(t) = t$) o zaman f fonksiyonu t de delta türevlenebilirdir ve

$$f^\Delta(t) = f'(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \quad (2.13)$$

dır.

4. Eğer f fonksiyonu t noktasında türevlenebilir ise

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^\Delta(t) \quad (2.14)$$

dir (Bohner ve Peterson, 2003).

Örnek 2.2.3. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{Z}$ olma durumlarını ele alalım:

- Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olursa,

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

klasik türev olur.

- Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olursa,

$$\begin{aligned} f^\Delta(t) &= \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu^*(t)} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) \\ &= \Delta f(t) \end{aligned}$$

fark denklemi elde edilir. Aşağıdaki örneklerde bazı fonksiyonların delta türevlerini hesaplayacağız.

Örnek 2.2.4. Her $t \in \mathbb{T}$ için f fonksiyonu $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

- $f(t) = c$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $f^\Delta(t) = 0$,
- $f(t) = t$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $f^\Delta(t) = 1$
- $f(t) = t^2$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $f^\Delta(t) = \sigma(t) + t$,
- $f(t) = t^3$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $f^\Delta(t) = \sigma^2 + \sigma t + t^2$,

olduğunu gösterelim:

Her $\epsilon > 0$ için

i.

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon |\sigma(t) - s|$$

$$|(c - c) - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon |\sigma(t) - s|$$

$$|f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon |\sigma(t) - s|$$

tüm $s \in \mathbb{T}$ için sağlandığından $f^\Delta(t) = c$ olur.

ii.

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon |\sigma(t) - s|$$

$$|(\sigma(t) - s) - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon |\sigma(t) - s|$$

$$|(\sigma(t) - s)| |1 - f^\Delta(t)| \leq \epsilon |\sigma(t) - s|$$

tüm $s \in \mathbb{T}$ için sağlandığından $f^\Delta(t) = 1$ olur.

iii.

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon |\sigma(t) - s|$$

$$|[\sigma^2(t) - s^2] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon |\sigma(t) - s|$$

$$|\sigma(t) - s| |\sigma(t) + s - f^\Delta(t)| \leq \epsilon |\sigma(t) - s|$$

tüm $s \in \mathbb{T}$ için sağlandığından $f^\Delta(t) = \sigma(t) + t$ olur.

iv.

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon |\sigma(t) - s|$$

$$|[\sigma^3(t) - s^3] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon |\sigma(t) - s|$$

$$|\sigma(t) - s| |\sigma^2(t) + \sigma(t)s + s^2 - f^\Delta(t)| \leq \epsilon |\sigma(t) - s|$$

tüm $s \in \mathbb{T}$ için sağlandığından $f^\Delta(t) = \sigma^2 + \sigma t + t^2$ olur.

Ayrıca bu ispatlar (2.12) ve (2.13) eşitlikleri kullanılarak da gösterilebilir. (iii) yi bu yöntemle gösterelim. Bunun için t sağ saçılmış bir nokta ve sağ yoğun nokta olarak ele alındığında sırasıyla,

- Eğer t sağ saçılmış nokta ise,

$$\begin{aligned} f^\Delta(t) &= \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{\sigma(t)^2 - t^2}{\sigma(t) - t} = \frac{(\sigma(t) - t)(\sigma(t) + t)}{\sigma(t) - t} \\ &= \sigma(t) + t \end{aligned} \quad (2.15)$$

- Eğer t sağ yoğun nokta ise,

$$f^\Delta(t) = f'(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = 2t = t + t = \sigma(t) + t \quad (2.16)$$

Teorem 2.2.5. (Bohner ve Peterson,2003) $f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}^k$ da delta türevlenebilir olsun. O zaman

i.

$$(f \pm g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) \pm g^\Delta(t). \quad (2.17)$$

ii. Herhangi bir $\alpha \in \mathbb{R}$ sabiti için

$$(\alpha f)^\Delta(t) = \alpha f^\Delta(t). \quad (2.18)$$

iii.

$$(fg)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t)$$

$$= f(t)g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g(\sigma(t)). \quad (2.19)$$

iv. Eğer $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$ ise

$$\left(\frac{1}{f}\right)^\Delta(t) = -\frac{f^\Delta(t)}{f(t)f(\sigma(t))}. \quad (2.20)$$

v. Eğer $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$ ise

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))}. \quad (2.21)$$

Şimdi zaman skalasında ortalama değer teoreminin de olduğu delta türevine ilişkin bazı teoremleri vereceğiz.

Teorem 2.2.6. $f, [a, b]$ nin her noktasında delta türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f(a) = f(b)$ ise o zaman $\xi_1, \xi_2 \in [a, b]$ vardır öyle ki $f^\Delta(\xi_2) \leq 0 \leq f^\Delta(\xi_1)$ dir.

İspat. $f, [a, b]$ nin her noktasında delta türevlenebilen bir fonksiyon olduğundan $f, [a, b]$ de süreklidir. Bu nedenle f nin $[a, b]$ de maksimum ve minimum değerleri vardır. $m = f(\xi_1) = \min f(t)$, $M = f(\xi_2) = \max f(t)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki durumlar ortaya çıkar:

- Eğer ξ_1 sağ saçılmış nokta ise,

$$f^\Delta(\xi_1) = \frac{f(\sigma(\xi_1)) - f(\xi_1)}{\sigma(\xi_1) - \xi_1} \geq 0,$$

- Eğer ξ_1 sağ yoğun nokta ise,

$$f^\Delta(\xi_1) = \lim_{t \rightarrow \xi_1} \frac{f(t) - f(\xi_1)}{t - \xi_1} \geq 0,$$

- Eğer ξ_2 sağ saçılmış nokta ise,

$$f^\Delta(\xi_2) = \frac{f(\sigma(\xi_2)) - f(\xi_2)}{\sigma(\xi_2) - \xi_2} \leq 0,$$

- Eğer ξ_2 sağ yoğun nokta ise,

$$f^\Delta(\xi_1) = \lim_{t \rightarrow \xi_1} \frac{f(t) - f(\xi_1)}{t - \xi_1} \leq 0$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.2.7. (Ortalama Değer Teoremi) f , $[a, b]$ de sürekli ve $[a, b)$ de delta türevlenebilir bir fonksiyon olsun. O zaman $\xi_1, \xi_2 \in [a, b)$ vardır öyle ki

$$f^\Delta(\xi_1)(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq f^\Delta(\xi_2)(b - a)$$

İspat.

$$\phi(t) = f(t) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a)$$

olsun. $\phi(t)$, $[a, b]$ de sürekli ve $[a, b)$ de delta türevlenebilir olduğundan Teorem 2.2.6 dan, $\xi_1, \xi_2 \in [a, b]$ vardır öyle ki

$$\phi^\Delta(\xi_1) \leq 0 \leq \phi^\Delta(\xi_2)$$

ve

$$\phi^\Delta(t) = f^\Delta(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olur. O zaman

$$\begin{aligned} \phi^\Delta(\xi_1) &= f^\Delta(\xi_1) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0 \leq f^\Delta(\xi_2) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ &= \phi^\Delta(\xi_2) \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan da

$$f^\Delta(\xi_1) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f^\Delta(\xi_2)$$

yazılır ki bu ise ispatı tamamlar.

2.3. İntegrallenebilme

Tanım 2.3.1. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}$ nin tüm sağ yoğun noktalarında sağ limit varsa ve $\mathbb{T}$ nin sol yoğun noktalarındaki sol limit değeri varsa ve bu limit değerleri sonlu ise f fonksiyonuna düzenli (regulated) denir (Bohner ve Peterson,2003).

Tanım 2.3.2. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}$ nin tüm sağ yoğun noktalarında sürekli ve $\mathbb{T}$ nin tüm sol yoğun noktalarında limit değeri var ve bu limit değeri sonlu ise bu fonksiyona sağ yoğun sürekli (rd-continuous) denir. Sağ yoğun fonksiyonların kümesi $C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ile gösterilir (Bohner ve Peterson,2003).

Aşağıdaki teorem sürekli, düzenlenmiş ve rd sürekli fonksiyon arasındaki ilişkiyi verir.

Teorem 2.3.3. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Eğer

- f sürekli ise f sağ yoğun süreklidir.
- f sağ yoğun sürekli ise f düzenlidir (regulated).
- İleri sıçrama operatörü olan $\sigma(t)$ sağ yoğun süreklidir.
- f düzenli (regulated) veya sağ yoğun sürekli ise $f^\sigma(t) = f(\sigma(t))$ da düzenli veya sağ yoğun süreklidir.
- f sürekli ve $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu düzenli veya sağ yoğun sürekli ise $(f \circ g)(t)$ de düzenli veya sağ yoğun süreklidir (Bohner ve Peterson,2003).

Tanım 2.3.4. $F: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ düzenli (regulated) fonksiyonu olsun. Eğer her $t \in \mathbb{T}^k$ için $F^\Delta(t) = f(t)$ eşitliği sağlanıyorsa F fonksiyonuna f nin anti türevi denir. Bu durumda her $t \in \mathbb{T}$ için f fonksiyonunun delta integrali ve belirsiz integrali sırasıyla,

$$\int_a^b f(t) \Delta t = F(b) - F(a), a, b \in \mathbb{T},$$

$$\int f(t) \Delta t = F(t) + C$$

şeklindedir. Burada C rastgele sabit bir sayıdır.

Sonraki teoremde vereceğimiz delta türevin özellikleri, reel sayılardaki belirli integralin özellikleri ile benzerdir.

Teorem 2.3.5. $f, g \in C_{rd}$ olsun. $a, b, c \in \mathbb{T}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

i.

$$\int_a^b [f(t) + g(t)]\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t,$$

ii.

$$\int_a^b (\alpha f)(t)\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t,$$

iii.

$$\int_a^b f(t)\Delta t = - \int_b^a f(t)\Delta t,$$

iv.

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t,$$

v.

$$\int_a^b f(\sigma(t))g^\Delta(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t)g(t)\Delta t,$$

vi.

$$\int_a^b f(t)g^\Delta(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t)g(\sigma(t))\Delta t,$$

vii.

$$\int_a^a f(t)\Delta t = 0,$$

viii.

$f \geq 0$ ise her $a \leq t < b$ için

$$\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0,$$

ix.

$[a, b]$ aralığında $|f(t)| \leq g(t)$ ise

$$\left| \int_a^b f(t) \Delta t \right| \leq \int_a^b g(t) \Delta t$$

dır (Bohner ve Peterson, 2003).

İspat.

i.

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(t) + g(t)] \Delta t &= (F + G)(b) - (F + G)(a) = F(b) - F(a) \\ &\quad + G(b) - G(a) = \int_a^b f(t) \Delta t + \int_a^b g(t) \Delta t \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha f)(t) \Delta t &= (\alpha F)(b) - (\alpha F)(a) = \alpha(F(b) - F(a)) \\ &= \alpha \int_a^b f(t) \Delta t \end{aligned}$$

iii.

$$\int_a^b f(t) \Delta t = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = - \int_b^a f(t) \Delta t$$

iv.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \Delta t &= F(b) - F(a) = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) \\ &= \int_a^c f(t) \Delta t + \int_c^b f(t) \Delta t \end{aligned}$$

v.

$(fg)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t)$ olduğundan $f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t)$ nin anti türevi $f(t).g(t)$ dir. O halde

$$\int_a^b [f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t)]\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a)$$

$$\int_a^b f(\sigma(t))g^\Delta(t)\Delta t + \int_a^b f^\Delta(t)g(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a)$$

$$\int_a^b f(\sigma(t))g^\Delta(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t)g(t)\Delta t$$

olur.

vi.

Benzer şekilde $f(t)g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g(\sigma(t))$ nin anti türevi $f(t).g(t)$ olduğundan

$$\int_a^b [f(t)g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g(\sigma(t))]\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a)$$

$$\int_a^b f(t)g^\Delta(t)\Delta t + \int_a^b f^\Delta(t)g(\sigma(t))\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a)$$

$$\int_a^b f(t)g^\Delta(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t)g(\sigma(t))\Delta t$$

vii.

$$\int_a^a f(t)\Delta t = F(a) - F(a) = 0$$

viii.

$f, g \in C_{rd}$ olduğundan $|f| \in C_{rd}$ ve anti türevi vardır. Yani $|f|$ ve g integrallenebilir. O halde $[a, b]$ aralığında $|f(t)| \leq g(t)$ ise

$$\left| \int_a^b f(t) \Delta t \right| \leq \int_a^b g(t) \Delta t$$

yazılabilir.

- ix. $F^\Delta(t) = f(t) + C$ ifadesinde C keyfi sabiti sıfır alınırsa, $F^\Delta(t) = f(t)$ olur. $f \geq 0$ olduğundan $F^\Delta(t) \geq 0$ ve $F(t)$ azalmayan olduğundan $a \leq b$ ise $F(a) \leq F(b)$ dır. O halde

$$\int_a^b f(t) \Delta t = F(b) - F(a) \geq 0$$

olur. Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi, argümanlarımızda önemli bir araç olan tümevarım ilkesinin önemli bir sonucundan bahsedilecektir.

Teorem 2.3.6. (Tümevarım İlkesi) $t_0 \in \mathbb{T}$ için $\{B(t): t \in [t_0, \infty)\}$ ailesi aşağıdaki koşulları sağlar.

- I. $B(t_0)$ ifadesi doğrudur.
- II. $t \in [t_0, \infty)$ noktası sağ saçılmış nokta ve $B(t)$ ifadesi doğru ise $B(\sigma(t))$ ifadesi de doğrudur.
- III. $t \in [t_0, \infty)$ noktası sağ yoğun nokta ve $B(t)$ ifadesi doğru ise o zaman t nin bir N komşuluğu vardır öyle ki $\forall s \in N \cap (t, \infty)$ için $B(s)$ ifadesi de doğrudur.
- IV. $t \in [t_0, \infty)$ noktası sol yoğun nokta ve $\forall s \in [t_0, t)$ için $B(s)$ ifadesi doğru ise, $B(t)$ ifadesi de doğrudur (Bohner ve Peterson, 2003).

Eğer $T = \mathbb{N}$ alınırsa Teorem 2.3.6 matematiksel tümevarım ilkesi olarak bilinen teoreme indirgenir.



3. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde ispatlarda bize yardımcı olacak olan zaman skalasında dinamik sistemler için Peano ve Perron teoremlerine karşılık gelen yerel varlık ve teklik teoremleri, dinamik eşitsizliklerin temel sonuçları, ekstremal çözümler ve bazı tipten alt-üst çözüm çiftleri ele alınacaktır.

3.1. Çözümlerin Varlık ve Tekliği

Tanım 3.1.1. $t \in \mathbb{T}^k$ olmak üzere,

$$u^\Delta = f(t, u), u(t_0) = u_0 \quad (3.1)$$

dinamik başlangıç değer problemini (BDP) düşünelim. Burada $f: \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^n$ de sağ süreklidir. Eğer $u(t)$, $f(t, u(t))$ nun bir antitürevi ise o zaman $u: \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü (3.1) in bir çözümüdür ve $u(t_0) = u_0$ şartını sağlar (Kaymakçalan,1993).

Tanım 3.1.2. $f: [t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}^k} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $[t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}^k}$ da keyfi bir aralıktır. Bu durumda $[t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}$ aralığında $u: [t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu (3.1) in bir çözümüdür ve her $t \in [t_0, t_0 + a]$ için u delta türevlenebilir bir fonksiyon olmakla birlikte $u^\Delta = f(t, u(t)), u(t_0) = u_0$ şeklinde gösterilir.

Lemma 3.1.3. $f: [t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}^k} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu sağ yoğun sürekli olsun. Bu durumda $[t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}$ aralığında $u(t)$, (3.1) in bir çözümüdür ancak ve ancak

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \Delta s, \forall t \in [t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}$$

delta integralini sağlar (Alsharif,2019).

İspat. $u(t)$, $[t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}$ da (3.1) in bir çözümü olsun. O zaman $[t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}^k}$ da $u(t)$ delta türevlenebilir olduğundan süreklidir. Bu aralıkta (3.1) in integrali alınırsa

$$\int_{t_0}^t u^\Delta(s) \Delta s = \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \Delta s, \forall t \in [t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}$$

elde edilir ve

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \Delta s, \forall t \in [t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}$$

yazılabilir. Buradan t ye göre türev alınır

$$u^\Delta(t) = f(t, u(t)), u(t_0) = u_0$$

elde edilir. $u(t)$, $[t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}^k}$ da sürekli ve $f(t)$, $[t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}^k} \times D$ da sağ yoğun sürekli olduğundan $u^\Delta(t)$ da aynı aralıkta sağ yoğun sürekli. Böylece $u(t)$, (3.1) in bir çözümü olur.

Şimdi, Peano ve Perron teoremlerine karşılık gelen varlık ve teklik sonuçlarını ele alacağız.

Teorem 3.1.4. $R^0 = [t_0, t_0 + a] \times B$ olmak üzere $f \in C_{rd}[R^0, \mathbb{R}^n]$ fonksiyonunu ele alalım. Burada $[t_0, t_0 + a] = [t_0, t_0 + a] \cap \mathbb{T}^k$, $B = \{u \in \mathbb{R}^n : |u - u_0| \leq b\}$ ve R^0 da $f(t, u) \leq K$ dır. O zaman dinamik (3.1) BDP nin $[t_0, t_0 + \gamma]$ aralığında en az bir $u(t)$ çözümü vardır ve $\gamma = \min\left(a, \frac{b}{K}\right)$ dır (Kaymakçalan, 1993).

İspat. İspat için (Kaymakçalan, 1993) bakılabilir.

Teorem 3.1.5. Farz edelim ki;

- i. $G \in C_{rd}[[t_0, t_0 + a] \times [0, 2b], \mathbb{R}^+]$ ve her $t_1, t_0 \leq t_1 \leq t_0 + a$ için $u(t) = 0$, $u^\Delta = g(t, u)$, $u(t_1) = 0$ denkleminin $[t_1, t_0 + a]$ aralığında bir çözümü olsun.
- ii. $f \in C_{rd}[\mathbb{R}_0, \mathbb{R}^n]$ ve her $t \in [t_0, t_0 + a]$ için bir U_t kapalı komşuluğu vardır öyle ki $U_t \times B$ da

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq g(t, |u - v|), (t, u), (t, v) \in U_t \times B$$

ifadesi sağlansın. O zaman dinamik (3.1) BDP, $[t_0, t_0 + a]$ aralığında tek bir $u(t)$ çözüme sahiptir.

İspat. İspat için (Kaymakçalan, 1993) bakılabilir.

Eğer $T = \mathbb{R}$ alınırsa Teorem 3.1.5 klasik durumdaki varlık ve teklik teoreme indirgenir.

3.2. Dinamik Eşitsizlikler

Tanım 3.2.1. $f \in C[T \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ olsun. Eğer $u \leq v$ ve bazı $1 \leq j \leq n$ için $u_j = v_j$ iken $f_j(u) \leq f_j(v), t \in T$ oluyorsa f ye yarı monoton azalmayan fonksiyon denir.

Tanım 3.2.2. f $[a, b]$ aralığında sürekli ve $[a, b]$ de türevlenebilen fonksiyon olsun. Eğer her $t \in [a, b]$ için

- $f^\Delta(t) < 0$ ve $f^\Delta(t) \leq 0$ ise f fonksiyonuna sırasıyla $[a, b]$ aralığında azalan ve artmayan fonksiyon denir.
- $f^\Delta(t) > 0$ ve $f^\Delta(t) \geq 0$ ise f fonksiyonuna sırasıyla $[a, b]$ aralığında artan ve azalmayan denir (Alsharif,2019).

Tanım 3.2.3. $f: [t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}^k \times D \rightarrow \mathbb{R}^n, D \subset \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $(t, u), (t, v) \in [t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}^k \times D$ ve her $u > v$ için

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq K|u - v| \quad (3.2)$$

olacak şekilde bir pozitif K sabiti varsa $[t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}^k \times D$ bölgesinde f Lipschitz şartını sağlar. Buradaki K Lipschitz sabiti olarak adlandırılır (Kaymakçalan,1993).

Tanım 3.2.4. $f: [t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}^k \times D \rightarrow \mathbb{R}^n, D \subset \mathbb{R}^n$ fonksiyonu sağ sürekli olsun. $(t, u), (t, v) \in [t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}^k \times D$ ve her $u > v$ için

$$f(t, u) - f(t, v) \leq K(u - v) \quad (3.3)$$

olacak şekilde bir pozitif K sabiti varsa $[t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}^k \times D$ bölgesinde f tek yönlü Lipschitz şartını sağlar. (Alsharif,2019).

Şimdi katı (strict) dinamik eşitsizliklerinin sistemi ile ilgili bir sonuç aşağıda verilecektir.

Teorem 3.2.5. $\mathbb{T}$, maksimal elemanı olmayan ve minimal elemanı $t_0 \geq 0$ olan bir zaman skalası olsun.

- $\alpha, \beta \in C^1_{rd}[\mathbb{T}, \mathbb{R}^n]$ ve $f \in C_{rd}[\mathbb{T} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ olmak üzere

$$\alpha^\Delta(t) \leq f(t, \alpha(t)), \beta^\Delta(t) \geq f(t, \beta(t)), t \in \mathbb{T}, \quad (3.4)$$

- ii. $f(t, u)$ u ya göre yarı monoton azalmayan fonksiyon ve $1 \leq j \leq n$ için $f_j(t, u)\mu(t) + u_j$ fonksiyonu u_j ye göre azalmayan fonksiyon olsun.

O zaman $t \in \mathbb{T}$ için $\alpha(t_0) < \beta(t_0)$ olduğunda $\alpha(t) < \beta(t)$ olur.

İspat. $\{B(t): \alpha(t) < \beta(t), t \in \mathbb{T}\}$ ifadesine matematiksel indüksiyon prensibini uygulayalım.

- I. $\alpha(t_0) < \beta(t_0)$ olduğundan $B(t_0)$ sağlandığı aşıkardır.
- II. t sağ saçılmış nokta ve $B(t)$ doğru olsun. Bu durumda $B(\sigma(t))$ nin de doğru olduğunu göstermeliyiz. $f(t, u)$, u ya göre azalmayan fonksiyon ve $\alpha(t) < \beta(t)$ olduğundan $f(t, \alpha(t)) < f(t, \beta(t))$ yazılabilir. Teorem 2.2.2 (ii) göz önüne alındığında

$$\alpha^\Delta(t) = \frac{\alpha(\sigma(t)) - \alpha(t)}{\mu(t)},$$

$$\beta^\Delta(t) = \frac{\beta(\sigma(t)) - \beta(t)}{\mu(t)}$$

olur. Buradan

$$\alpha^\Delta(t) - \beta^\Delta(t) = \frac{\alpha(\sigma(t)) - \alpha(t) - \beta(\sigma(t)) + \beta(t)}{\mu(t)},$$

$$\alpha(\sigma(t)) - \beta(\sigma(t)) = [\alpha^\Delta(t) - \beta^\Delta(t)]\mu^*(t) + \alpha(t) - \beta(t)$$

elde edilir. $f(t, u)\mu^*(t) + u$, u ya göre azalmayan fonksiyon ve $B(t)$ doğru olduğundan

$$\begin{aligned} \alpha(\sigma(t)) - \beta(\sigma(t)) &< [f(t, \alpha(t)) - f(t, \beta(t))]\mu(t) + \alpha(t) - \beta(t) \\ &< 0 \end{aligned}$$

Buradan

$$\alpha(\sigma(t)) < \beta(\sigma(t))$$

dır. Böylece $B(\sigma(t))$ doğru olur.

- I. t sağ yoğun nokta ve N , t nin bir komşuluğu olsun. $B(t)$ nin doğru olduğunu kabul ederek $s \geq t, s \in N$ için $B(s)$ nin de doğru olduğunu göstermek istiyoruz. Çelişki yöntemi ile kabul edelim ki doğru olmasın. Bu durumda $s_0 \in N$, $s_0 > t$ vardır öyle ki

$$\alpha(s_0) \leq \beta(s_0), \alpha^\Delta(s_0) \geq \beta^\Delta(s_0)$$

olur. $f(t, u)$ u ya göre azalmayan olduğundan

$$f(s_0, \alpha(s_0)) \leq f(s_0, \beta(s_0))$$

elde edilir. Böylece

$$\alpha^\Delta(s_0) - f(s_0, \alpha(s_0)) \geq \beta^\Delta(s_0) - f(s_0, \beta(s_0))$$

olur ki bu ise (3.2) ile çelişir.

- II. t sol yoğun nokta ve $s < t$ için $B(s)$ doğru olsun. $B(t)$ nin de doğru olduğu gösterilecektir. α ve β sağ sürekli olduğundan

$$\alpha(t) = \lim_{s \rightarrow t^-} \alpha(s) \leq \lim_{s \rightarrow t^-} \beta(s) = \beta(t)$$

yazılabilir. Şimdi $t \in \mathbb{T}$ için $\alpha(t) \neq \beta(t)$ olduğunu göstermeliyiz. Aksine $\alpha(t) = \beta(t)$ olsun. Bu durumda

$$\alpha^\Delta(t) - \beta^\Delta(t) < f(t, \alpha(t)) - f(t, \beta(t)) = 0. \quad (3.5)$$

Delta türev tanımını kullanarak $1 < i < m$ için

$$\alpha_i^\Delta(\sigma(t)) - \alpha_i(s) - \alpha_i^\Delta(t)(\sigma(t) - s) \leq \frac{\varepsilon}{2} |\sigma(t) - s|,$$

$$\beta_i^\Delta(\sigma(t)) - \beta_i(s) - \beta_i^\Delta(t)(\sigma(t) - s) \geq \frac{\varepsilon}{2} |\sigma(t) - s|$$

olur. Buradan ise

$$\alpha_i^\Delta(\sigma(t)) - \alpha_i(s) - \frac{\varepsilon}{2} |\sigma(t) - s| \leq \alpha_i^\Delta(t)(\sigma(t) - s),$$

$$-\beta_i^\Delta(\sigma(t)) + \beta_i(s) + \frac{\varepsilon}{2} |\sigma(t) - s| \leq -\beta_i^\Delta(t)(\sigma(t) - s)$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} & (\alpha_i^\Delta(t) - \beta_i^\Delta(t))(\sigma(t) - s) \\ & \geq \alpha_i^\Delta(\sigma(t)) - \beta_i^\Delta(\sigma(t)) - \alpha_i(s) + \beta_i(s). \end{aligned}$$

$\sigma(t) - s \geq t - s > 0$ olduğundan dolayı $\alpha(t) = \beta(t)$ ve $B(s)$ doğrudur. Bu durumda

$$\alpha_i^\Delta(t) - \beta_i^\Delta(t) > 0$$

elde edilir. Bu ise (3.5) ile çelişir. Böylece $\alpha(t) < \beta(t), t \in \mathbb{T}$ olur ve ispat tamamlanır.

Bir sonraki sonuç, tek taraflı Lipschitz tipinde bir çözüm gerektiren katı olmayan (non-strict) dinamik eşitsizlikler içindir.

Teorem 3.2.6. $\mathbb{T}$, maksimal elemanı olmayan ve minimal elemanı $t_0 \geq 0$ olan bir zaman skalası olsun. Her $t \in \mathbb{T}$ için

i. $\alpha, \beta \in C^1_{rd}[\mathbb{T}, \mathbb{R}^n]$ ve $f \in C_{rd}[\mathbb{T} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ olmak üzere

$$\alpha^\Delta(t) \leq f(t, \alpha(t)), \alpha(t_0) \leq u_0,$$

$$\beta^\Delta(t) \geq f(t, \beta(t)), \beta(t_0) \geq u_0, \quad (3.6)$$

ii. $f(t, u)$, u ya göre yarı monoton azalmayan fonksiyon ve $1 \leq j \leq n$ için $f_j(t, u)\mu(t) + u_j$ fonksiyonu u_j ye göre azalmayan fonksiyon olsun. Ayrıca $f(t, u)$ aşağıdaki şartı sağlasın.

$$f_j(t, u) - f_j(t, v) \leq K \sum_{j=1}^n (u_j - v_j), u \geq v, K > 0. \quad (3.7)$$

O zaman $t \in \mathbb{T}$ için $\alpha(t_0) \leq \beta(t_0)$ olduğunda $\alpha(t) \leq \beta(t)$ olur.

İspat. (Kaymakçalan, 1993).

Sonuç 3.2.7. $q \in C_{rd}^1[\mathbb{T}, \mathbb{R}^n]$ için

$$q^\Delta(t) \leq 0, q(t_0) \leq 0 \quad (3.8)$$

ise o zaman $q(t) \leq 0$ dır. Benzer şekilde eğer

$$q^\Delta(t) \geq 0, q(t_0) \geq 0 \quad (3.9)$$

ise o zaman $q(t) \geq 0$ dır.

Sonuç 3.2.8. $t \in \mathbb{T}, M > 0$ için $q \in C_{rd}^1[\mathbb{T}, \mathbb{R}^n]$ olsun.

$$q^\Delta(t) \leq -Mq(t), q(t_0) \leq 0 \quad (3.10)$$

ise o zaman $q(t) \leq 0$ dır. Benzer şekilde $t \in \mathbb{T}, M > 0$ için eğer

$$q^\Delta(t) \geq -Mq(t), q(t_0) \geq 0 \quad (3.11)$$

oluyor ise $q(t) \geq 0$ dır (Alsharif,2019).

Tanım 3.2.9. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve $n \in \mathbb{N}$ için $f_n: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $|t - s| < \delta$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır öyle ki

$$|f_n(t) - f_n(s)| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanıyorsa o zaman $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisine $\mathbb{T}$ zaman skalasında eşsüreklidir denir.

Tanım 3.2.10. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. $|f_n(t)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ varsa o zaman $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi $\mathbb{T}$ zaman skalasında düzgün sınırlıdır (Alsharif,2019).

Teorem 3.2.11. (Arzela-Ascoli Teoremi) $f_n(t)$ kapalı bir $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^n$ kümesinde tanımlı olsun. Eğer $f_n(t)$, eşsüreklili ve düzgün sınırlı fonksiyon dizisi ise o zaman $\mathbb{T}$ de düzgün yakınsayan bir $\{f_n\}, n = 1, 2, \dots$ dizisi vardır (Green ve Valentine,1961).

3.3. Ekstremal Çözümler

Peano'nun varlık sonucunun hipotezi altında, zaman skalasında dinamik denklemler için ekstremal çözümlerin varlığı ile ilgili bazı tanım ve teoremlere yer vereceğiz.

Tanım 3.3.1. $t \geq t_0, t \in [t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}$ için $\rho(t)$ (3.1) denkleminin bir çözümü olsun. (3.1) in $[t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}$ aralığında herhangi bir $u(t)$ çözümü için $\rho(t) \leq u(t)$ sağlanıyorsa o zaman $\rho(t)$, (3.1) in minimal çözümüdür.

Tanım 3.3.2. $t \geq t_0, t \in [t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}$ için $r(t)$ (3.1) denkleminin bir çözümü olsun. (3.1) in $[t_0, t_0 + a]_{\mathbb{T}}$ aralığında herhangi bir $u(t)$ çözümü için $u(t) \leq r(t)$ sağlanıyorsa o zaman $r(t)$, (3.1) in maksimal çözümüdür (Yakar ve Arslan, 2014).

$$u^\Delta = f(t, u), u(t_0) = u_0 \quad (3.12)$$

dinamik BDP ele alalım. Burada $u_0 > 0$, $R^0 = [t_0, t_0 + a] \times B$ ve $B = \{u \in \mathbb{R}^n : |u - u_0| \leq b\}$ olmak üzere $f \in C_{rd}[R^0, \mathbb{R}^n]$ ve $f(t, u) \leq K$ dır.

Teorem 3.3.3. Farz edelim ki;

- i. $f(t, u)$, u ya göre yarı monoton azalmayan fonksiyon,
- ii. $1 \leq j \leq n$ için $f_j(t, u)\mu^*(t) + u_j$ fonksiyonu u_j ye göre azalmayan fonksiyon olsun.

O zaman (3.12) denkleminin $I = [t_0, t_0 + \tau] \cap T$, $\tau = \min\left(\frac{b}{2K+b}\right)$ aralığında maksimal ve minimal çözümleri vardır (Kaymakçalan, 1993).

İspat. $0 < \varepsilon \leq \frac{b}{2}$ olsun.

$$u^\Delta = f(t, u) + \varepsilon, u(t_0) = u_0 + \varepsilon \quad (3.13)$$

dinamik BDP ele alalım. $f_\varepsilon(t, u)$, $R_\varepsilon = \{([t_0, t_0 + a] \cap T) \times B_\varepsilon\}$ da sağ sürekli olduğundan $f_\varepsilon(t, u) = f(t, u) + \varepsilon$ dır. Burada $R_\varepsilon \subset R^0$ olmak üzere $|f_\varepsilon(t, u)| \leq K + \frac{b}{2}$ ve $B_\varepsilon = \{u \in \mathbb{R}^n : |u - (u_0 + \varepsilon)| \leq \frac{b}{2}\}$ dır. Teorem 3.1.4 ten (3.12) denkleminin I kapalı aralığında bir $u(t, \varepsilon)$ çözümü vardır. $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$ için

$$u^\Delta(t, \varepsilon_2) \leq f(t, u(t, \varepsilon_2)) + \varepsilon_2$$

yazılır. $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ ifadesinin her iki tarafına $f(t, u(t, \varepsilon_1))$ eklenirse

$$\varepsilon_1 + f(t, u(t, \varepsilon_1)) > \varepsilon_2 + f(t, u(t, \varepsilon_1))$$

elde edilir. Buradan ise

$$u^\Delta(t, \varepsilon_1) > f(t, u(t, \varepsilon_1)) + \varepsilon_2$$

olur. Teorem 3.2.5 kullanılarak

$$u(t, \varepsilon_2) < u(t, \varepsilon_1)$$

bulunur. $\{u(t, \varepsilon_m)\}$ fonksiyon ailesi I aralığında eşsürekli ve düzgün sınırlı olduğundan Arzela-Ascoli teoreminden düzgün yakınsayan bir $\{u(t, \varepsilon_m)\}$ dizisi ve sağ sürekli $r(t)$ fonksiyonu vardır. $f(t, u)$ nun sağ sürekliliğinden dolayı $m \rightarrow \infty$ iken $f(t, u(t, \varepsilon_m)), f(t, r(t))$ ye lokal düzgün yaklaşır. Yani

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u(t, \varepsilon_m) = r(t), r(t_0) = u_0$$

dır. Şimdi $r(t)$ nin I da (3.13) BDP nin maksimal çözümü olduğu gösterilecektir. $u(t)$

(3.13) ün herhangi bir çözümü olsun. Bu durumda $t \in I$ ve $0 < \varepsilon \leq \frac{b}{2}$ için

$$u(t_0) = u_0 < u_0 + \varepsilon = u(t_0, \varepsilon)$$

$$u^\Delta(t) \leq f(t, u(t))$$

$$u^\Delta(t, \varepsilon) = f(t, u(t)) + \varepsilon > f(t, u(t, \varepsilon))$$

elde ederiz. Teorem 3.2.5 ten

$$u(t) < u(t, \varepsilon), t \in I$$

olur. $\varepsilon_n \rightarrow 0$ iken her tarafın limiti alınırsa $u(t) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, \varepsilon) = r(t)$. Yani $u(t) \leq r(t)$ elde edildiğinden maksimal çözüm olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.4.

- i. $f(t, u)$, u ya göre yarı monoton azalmayan fonksiyon,
- ii. $1 \leq j \leq n$ için $f_j(t, u)\mu^*(t) + u_j$ fonksiyonu u_j ye göre azalmayan fonksiyon olsun.
- iii. $v: I \rightarrow R^n, t \in T$ delta türevlenebilir bir fonksiyon olsun ve aşağıdaki eşitsizliği sağlasın.

$$v^\Delta(t) \leq f(t, v(t)), t \in I. \quad (3.14)$$

O zaman $r(t)$, (3.12) BDP nin I da maksimal çözümü olmak üzere $v(t_0) \leq u_0$ eşitsizliği sağlandığında $v(t) \leq r(t)$ olur (Kaymakçalan,1993).

İspat. Yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için

$$u^\Delta(t) = f(t, u(t)) + \varepsilon, \quad u(t_0) = u_0 + \varepsilon \quad (3.15)$$

tanımlansın. $f_\varepsilon(t, u) = f(t, u(t)) + \varepsilon$ sağ sürekli olduğundan Teorem 3.3.4 ten (3.15) denkleminin I da maksimal çözümü vardır ve

$$u^\Delta(t, \varepsilon) = f(t, u(t)) + \varepsilon > f(t, u(t, \varepsilon)),$$

$$v^\Delta(t) \leq f(t, v(t)),$$

$$u(t_0, \varepsilon) = u_0 + \varepsilon > u_0$$

yazılabilir. $v(t_0) \leq u_0 < u_0 + \varepsilon$ olduğundan $v(t_0) < u_0 + \varepsilon$ dir. Teorem 3.1.4 ten

$$v(t) < u(t, \varepsilon) \leq r(t, \varepsilon), t \in I$$

elde edilir. $\varepsilon \rightarrow 0$ iken her iki tarafın limiti alınırsa,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r(t, \varepsilon) = r(t)$$

olur. Böylece $v(t) \leq r(t)$ olur ve ispat tamamlanmış olur.

3.4. Alt ve Üst Çözümler

Bu bölümde zaman skalasında dinamik denklemlere uygulanan ve monoton iteratif teknik ve kuazilineerizasyon metodu ile birleştiğinde, kapalı bir kümede oldukça kullanışlı olan alt ve üst çözüm metodunu inceleyeceğiz.

$f \in C_{rd}[\mathbb{T} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$ $t = 0$ minimal eleman ve $t = \mathbb{T}$ sol saçılmış olmayan maksimal eleman olmak üzere

$$u^\Delta(t) = f(t, u), u(0) = u_0 \quad (3.16)$$

dinamik BDP ele alalım.

Tanım 3.3.5. $\alpha \in C_{rd}^1[\mathbb{T}, \mathbb{R}]$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}$ için

$$\alpha^\Delta \leq f(t, \alpha), \alpha(0) \leq u_0 \quad (3.17)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $\alpha(t)$ ye (3.16) BDP nin bir alt çözümü denir.

Tanım 3.3.6. $\beta \in C_{rd}^1[\mathbb{T}, \mathbb{R}]$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}$ için

$$\beta^\Delta \geq f(t, \beta), \beta(0) \geq u_0 \quad (3.18)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $\beta(t)$ ye (3.16) BDP nin bir üst çözümü denir (Yakar ve Yakar,2011).

$\alpha(t) \leq \beta(t)$ olacak şekilde α, β alt ve üst çözümlerinin varlığı bilindiğinde

$$S = [(t, u): \alpha(t) \leq u \leq \beta(t), t \in \mathbb{T}] \quad (3.19)$$

kapalı kümesinde bir çözümün varlığı gösterilebilir. Aşağıdaki önerme bu durumla ilgilidir.

Önerme 3.3.7. $f \in C_{rd}[\mathbb{T} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ ve $f(t, u)$ her yerde sınırlı olmak üzere (3.16) sistemini ele alalım. Bu durumda (3.16) nın $\mathbb{T}$ zaman skalasında bir $u(t)$ çözümü vardır (Lakshmikantham ve Kaymakçalan ,1996).

Teorem 3.3.8. Kabul edelim ki

i. $\alpha, \beta \in C_{rd}^1[\mathbb{T}, \mathbb{R}]$ (3.16) nın alt ve üst çözümleri $\alpha(t) \leq \beta(t)$ eşitsizliğini sağlasın.

ii. $f \in C_{rd}[S, \mathbb{R}]$ fonksiyonu S de sınırlı olsun.

O zaman (3.16) nın $\alpha(0) \leq u_0 \leq \beta(0)$ olacak şekilde bir $u(t)$ çözümü vardır öyle ki $\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$ dır (Lakshmikantham ve Kaymakçalan ,1996).

İspat. $H: \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$H(t, u) = \max[\alpha(t), \min(u, \beta(t))] \quad (3.20)$$

tanımlansın. Bu durumda f, S de sınırlı olduğu için $f(t, H(t, u))$, f nin $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ ye bir sağ yoğun sürekli genişlemesini tanımlar. Önerme 3.3.7 göz önüne alındığında $\mathbb{T}$ de,

$$u^\Delta = f(t, H(t, u)), u(0) = u_0 \quad (3.21)$$

denkleminin bir çözüme sahip olduğu söylenebilir.

Şimdi bu çözümün $\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$ eşitsizliğini sağladığını göstermeliyiz. $\varepsilon > 0$ için $\beta_\varepsilon(t) = \beta(t) + \varepsilon(1 + t)$, $\alpha_\varepsilon(t) = \alpha(t) - \varepsilon(1 + t)$ olsun. İspat için

$$\{B(t): \alpha_\varepsilon(t) < u(t) < \beta_\varepsilon(t), t \in \mathbb{T}\}$$

durumuna matematiksel induksiye prensibini uygulayalım.

I. $\alpha_\varepsilon(0) < u(0) < \beta_\varepsilon(0)$ sağlandığı açıktır. α ve β (3.16) denkleminin alt ve üst çözümleri olduğundan dolayı $\alpha(0) < u_0 < \beta(0)$ dır. Dolayısıyla $\alpha_\varepsilon(0) \leq \alpha(0) < u_0 < \beta(0) \leq \beta_\varepsilon(0)$ olur.

II. t sağ saçılmış ve $B(t)$ doğru olsun. $B(\sigma(t))$ nin doğru olduğunu göstermek durumundayız. Çelişki yöntemiyle $\alpha_\varepsilon(\sigma(t)) < u(\sigma(t)) < \beta_\varepsilon(\sigma(t))$ doğru olmadığını kabul edelim. $\sigma(t) \in \mathbb{T}$ için $[0, \sigma(t)]$ aralığında $\alpha_\varepsilon(t) < u(t) < \beta_\varepsilon(t)$ ve $u(\sigma(t)) = \beta_\varepsilon(\sigma(t))$ olsun. Bu durumda $u(\sigma(t)) > \beta(\sigma(t))$. Böylece

$$H(\sigma(t), u(\sigma(t))) = \max[\alpha(\sigma(t), \min(u(\sigma(t)), \beta(\sigma(t))))] = \beta(\sigma(t))$$

ve

$$\alpha(\sigma(t)) \leq H(\sigma(t)), u(\sigma(t)) \leq \beta(\sigma(t))$$

olur. β üst çözüm olduğu için

$$\beta^\Delta(\sigma(t)) \geq f(\sigma(t), H(\sigma(t), u(\sigma(t)))) = u^\Delta(\sigma(t))$$

$\beta_\varepsilon^\Delta(\sigma(t)) > \beta^\Delta(\sigma(t))$ olduğundan dolayı

$$\beta_\varepsilon^\Delta(\sigma(t)) > u^\Delta(\sigma(t))$$

elde edilir. Buradan da

$$\frac{\beta_\varepsilon(\sigma(t)) - \beta_\varepsilon(\sigma(t) - \mu^*(t))}{\mu(t)} > \frac{u(\sigma(t)) - u(\sigma(t) - \mu^*(t))}{\mu(t)}$$

yazılır. $\beta_\varepsilon(\sigma(t)) = u(\sigma(t))$ olduğundan dolayı

$$\beta_\varepsilon(\sigma(t) - \mu(t)) < u(\sigma(t) - \mu(t))$$

elde edilir ve bu $u(t) < \beta_\varepsilon(t)$ ile çelişir. Sonuç olarak

$$\alpha_\varepsilon(\sigma(t)) \leq u(\sigma(t)) \leq \beta_\varepsilon(\sigma(t))$$

dır ve $B(\sigma(t))$ doğrudur.

III. t sağ yoğun nokta olsun ve t nin sağının bir komşuluğu olan U da bir t_1 seçelim. Aksine $t_1 \in T$ olmak üzere $\alpha_\varepsilon(t) \leq u(t) \leq \beta_\varepsilon(t), t \in [0, t_1], u(t_1) = \beta(t_1)$ ve $\alpha(t_1) \leq H(t_1, u(t_1)) \leq \beta(t_1)$ olsun. β bir üst çözüm olduğundan

$$\beta^\Delta(t_1) > f(t_1, H(t_1, u(t_1))) = u^\Delta(t_1)$$

dır. $\beta_\varepsilon^\Delta(t_1) > \beta^\Delta(t_1)$ olduğundan $\beta_\varepsilon^\Delta(t_1) > u^\Delta(t_1)$ olur. Buradan

$$\frac{\beta_\varepsilon(t_1) - \beta_\varepsilon(t_1 - \mu(t))}{\mu(t)} > \frac{u(t_1) - u(t_1 - \mu(t))}{\mu(t)}$$

olur. $\beta_\varepsilon(t_1) = u(t_1)$ olduğundan $\beta_\varepsilon(t_1 - \mu(t)) < u(t_1 - \mu(t))$ elde edilir. Bu ise

$u(t) \leq \beta_\varepsilon(t), t \in [0, t_1]$ ifadesiyle çelişir. Sonuç olarak

$$\alpha_\varepsilon(t) < u(t) < \beta_\varepsilon(t)$$

Böylece bütün $s \in U, s \geq t$ için $B(s)$ doğrudur.

IV. t sol yoğun nokta ve her $s \in [0, t)$ için $B(s)$ doğru olsun. α, u, β fonksiyonları sağ yoğun sürekli olduğu için sol limit vardır ve

$$\lim_{s \rightarrow t^-} \alpha_\varepsilon(s) < \lim_{s \rightarrow t^-} u(s) < \lim_{s \rightarrow t^-} \beta_\varepsilon(t)$$

olur. Bu ise $\alpha_\varepsilon(t) \leq u(t) \leq \beta_\varepsilon(t)$ eşitsizliğini sağlar. Böylece $\mathbb{T}$ de $B(t)$ doğru olur. $\varepsilon \rightarrow 0^+$ iken $\mathbb{T}$ de $\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$ eşitsizliği elde edilir (Alsharif ,2019).

Teorem 3.3.9. $f \in C_{rd}[\mathbb{T} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$ ve $\alpha_0, \beta_0 \in C_{rd}^1[\mathbb{T}, \mathbb{R}]$ olmak üzere (3.16) nın alt ve üst çözümler olmak üzere $\alpha_0 \leq \beta_0$ olsun. Buna ek olarak, t sağ yoğun nokta için $L \geq 0$ ve t sağ saçılmış nokta için $L \leq 0$ olmak üzere f aşağıdaki eşitsizliği sağlasın.

$$f(t, u) - f(t, v) \geq -L(u - v), \alpha_0 \leq v \leq u \leq \beta_0 \quad (3.22)$$

O zaman lokal düzgün ve monoton yakınsayan monoton $\{\alpha_m(t)\}, \{\beta_m(t)\}$ dizileri vardır öyle ki $m \rightarrow \infty$ iken $\alpha_m \rightarrow \rho$ ve $\beta_m \rightarrow r$ dir. Burada ρ, r (3.16) nın sırasıyla minimal ve maksimal çözüm çiftleridir (Alsharif ,2019).

İspat. Herhangi bir $\tau \in C_{rd}[\mathbb{T}, \mathbb{R}]$ ve $\alpha_0 \leq \tau \leq \beta_0$ için

$$u^\Delta = f(t, \tau) - L(u - \tau), \quad u(0) = u_0 \quad (3.23)$$

lineer dinamik denklemini göz önüne alalım. (3.22) de v yerine τ yazıldığında

$$f(t, u) - f(t, \tau) \geq -L(u - \tau) \quad (3.24)$$

elde edilir. Buradan ise

$$f(t, u) \geq f(t, \tau) - L(u - \tau) = u^\Delta \quad (3.25)$$

yazılabilir. O halde $\mathbb{T}$ de (3.23) denkleminin tek bir u çözümü vardır.

$u = A\tau$ dönüşümü tanımlansın. Bu gösterim daha sonra $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ dizilerinin tanımlanması için kullanılacaktır. Şimdi aşağıdaki ifadelerin doğru olduğu gösterilecektir.

$$i. \quad \alpha_0 \leq A\alpha_0, \beta_0 \geq A\beta_0$$

ii.

$$[\alpha_0, \beta_0] = \{u \in C_{rd}[\mathbb{T}, \mathbb{R}]: \alpha_0 \leq u \leq \beta_0\} \quad (3.26)$$

bölgesinde A monoton operatördür.

(i) yi göstermek için α_1 , (3.23) ün tek çözümü ve $\tau = \alpha_0$ olmak üzere $A\alpha_0 = \alpha_1$ alınsın. (3.23) ten

$$\alpha_1^\Delta = f(t, \alpha_0) - L(\alpha_1 - \alpha_0), \quad \alpha_1(0) = u_0 \quad (3.27)$$

olur. $\varphi = \alpha_1 - \alpha_0$ olsun. α_0 bir alt çözüm olduğu için

$$\varphi^\Delta = \alpha_1^\Delta - \alpha_0^\Delta \geq f(t, \alpha_0) - L(\alpha_1 - \alpha_0) - f(t, \alpha_0) = -L\varphi \quad (3.28)$$

elde edilir. Sonuç olarak $\varphi(0) \geq 0$ olduğundan Sonuç 3.2.7 kullanılarak $\varphi(t) \geq 0$ olur ve dolayısıyla $\alpha_0 \leq A\alpha_0$ bulunur.

Şimdi $\beta_0(t) \geq \beta_1(t)$ olduğu gösterilecektir. Bunun için β_1 , (3.23) ün tek çözümü ve $\tau = \beta_0$ olmak üzere $A\beta_0 = \beta_1$ alalım. $\varphi = \beta_0 - \beta_1$ olsun. β_0 üst çözüm olduğundan dolayı (3.23) ten

$$\varphi^\Delta = \beta_0^\Delta - \beta_1^\Delta \geq f(t, \beta_0) - f(t, \beta_0) + L(\beta_1 - \beta_0) = L\varphi \quad (3.29)$$

elde edilir. $\varphi(0) \geq 0$ olduğundan Sonuç 3.2.8 kullanılarak $\varphi(t) \geq 0$ olur. O halde $\beta_0 \geq A\beta_0$ dır.

(ii) yi göstermek için $\tau_1 \leq \tau_2$ olacak şekilde $\tau_1, \tau_2 \in [\alpha_0, \beta_0]$ olsun. $u_1 = A\tau_1$ ve $u_2 = A\tau_2$ olsun. $u_1 \leq u_2$ olduğunu göstermek için $\varphi = u_2 - u_1$ alınsın. (3.23) ten

$$u_1 = f(t, \tau_1) - L(u_1 - \tau_1), u_1(0) = u_0, \quad (3.30)$$

$$u_2 = f(t, \tau_2) - L(u_2 - \tau_2), u_2(0) = u_0 \quad (3.31)$$

olur. Bu durumda $\varphi(0) = 0$ ve

$$\begin{aligned}
\varphi^\Delta &= u_2^\Delta - u_1^\Delta = f(t, \tau_2) - L(u_2 - \tau_2) - f(t, \tau_1) + L(u_1 - \tau_1) \\
&\geq -L(\tau_2 - \tau_1) - L(u_2 - \tau_2) + L(u_1 - \tau_1) \\
&= -L\varphi
\end{aligned} \tag{3.32}$$

olur. Böylece $\varphi(t) \geq 0$ ve dolayısıyla $A\tau_2 \geq A\tau_1$ elde edilir. Şimdi $\alpha_m = A\alpha_{m-1}$, $\beta_m = A\beta_{m-1}$ dizileri tanımlansın.

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_m \leq \beta_m \leq \dots \leq \beta_1 \leq \beta_0 \tag{3.33}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu dizilerin düzgün yakınsak, düzgün sınırlı ve eşsürekli olduğu gösterilecektir. α_0 ve β_0 ın sınırlı olduğundan ile $K_1, K_2 > 0$ vardır öyle ki $t \in \mathbb{T}$ için $|\alpha_0(t)| \leq K_1$ ve $|\beta_0(t)| \leq K_2$ dır. Her $m > 0$ için $\alpha_0(t) \leq \beta_m(t) \leq \beta_0(t)$ olduğundan $\{\beta_m(t)\}$ dizisi düzgün sınırlıdır. Şimdi $\{\beta_m(t)\}$ dizisinin eşsürekli olduğunu gösterilecektir. $0 \leq t_1 \leq t_2$ ve $m > 0$ için

$$\begin{aligned}
&|\beta_m(t_1) - \beta_m(t_2)| \\
&= \left| u_0 + \int_0^{t_1} f(s, \beta_{m-1}(s)) - L(\beta_m(s) - \beta_{m-1}(s))\Delta s \right. \\
&\quad \left. - u_0 - \int_0^{t_2} f(s, \beta_{m-1}(s)) - L(\beta_m(s) - \beta_{m-1}(s))\Delta s \right| \\
&= \left| \int_0^{t_1} f(s, \beta_{m-1}(s)) - L(\beta_m(s) - \beta_{m-1}(s))\Delta s \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{t_2} f(s, \beta_{m-1}(s)) - L(\beta_m(s) - \beta_{m-1}(s))\Delta s \right| \\
&\leq \int_{t_2}^{t_1} |f(s, \beta_{m-1}(s)) - L(\beta_m(s) - \beta_{m-1}(s))| \Delta s
\end{aligned}$$

olur. $\{\alpha_m(t)\}$, $\{\beta_m(t)\}$ düzgün sınırlı olduğundan m den bağımsız bir $\tilde{K}$ vardır öyle ki

$$|\beta_m(t_1) - \beta_m(t_2)| \leq \tilde{K}|t_1 - t_2| \tag{3.34}$$

sağlanır. $\varepsilon > 0$ için $\delta = \frac{\varepsilon}{R} > 0$ vardır öyle ki $|t_1 - t_2| < \delta$ iken $|\beta_m(t_1) - \beta_m(t_2)| < \varepsilon$ sağlar. Benzer argümanlar kullanılarak $\{\alpha_m(t)\}$ nin de düzgün sınırlı ve eşsürekli olduğu gösterilebilir. Arzela- Ascoli teoreminden sırasıyla ρ ve r ye düzgün yakınsayan $\{\alpha_{m_k}(t)\}$ ve $\{\beta_{m_k}(t)\}$ dizileri vardır. O halde $\{\alpha_m(t)\}, \{\beta_m(t)\}$ dizileri $\rho(t)$ ve $r(t)$ ye düzgün ve monoton yakınsarlar. Yani

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m(t) &= \rho(t) \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m(t) &= r(t)\end{aligned}\tag{3.35}$$

dır. Şimdi $\rho(t)$ ve $r(t)$ nin (3.16) nin çözümleri olduğu gösterilecektir. Bunun için

$$\begin{aligned}\alpha_{m+1}^\Delta(t) &= f(t, \alpha_m(t)) \\ &\quad - L(\alpha_{m+1}(t) - \alpha_m(t)), \alpha_{m+1}(0) = u_0\end{aligned}\tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}\beta_{m+1}^\Delta(t) &= f(t, \beta_m(t)) \\ &\quad - L(\beta_{m+1}(t) - \beta_m(t)), \beta_{m+1}(0) = u_0\end{aligned}\tag{3.37}$$

olmak üzere α_{m+1} ve β_{m+1} oluşturalım. (3.36) ve (3.37) denklemlerinin 0 dan t ye delta integrali alındığında

$$\alpha_{m+1}(t) = u_0 + \int_0^t f(s, \alpha_m(s)) - L(\alpha_{m+1}(s) - \alpha_m(s)) \Delta s,\tag{3.38}$$

$$\beta_{m+1}(t) = u_0 + \int_0^t f(s, \beta_m(s)) - L(\beta_{m+1}(s) - \beta_m(s)) \Delta s\tag{3.39}$$

elde edilir. Şimdi $m \rightarrow \infty$ iken limit ve daha sonra delta türev alındığı takdirde (3.16) denkleminin $\rho(t)$ ve $r(t)$ çözümleri elde edilir. Yani

$$\rho^\Delta(t) = f(t, \rho(t)), \rho(0) = u_0\tag{3.40}$$

$$r^\Delta(t) = f(t, r(t)), r(0) = u_0\tag{3.41}$$

olur. Son olarak $\rho(t)$ ve $r(t)$ nin (3.16) denkleminin minimal ve maksimal çözümleri olduğu gösterilecektir. Yani $u(t)$, (3.16) nin herhangi bir çözümü olduğu durumda

$\rho(t) \leq u(t) \leq r(t)$ eşitsizliği gösterilecektir. $\alpha_0 \leq u \leq \beta_0$ olduğu aşikar. Bazı $m > 1$ için $\alpha_m \leq u \leq \beta_m$ ve $\varphi = u - \alpha_{m+1}$ olsun. (3.22) den

$$\begin{aligned}
 \varphi^\Delta &= u^\Delta - \alpha_{m+1}^\Delta \\
 &= f(t, u) - f(t, \alpha_m) \\
 &\quad + L(\alpha_{m+1} - \alpha_m) \\
 &\geq -L(u - \alpha_m) + L(\alpha_{m+1} - \alpha_m) \\
 &= -L(u - \alpha_m) = -L\varphi
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

olur. $\varphi(0) = 0$ olduğundan Sonuç 3.2.8 den $\alpha_{m+1} \leq u$ bulunur. Benzer şekilde $\varphi = \beta_{m+1} - u$ alınıp ve (3.22) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 \varphi^\Delta &= \beta_{m+1}^\Delta - u^\Delta \\
 &= f(t, \beta_m) - L(\beta_{m+1} - \beta_m) \\
 &\quad - f(t, u) \\
 &\geq -L(\beta_m - u) - L(\beta_{m+1} - \beta_m) \\
 &= -L\varphi
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

$\varphi(0) = 0$ olduğundan Sonuç 3.2.7 den $u \leq \beta_{m+1}$ elde edilir. Böylece $\alpha_{m+1} \leq u \leq \beta_{m+1}$ dır. $m \rightarrow \infty$ iken $\rho(t) \leq u \leq r(t)$ olur ve ispat tamamlanır (Alsharif ,2019).

Sonuç 3.3.10. Teorem 3.3.9 un şartlarına ilave olarak

$$f(t, u) - f(t, v) \leq L(u - v), \alpha_0 \leq v \leq u \leq \beta_0 \tag{3.44}$$

olsun. O zaman $\rho(t) = u(t) = r(t)$ (3.16) nın tek çözümüdür (Lakshmikantham ve Vatsala ,2008).

İspat. $\rho(t) \leq r(t)$ olduğu bilindiğinden $r(t) \leq \rho(t)$ olduğu gösterilecektir. $\varphi = r(t) - \rho(t)$ olsun. Delta türev alınırsa

$$\begin{aligned}
 \varphi^\Delta &= r^\Delta(t) - \rho^\Delta(t) = f(t, r(t)) - f(t, \rho(t)) \\
 &\leq L(r(t) - \rho(t)) = L\varphi
 \end{aligned}$$

elde edilir. $\varphi(0) = 0$ olduğundan Sonuç 3.2.7 den $r(t) \leq \rho(t)$ olur. Böylece $\rho(t) = u(t) = r(t)$ dır.

4. ZAMAN SKALASINDA MONOTON İTERATİF TEKNİK

4.1. Giriş

Bu bölümde bir aralıkta müspet varlık sonuçlarını göstermede etkili ve esnek bir mekanizma sağlayan monoton iterasyon tekniği geliştirilecektir. Alt ve üst çözümlerini kullanarak zaman skalasında başlangıç değer problemiyle dinamik sistemlerin çözümlerine monoton iterasyonlar yapılarak bu dizilerin zaman skalasında göz önünde bulundurulanan problemin ekstremal çözüm çiftine düzgün ve monoton olarak yakınsadıkları gösterilecektir.

$$u^A = f(t, u) + g(t, u) - h(t, u), u(0) = u_0 \quad (4.1)$$

başlangıç değer problemini ele alarak aşağıdaki tanımlamaları yapalım. Burada

$$\Omega_0 = \{(t, u): \alpha_0(t) \leq u \leq \beta_0(t) \ t \in T\}$$

olmak üzere, $\alpha_0(t), \beta_0(t) \in C_{rd}[T, R]$ ve $\alpha_0(t) \leq \beta_0(t)$ ve $f(t, u), g(t, u), h(t, u) \in C[\Omega_0, R]$ dır.

Tanım 4.1.1. $\alpha_0, \beta_0 \in C_{rd}^1[T, \mathbb{R}]$ olsun. $t \in T$ için α_0, β_0 çözüm çiftlerine (4.1) denkleminin

i.

$$\begin{aligned} \alpha_0^A &\leq f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) - h(t, \alpha_0) \\ \beta_0^A &\geq f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) - h(t, \beta_0) \end{aligned} \quad (4.2)$$

ise doğal alt ve üst çözümleri,

ii.

$$\begin{aligned} \alpha_0^A &\leq f(t, \beta_0) + g(t, \alpha_0) - h(t, \alpha_0) \\ \beta_0^A &\geq f(t, \alpha_0) + g(t, \beta_0) - h(t, \beta_0) \end{aligned} \quad (4.3)$$

ise I. tip alt ve üst çözümleri,

iii.

$$\begin{aligned}\alpha_0^\Delta &\leq f(t, \alpha_0) + g(t, \beta_0) - h(t, \alpha_0) \\ \beta_0^\Delta &\geq f(t, \beta_0) + g(t, \alpha_0) - h(t, \beta_0)\end{aligned}\tag{4.4}$$

ise II. tip alt ve üst çözümleri,

iv.

$$\begin{aligned}\alpha_0^\Delta &\leq f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) - h(t, \beta_0) \\ \beta_0^\Delta &\geq f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) - h(t, \alpha_0)\end{aligned}\tag{4.5}$$

ise III. tip alt ve üst çözümleri,

v.

$$\begin{aligned}\alpha_0^\Delta &\leq f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) - h(t, \alpha_0) \\ \beta_0^\Delta &\geq f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) - h(t, \beta_0)\end{aligned}\tag{4.6}$$

ise IV. tip alt ve üst çözümleri,

vi.

$$\begin{aligned}\alpha_0^\Delta &\leq f(t, \beta_0) + g(t, \alpha_0) - h(t, \beta_0) \\ \beta_0^\Delta &\geq f(t, \alpha_0) + g(t, \beta_0) - h(t, \alpha_0)\end{aligned}\tag{4.7}$$

ise V. tip alt ve üst çözümleri,

vii.

$$\begin{aligned}\alpha_0^\Delta &\leq f(t, \alpha_0) + g(t, \beta_0) - h(t, \beta_0) \\ \beta_0^\Delta &\geq f(t, \beta_0) + g(t, \alpha_0) - h(t, \alpha_0)\end{aligned}\tag{4.8}$$

ise VI. tip alt ve üst çözümleri,

viii.

$$\begin{aligned}\alpha_0^\Delta &\leq f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) - h(t, \beta_0) \\ \beta_0^\Delta &\geq f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) - h(t, \alpha_0)\end{aligned}\tag{4.9}$$

ise VII. tip alt ve üst çözümleri denir.

Tanım 4.1.2. $v, w \in C_{rd}^1[\mathbb{T}, \mathbb{R}]$ olmak üzere v, w fonksiyonlarına

i.

$$\begin{aligned}v^\Delta(t) &= f(t, v(t) + g(t, v(t)) - h(t, v(t)), v(0) = v_0 \\ w^\Delta(t) &= f(t, w(t) + g(t, w(t)) - h(t, w(t)), w(0) = w_0\end{aligned}\tag{4.10}$$

ise doğal çözüm çifti,

ii.

$$\begin{aligned}v^\Delta(t) &= f(t, w(t) + g(t, v(t)) - h(t, v(t)), v(0) = v_0 \\w^\Delta(t) &= f(t, v(t) + g(t, w(t)) - h(t, w(t)), w(0) = w_0\end{aligned}\quad (4.11)$$

ise I. tip çözüm çifti,

iii.

$$\begin{aligned}v^\Delta(t) &= f(t, v(t) + g(t, w(t)) - h(t, v(t)), v(0) = v_0 \\w^\Delta(t) &= f(t, w(t) + g(t, v(t)) - h(t, w(t)), w(0) = w_0\end{aligned}\quad (4.12)$$

ise II. tip çözüm çifti,

iv.

$$\begin{aligned}v^\Delta(t) &= f(t, v(t) + g(t, v(t)) - h(t, w(t)), v(0) = v_0 \\w^\Delta(t) &= f(t, w(t) + g(t, w(t)) - h(t, v(t)), w(0) = w_0\end{aligned}\quad (4.13)$$

ise III. tip çözüm çifti,

v.

$$\begin{aligned}v^\Delta(t) &= f(t, w(t) + g(t, w(t)) - h(t, v(t)), v(0) = v_0 \\w^\Delta(t) &= f(t, v(t) + g(t, v(t)) - h(t, w(t)), w(0) = w_0\end{aligned}\quad (4.14)$$

ise IV. tip çözüm çifti,

vi.

$$\begin{aligned}v^\Delta(t) &= f(t, w(t) + g(t, v(t)) - h(t, w(t)), v(0) = v_0 \\w^\Delta(t) &= f(t, v(t) + g(t, w(t)) - h(t, v(t)), w(0) = w_0\end{aligned}\quad (4.15)$$

ise V. tip çözüm çifti,

vii.

$$\begin{aligned}v^\Delta(t) &= f(t, v(t) + g(t, w(t)) - h(t, w(t)), v(0) = v_0 \\w^\Delta(t) &= f(t, w(t) + g(t, v(t)) - h(t, v(t)), w(0) = w_0\end{aligned}\quad (4.16)$$

ise VI. tip çözüm çifti,

viii.

$$\begin{aligned}v^\Delta(t) &= f(t, w(t) + g(t, w(t)) - h(t, w(t)), v(0) = v_0 \\w^\Delta(t) &= f(t, v(t) + g(t, v(t)) - h(t, v(t)), w(0) = w_0\end{aligned}\quad (4.17)$$

ise VII. tip çözüm çifti denir.

Tanım 4.1.3. Herhangi v, w çözüm çifti için $v \geq \rho, r \geq w$ oluyor ise $\rho, r \in C_{rd}^1[\mathbb{T}, \mathbb{R}]$ çözüm çiftine minimal ve maksimal çözüm çifti denir (Alsharif,2019).

Aşağıda inceleyeceğimiz teoremden III. tip alt-üst çözüm çifti kullanılarak (4.1) denkleminin III. tip ekstremal çözümlerine düzgün ve monoton yakınsayan diziler elde edilecektir.

4.2. Genelleştirilmiş Monoton İteratif Teknik

Teorem 4.1.4. (A_1) $\alpha_0(t), \beta_0(t)$ (4.1) in III. tip alt-üst çözüm çifti olsun.

(A_2) $f(t, u), g(t, u), h(t, u)$ fonksiyonlar u ya göre azalmayan fonksiyonlar olsun. O zaman $\{\alpha_m(t)\}$ ve $\{\beta_m(t)\}$ monoton dizileri var ve öyle ki $\{\alpha_m(t)\} \rightarrow \rho$ ve $\{\beta_m(t)\} \rightarrow r$ düzgün monoton yakınsar. Burada ρ, r sırasıyla (4.1) in III. tip minimal ve maksimal çözüm çiftidir ve aşağıdaki sistemi sağlar:

$$\begin{aligned}\rho^\Delta &= f(t, \rho) + g(t, \rho) - h(t, r), \rho(0) = u_0, \\ r^\Delta &= f(t, r) + g(t, r) - h(t, \rho), r(0) = u_0\end{aligned}\tag{4.18}$$

İspat. $\alpha_0(t), \beta_0(t)$ (4.1) in III. tip alt-üst çözüm çifti olduğundan

$$\begin{aligned}\alpha_0^\Delta &\leq f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) - h(t, \beta_0), \alpha_0(0) \leq u_0, \\ \beta_0^\Delta &\geq f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) - h(t, \alpha_0), \beta_0(0) \geq u_0.\end{aligned}$$

Ayrıca aşağıdaki sistemi düşünelim:

$$\begin{aligned}\alpha_{m+1}^\Delta &= f(t, \alpha_m) + g(t, \alpha_m) - h(t, \beta_m), \alpha_{m+1}(0) = u_0, \\ \beta_{m+1}^\Delta &= f(t, \beta_m) + g(t, \beta_m) - h(t, \alpha_m), \beta_{m+1}(0) = u_0.\end{aligned}\tag{4.19}$$

$\alpha_0 \leq u \leq \beta_0$ olduğu aşikârdır. $\alpha_0 \leq \alpha_1$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için $p = \alpha_0 - \alpha_1$ olsun. $p(0) = \alpha_0(0) - \alpha_1(0) \leq 0$ dır. (4.19) dan

$$\alpha_1^\Delta = f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) - h(t, \beta_0), \alpha_1(0) = u_0$$

ve

$$\beta_1^\Delta = f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) - h(t, \alpha_0), \beta_1(0) = u_0$$

olduğu aşikârdır. $p = \alpha_0 - \alpha_1$ ifadesinin delta türevi alınırsa,

$$p^\Delta = \alpha_0^\Delta - \alpha_1^\Delta \leq f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) - h(t, \beta_0) - f(t, \alpha_0) \\ - g(t, \alpha_0) + h(t, \beta_0)$$

elde edilir. Yani $p^\Delta \leq 0$ ve $p(0) \leq 0$ olduğundan karşılaştırma teoremi olan Sonuç.3.2.7 den $p(t) \leq 0$ olur. Yani $\alpha_0 \leq \alpha_1$ dır. Benzer şekilde $\beta_1 \leq \beta_0$ olduğu gösterilecektir. Bunun için $p = \beta_1 - \beta_0$ tanımlansın. $p(0) = \beta_1(0) - \beta_0(0) \leq 0$ dır. Her tarafın delta türevi alınırsa

$$p^\Delta = \beta_1^\Delta - \beta_0^\Delta \leq [f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) - h(t, \alpha_0)] \\ - [f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) - h(t, \alpha_0)]$$

olur. $p^\Delta \leq 0$ ve $p(0) \leq 0$ olduğundan Sonuç.3.2.7 den $p(t) \leq 0$ olur. Yani $\beta_1 \leq \beta_0$ dır. Şimdi $\alpha_1 \leq \beta_1$ olduğu gösterilecektir. Bunun için $p = \alpha_1 - \beta_1$ tanımlansın. $p(0) = \alpha_1(0) - \beta_1(0) = 0$ dır.

$$p^\Delta = \alpha_1^\Delta - \beta_1^\Delta = f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) - h(t, \beta_0) - f(t, \beta_0) \\ - g(t, \beta_0) + h(t, \alpha_0)$$

elde edilir. f, g, h azalmayan fonksiyonlar ve $\alpha_0 \leq \beta_0$ olduğundan

$$p^\Delta \leq 0$$

olur. $p^\Delta \leq 0$ ve $p(0) \leq 0$ olduğundan $p(t) \leq 0$ olur. Yani $\alpha_1 \leq \beta_1$ olur. Şimdi $u \leq \beta_1$ olduğu gösterilecektir. $p = u - \beta_1$ olsun. $p(0) = u(0) - \beta_1(0) = 0$ dır.

$$p^\Delta = u^\Delta - \beta_1^\Delta = f(t, u) + g(t, u) - h(t, u) - f(t, \beta_0) - g(t, \beta_0) \\ + h(t, \alpha_0) \leq 0.$$

$p^\Delta \leq 0$ ve $p(0) \leq 0$ olduğundan $p(t) \leq 0$ olur. Yani $u \leq \beta_1$ elde edilir. $\alpha_1 \leq u$ olduğunu göstermek için $p = \alpha_1 - u$ alalım. $p(0) = \alpha_1(0) - u(0) = 0$ ve

$$p^\Delta = \alpha_1^\Delta - u^\Delta = f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) - h(t, \beta_0) - f(t, u) - g(t, u) \\ + h(t, u) \leq 0$$

olur. $p^\Delta \leq 0$ ve $p(0) \leq 0$ olduğundan $p(t) \leq 0$ olur. Yani $\alpha_1 \leq u$ olur. Böylece

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq u \leq \beta_1 \leq \beta_0$$

elde edilir. Bunu genelleylebilmek için tümevarım yöntemini kullanacağız. $\alpha_{k-1} \leq \alpha_k \leq u \leq \beta_k \leq \beta_{k-1}$ ifadesinin $k = 1$ için doğru olduğunu yukarıda gösterdik. Şimdi $k > 1$ için $\alpha_{k-1} \leq \alpha_k \leq u \leq \beta_k \leq \beta_{k-1}$ eşitsizliğinin doğru olduğunu kabul edelim. $\alpha_k \leq \alpha_{k+1} \leq u \leq \beta_{k+1} \leq \beta_k$ doğru olduğunu göstereceğiz. Bunun için $p = \beta_{k+1} - \beta_k$ tanımlansın. $p(0) = \beta_1(0) - \beta_0(0) = 0$ dır.

$$\begin{aligned} p^\Delta &= \beta_{k+1}^\Delta - \beta_k^\Delta \\ &\leq [f(t, \beta_k) + g(t, \beta_k) - h(t, \alpha_k)] \\ &\quad - [f(t, \beta_{k-1}) + g(t, \beta_{k-1}) - h(t, \alpha_{k-1})] \leq 0. \end{aligned}$$

$p^\Delta \leq 0$ ve $p(0) \leq 0$ olduğundan $p(t) \leq 0$ olur. Yani $\beta_{k+1} \leq \beta_k$ dır. $\alpha_k \leq \alpha_{k+1}$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için $p = \alpha_k - \alpha_{k+1}$ olsun. $p(0) = \alpha_k(0) - \alpha_{k+1}(0) = 0$ dır. $p = \alpha_k - \alpha_{k+1}$ ifadesinin delta türevi alınır,

$$\begin{aligned} p^\Delta &= \alpha_k^\Delta - \alpha_{k+1}^\Delta \\ &\leq f(t, \alpha_{k-1}) + g(t, \alpha_{k-1}) - h(t, \beta_{k-1}) \\ &\quad - f(t, \alpha_k) - g(t, \alpha_k) + h(t, \beta_k) \leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $p^\Delta \leq 0$ ve $p(0) \leq 0$ olduğundan $p(t) \leq 0$ olur. Yani $\alpha_k \leq \alpha_{k+1}$ dır. $\alpha_{k+1} \leq u$ olduğunu göstermek için $p = \alpha_{k+1} - u$ alalım. $p(0) = \alpha_{k+1}(0) - u(0) = 0$ ve

$$\begin{aligned} p^\Delta &= \alpha_{k+1}^\Delta - u^\Delta \\ &= f(t, \alpha_k) + g(t, \alpha_k) - h(t, \beta_k) - f(t, u) \\ &\quad - g(t, u) + h(t, u) \leq 0 \end{aligned}$$

olur. $p^\Delta \leq 0$ ve $p(0) \leq 0$ olduğundan $p(t) \leq 0$ olur. Yani $\alpha_{k+1} \leq u$ olur. Benzer şekilde $u \leq \beta_{k+1}$ olduğu gösterilecektir. $p = u - \beta_{k+1}$ olsun. $p(0) = u(0) - \beta_{k+1}(0) = 0$ dır.

$$\begin{aligned} p^\Delta &= u^\Delta - \beta_{k+1}^\Delta \\ &= f(t, u) + g(t, u) - h(t, u) - f(t, \beta_k) \\ &\quad - g(t, \beta_k) + h(t, \alpha_k) \leq 0. \end{aligned}$$

$p^4 \leq 0$ ve $p(0) \leq 0$ olduğundan Sonuç.3.2.7 den $p(t) \leq 0$ olur. Yani $u \leq \beta_{k+1}$ elde edilir. Böylece matematiksel induksiyon prensibiyle

$$\alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_m \leq \alpha_{m+1} \leq u \leq \beta_{m+1} \leq \beta_m \leq \dots \leq \beta_1 \leq \beta_0$$

sonucuna ulaşılır. Bu dizilerin düzgün yakınsaklığını göstermek için dizilerin düzgün sınırlı ve eşsüreklili olduğu gösterilecektir. α_0 ve β_0 sınırlı olduğundan her $t \in N$ için $|\alpha_0| \leq L_1$ ve $|\beta_0| \leq L_2$ olacak şekilde $L_1, L_2 > 0$ vardır. Her $m > 0$ için $\alpha_0 \leq \beta_m \leq \beta_0$ olduğundan dolayı

$$0 \leq |\beta_m(t) - \alpha_0(t)| \leq |\beta_0(t) - \alpha_0(t)|$$

yazılabilir. Böylece $|\beta_m(t)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ vardır. Bu ise $\{\beta_m(t)\}$ dizisinin düzgün sınırlı olduğunu gösterir. Benzer şekilde $\{\alpha_m(t)\}$ de düzgün sınırlı olduğu gösterilebilir. Şimdi $\{\beta_m(t)\}$ nin eşsüreklili olduğunu gösterelim. Bunun için $0 \leq t_1 \leq t_2$ ve $m > 0$ için

$$\begin{aligned} & |\beta_m(t_1) - \beta_m(t_2)| \\ &= \left| u_0 + \int_0^{t_1} [f(s, \beta_{m-1}(s)) + g(s, \beta_{m-1}(s)) - h(s, \alpha_{m-1}(s))] \Delta s \right. \\ &\quad \left. - u_0 - \int_0^{t_2} [f(s, \beta_{m-1}(s)) + g(s, \beta_{m-1}(s)) - h(s, \alpha_{m-1}(s))] \Delta s \right| \\ &= \left| \int_{t_2}^{t_1} [f(s, \beta_{m-1}(s)) + g(s, \beta_{m-1}(s)) - h(s, \alpha_{m-1}(s))] \Delta s \right| \\ &\leq \int_{t_2}^{t_1} |[f(s, \beta_{m-1}(s)) + g(s, \beta_{m-1}(s)) - h(s, \alpha_{m-1}(s))]| \Delta s \end{aligned}$$

elde edilir. $\{\beta_m(t)\}$ ve $\{\alpha_m(t)\}$ dizileri düzgün sınırlı ve $f(t, u), g(t, u), h(t, u)$ fonksiyonları sınırlı olduğundan m den bağımsız bir L vardır öyle ki

$$\begin{aligned} & |\beta_m(t_1) - \beta_m(t_2)| \\ &\leq \int_{t_2}^{t_1} |[f(s, \beta_{m-1}(s)) + g(s, \beta_{m-1}(s)) \\ &\quad - h(s, \alpha_{m-1}(s))]| \Delta s \leq L|t_1 - t_2| \end{aligned}$$

olur. Buradan her $\varepsilon > 0$ için $|t_1 - t_2| < \delta$ iken $|\beta_m(t_1) - \beta_m(t_2)| < \varepsilon$ sağlanacak şekilde $\delta = \frac{\varepsilon}{L} > 0$ seçilirse $\{\beta_m(t)\}$ eşsüreklidir. Benzer şekilde $\{\alpha_m(t)\}$ nin de eşsürekliliği olduğu gösterelim. $0 \leq t_1 \leq t_2$ ve $m > 0$ için

$$\begin{aligned}
& |\alpha_m(t_1) - \alpha_m(t_2)| \\
&= \left| u_0 + \int_0^{t_1} [f(s, \alpha_{m-1}(s)) + g(s, \alpha_{m-1}(s)) \right. \\
&\quad \left. - h(s, \beta_{m-1}(s))] \Delta s \right. \\
&\quad \left. - u_0 - \int_0^{t_2} [f(s, \alpha_{m-1}(s)) + g(s, \alpha_{m-1}(s)) \right. \\
&\quad \left. - h(s, \beta_{m-1}(s))] \Delta s \right| \\
&= \left| \int_{t_2}^{t_1} [f(s, \alpha_{m-1}(s)) + g(s, \alpha_{m-1}(s)) - h(s, \beta_{m-1}(s))] \Delta s \right| \\
&\leq \int_{t_2}^{t_1} |[f(s, \alpha_{m-1}(s)) + g(s, \alpha_{m-1}(s)) - h(s, \beta_{m-1}(s))] \Delta s|
\end{aligned}$$

elde edilir. $\{\beta_m(t)\}$ ve $\{\alpha_m(t)\}$ düzgün sınırlı ve $f(t, u), g(t, u), h(t, u)$ sınırlı olduğundan m den bağımsız bir L vardır öyle ki

$$\begin{aligned}
& |\alpha_m(t_1) - \alpha_m(t_2)| \\
&\leq \int_{t_2}^{t_1} |[f(s, \beta_{m-1}(s)) + g(s, \beta_{m-1}(s)) \\
&\quad - h(s, \alpha_{m-1}(s))] \Delta s| \leq L|t_1 - t_2|
\end{aligned}$$

dır. Buradan $\varepsilon > 0$ için $|t_1 - t_2| < \delta$ iken $|\alpha_m(t_1) - \alpha_m(t_2)| < \varepsilon$ sağlanacak şekilde $\delta = \frac{\varepsilon}{L} > 0$ seçilirse $\{\alpha_m(t)\}$ eşsüreklidir. Arzela-Ascoli teoremine göre $\{\alpha_{m_k}(t)\}$ ve $\{\beta_{m_k}(t)\}$ alt dizileri (4.1) denkleminin ekstremal çözümlerine düzgün monoton yakınsar. Yani $\{\alpha_{m_k}(t)\} \rightarrow \rho$ ve $\{\beta_{m_k}\} \rightarrow r$ dir. Son olarak $\rho(t)$ ve $r(t)$ nin (4.1) in III. tip çözüm çifti olduğu gösterilecektir. $\{\alpha_{m_k}(t)\} \rightarrow \rho$ ve $\{\beta_{m_k}\} \rightarrow r$ olduğundan sırasıyla

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m(t) = \rho(t),$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m(t) = r(t)$$

olduğu açıktır (4.19) sisteminin 0 dan t ye integrali alındığında,

$$\alpha_{m+1}(t) = u_0 + \int_0^t [f(s, \alpha_m(s)) + g(s, \alpha_m(s)) - h(s, \beta_m(s))] \Delta s,$$

$$\begin{aligned} \beta_{m+1}(t) = u_0 + \int_0^t [f(s, \beta_{m-1}(s)) + g(s, \beta_{m-1}(s)) \\ - h(s, \alpha_{m-1}(s))] \Delta s \end{aligned}$$

olur. $m \rightarrow \infty$ iken limit alınır,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_{m+1}(t) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ u_0 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t [f(s, \alpha_m(s)) + g(s, \alpha_m(s)) - h(s, \beta_m(s))] \Delta s \right\} \\ \rho &= u_0 + \int_0^t [f(s, \rho(s)) + g(s, \rho(s)) - h(s, r(s))] \Delta s \end{aligned}$$

elde edilir. Her tarafın delta türevi alındığında,

$$\rho^\Delta = f(t, \rho) + g(t, \rho) - h(t, r)$$

olur. Bu ise ρ nin (4.1) in bir çözümü olduğunu gösterir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_{m+1}(t) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ u_0 + \int_0^t [f(s, \beta_{m-1}(s)) + g(s, \beta_{m-1}(s)) \right. \\ &\quad \left. - h(s, \alpha_{m-1}(s))] \Delta s \right\} \\ r &= u_0 + \int_0^{t_1} [f(s, r(s)) + g(s, r(s)) - h(s, \rho(s))] \Delta s \end{aligned}$$

elde edilir. Her tarafın delta türevi alındığında,

$$r^\Delta = f(t, r) + g(t, r) - h(t, \rho)$$

olur. Yani r , (4.1) in bir çözümüdür. Dolayısıyla ρ ve r , (4.1) in III. tip çözüm çiftidir.

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_m \leq \alpha_{m+1} \leq u \leq \beta_{m+1} \leq \beta_m \leq \dots \leq \beta_1 \leq \beta_0$$

ifadesinde $m \rightarrow \infty$ iken limit alındığında

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \rho \leq u \leq r \leq \dots \leq \beta_1 \leq \beta_0$$

olur. Bu ise ρ nin minimal ve r nin maksimal çözüm çifti olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 4.1.5. Şimdi (4.1) başlangıç değer problemini göz önüne alarak

$$u^A(t) = \frac{u^4}{2} + \frac{u^2}{2} - \frac{u^2}{3}, u(0) = 1, t \in [0,1] \quad (4.20)$$

dinamik BDP ele alalım. Burada $f(t, u) = \frac{u^4}{2}, g(t, u) = \frac{u^2}{2}, h(t, u) = \frac{u^2}{3}$ dir. Her $t \in [0,1]$ için $\alpha_0(t) = -1, \beta_0(t) = \frac{1}{2}$ olsun.

$$\alpha_0^A(t) = 0 \leq f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) - h(t, \beta_0) = \frac{11}{12},$$

$$\beta_0^A(t) = 0 \geq f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) - h(t, \alpha_0) = -\frac{17}{96}$$

olur. Böylece $\alpha_0(t), \beta_0(t)$ (4.1) in III. tip alt-üst çözümleridir. Eğer $\alpha_1(t), \beta_1(t)$ çözümleri aşağıdaki gibi seçilirse,

$$\alpha_1(t) = \frac{11}{12}t - 1, \beta_1(t) = -\frac{17}{96}t + \frac{1}{2}$$

$\alpha_0(0) \leq \alpha_1(0)$ ve $\alpha_0^A \leq \alpha_1^A$ olduğundan $\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t)$,

$\beta_1(0) \leq \beta_0(0)$ ve $\beta_1^A \leq \beta_0^A$ olduğundan $\beta_1(t) \leq \beta_0(t)$ ve

$\alpha_1(0) \leq \beta_1(0)$ ve $\alpha_1^A \leq \beta_1^A$ olduğundan $\alpha_1(t) \leq \beta_1(t)$ dir. Buradan

$$\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t) \leq \beta_1(t) \leq \beta_0(t), t \in [0,1]$$

elde edilir. Benzer şekilde aynı adımlar takip edilerek $\alpha_2(t), \alpha_3(t), \dots, \alpha_n(t)$ ve $\beta_2(t), \beta_3(t), \dots, \beta_n(t)$ çözümleri de bulunabilir. Böylece Teorem 4.1.4 ün bütün

şartları sağlandığından bu aralıkta minimal ve maksimal çözümlere yakınsayan monoton dizilerinden bahsedebiliriz.





5. ZAMAN SKALASINDA KUASİLİNEERİZASYON METODU

5.1. Giriş

Kuasilineerizasyon yöntemi, lineer olmayan denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmede kullanılabilecek bir başka analitik yaklaşımdır. Burada amaç, problemin çözümleri için alt ve üst sınırlar elde etmek ve maksimum ya da minimum işlem yardımıyla çözümün bir gösterimini elde etmektir. Bu temel fikri lineer olmayan bir problem üzerinde görelim:

$$\frac{du}{dt} = \mathcal{A}(u)$$

formunda ve $u(0) = c$ başlangıç koşuluna sahip olsun. Ayrıca $\mathcal{A}(u)$ nun

$$\mathcal{A}(u) = \max_v \mathcal{B}(u, v)$$

şeklinde yazılabileceğini varsayalım.

$$\frac{du}{dt} = \max_v \mathcal{B}(u, v)$$

olur. Dolayısıyla buradan her v fonksiyonu için

$$\frac{du}{dt} \geq \mathcal{B}(u, v)$$

yazılır ki burada; v henüz belirlenmemiş bir fonksiyon ve $w(v, t)$,

$$\frac{dw}{dt} = \mathcal{B}(w, v), w(0) = c$$

probleminin çözümü olmak üzere

$$u \geq w(v, t)$$

sonucunu vermektedir. v nin uygun bir seçimiyle u için istenen bir alt sınır elde edilebilir. Doğaldır ki bu tekniğin en önemli uygulaması $\mathcal{B}(w, v)$ nin w ye göre nerede lineer olduğudur. Dolayısıyla bu prosedüre kuasilineerizasyon denir. Bu fikirde, Riccati gibi bazı özel denklemler için uygulayıp monotonluk ve hızlı yakınsaklık gibi özelliklere sahip bir ardışık yaklaşımlar yöntemi için bir baz oluşturmaya çalışılır. Bu yöntemin ileriki aşamada belli bir sınıf kısmi diferansiyel denklemlere genişlemesi de mümkündür.

İncelenen teoremlerde, dinamik denklemlerde alt ve üst çözüm tekniği ve karşılaştırma teoremleri kullanılarak bir başlangıç değer problemi için kuazilineerizasyon metodu geliştirildi. Uygun şartlar altında, orijinal lineer olmayan denklemin tek çözümüne monoton ve düzgün yakınsayan diziler elde edildi ve elde edilen bu yakınsamaların hızı incelendi.

$$u^A = f(t, u) + g(t, u) + h(t, u), u(0) = u_0 \quad (5.1)$$

başlangıç değer problemini ele alalım.

$$\Omega_0 = \{(t, u) : \alpha_0(t) \leq u \leq \beta_0(t) \ t \in T\}$$

ve $\alpha_0(t), \beta_0(t) \in C_{rd}[T, R]$ olmak üzere $\alpha_0(t) \leq \beta_0(t)$ ve $f(t, u), g(t, u), h(t, u) \in C[\Omega_0, R]$ dır.

5.2. Doğal Tipten Alt-Üst Çözüm Kullanılarak Kuasilineerizasyon Metodu

Teorem 5.1. (A_1) $\alpha_0(t), \beta_0(t) \in C_{rd}[T, R]$ (5.1) in doğal tipten alt-üst çözüm çifti olsun.

(A_2) Ω_0 da $f(t, u)$ fonksiyonu konveks, $g(t, u)$ fonksiyonu, konveks $\varphi(t, u)$ fonksiyonu yardımıyla konvekslenebilir ve $h(t, u)$ fonksiyonu ise konkav olsun. O zaman $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ dizileri var ve (5.1) in tek çözümüne monoton ve düzgün yakınsar ve bu yakınsama quadratikdir.

İspat. $f(t, u), g(t, u), h(t, u)$ fonksiyonlarının $\alpha_0(t) \leq u_2 \leq u_1 \leq \beta_0(t)$ için $L > 0$ olmak üzere

$$-L(u_1 - u_2) \leq f(t, u_1) - f(t, u_2) \leq L(u_1 - u_2)$$

$$-L(u_1 - u_2) \leq g(t, u_1) - g(t, u_2) \leq L(u_1 - u_2)$$

$$-L(u_1 - u_2) \leq h(t, u_1) - h(t, u_2) \leq L(u_1 - u_2) \quad (5.2)$$

Lipschitz şartlarını sağladığı açıktır. (A_2) den $u, v \in \Omega_0$ olmak üzere $u \geq v$ için, $f(t, u)$ konveks olduğundan

$$f(t, u) \geq f(t, v) + f_u(t, v)(u - v), \quad (5.3)$$

$g(t, u) + \varphi(t, u)$ konveks olduğundan

$$\begin{aligned} g(t, u) &\geq g(t, v) + [g_u(t, v) + \varphi_u(t, v)](u - v) \\ &\quad - [\varphi(t, u) - \varphi(t, v)], \end{aligned} \quad (5.4)$$

ve $h(t, u)$ konkav olduğundan

$$h(t, u) \geq h(t, v) + h_u(t, v)(u - v) \quad (5.5)$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} u^\Delta &= w(t, \alpha_0, \beta_0; u) \\ &= f(t, \alpha_0) + f_u(t, \alpha_0)(u - \alpha_0) + g(t, \alpha_0) \\ &\quad + [g_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0)](u - \alpha_0) \\ &\quad - [\varphi(t, u) - \varphi(t, \alpha_0)] + h(t, \alpha_0) \\ &\quad + h_u(t, \beta_0)(u - \alpha_0), u(0) = u_0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

ve

$$\begin{aligned} v^\Delta &= W(t, \alpha_0, \beta_0; v) \\ &= f(t, \beta_0) + f_u(t, \alpha_0)(v - \beta_0) + g(t, \beta_0) \\ &\quad + [g_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0)](v - \beta_0) \\ &\quad - [\varphi(t, v) - \varphi(t, \beta_0)] + h(t, \beta_0) \\ &\quad + h_u(t, \beta_0)(v - \beta_0), v(0) = u_0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

yardımcı lineer BDP ele alalım. (A_1) den $\alpha_0^A \leq f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) + h(t, \alpha_0)$ olduğu biliniyor. (5.6) dan

$$f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) + h(t, \alpha_0) = w(t, \alpha_0, \beta_0; \alpha_0)$$

elde edilir. Yani

$$\alpha_0^A \leq f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) + h(t, \alpha_0) = w(t, \alpha_0, \beta_0; \alpha_0)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\alpha_0^A \leq w(t, \alpha_0, \beta_0; \alpha_0)$$

olur. Benzer şekilde, (A_1) den $\beta_0^A \geq f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) + h(t, \beta_0)$ olduğu biliniyor. Ayrıca (5.3)–(5.5) ten sırasıyla

$$f(t, \beta_0) \geq f(t, \alpha_0) + f_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0),$$

$$\begin{aligned} g(t, \beta_0) &\geq g(t, \alpha_0) + [g_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0)](\beta_0 - \alpha_0) \\ &\quad - [\varphi(t, \beta_0) - \varphi(t, \alpha_0)], \end{aligned}$$

$$h(t, \beta_0) \geq h(t, \alpha_0) + h_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \alpha_0)$$

yazılabilir. Elde edilen bu eşitsizlikler yukarıda yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \beta_0^A &\geq f(t, \alpha_0) + f_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0) + g(t, \alpha_0) \\ &\quad + [g_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0)](\beta_0 - \alpha_0) \\ &\quad - [\varphi(t, \beta_0) - \varphi(t, \alpha_0)] + h(t, \alpha_0) \\ &\quad + h_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \alpha_0) \end{aligned}$$

olur. (5.6) dan

$$\begin{aligned}
w(t, \alpha_0, \beta_0; \beta_0) &= f(t, \alpha_0) + f_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0) + g(t, \alpha_0) \\
&+ [g_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0)](\beta_0 - \alpha_0) \\
&- [\varphi(t, \beta_0) - \varphi(t, \alpha_0)] + h(t, \alpha_0) \\
&+ h_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \alpha_0)
\end{aligned}$$

elde edilebileceğinden

$$\beta_0^A \geq w(t, \alpha_0, \beta_0; \beta_0)$$

olur. Yani α_0, β_0 , (5.6) denkleminin alt-üst çözümleridir. Teorem 3.3.8 den (5.6) nın $\alpha_1(t)$ şeklinde tek çözümü var ve $\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t) \leq \beta_0(t)$ dır.

Benzer şekilde, α_0 ve β_0 ın (5.7) denkleminin alt-üst çözümleri olduğu gösterilecektir.

(A₁) den $\alpha_0^A \leq f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) + h(t, \alpha_0)$ olduğu biliniyor. Ayrıca (5.3) ten

$$f(t, \beta_0) \geq f(t, \alpha_0) + f_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0)$$

yazılır. Buradan ise

$$f(t, \alpha_0) \leq f(t, \beta_0) + f_u(t, \alpha_0)(\alpha_0 - \beta_0)$$

elde edilir. (5.4) ten

$$\begin{aligned}
g(t, \beta_0) &\geq g(t, \alpha_0) + [g_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0)](\beta_0 - \alpha_0) \\
&- [\varphi(t, \beta_0) - \varphi(t, \alpha_0)]
\end{aligned}$$

yazılır. Buradan ise

$$\begin{aligned}
g(t, \alpha_0) &\leq g(t, \beta_0) + [g_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0)](\alpha_0 - \beta_0) \\
&- [\varphi(t, \alpha_0) - \varphi(t, \beta_0)]
\end{aligned}$$

elde edilir ve (5.5) ten

$$h(t, \beta_0) \geq h(t, \alpha_0) + h_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \alpha_0)$$

Eşitsizliğinden

$$h(t, \alpha_0) \leq h(t, \beta_0) + h_u(t, \beta_0)(\alpha_0 - \beta_0)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikler yukarıda yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \alpha_0^A &\leq f(t, \beta_0) + f_u(t, \alpha_0)(\alpha_0 - \beta_0) + g(t, \beta_0) \\ &\quad + [g_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0)](\alpha_0 - \beta_0) \\ &\quad - [\varphi(t, \alpha_0) - \varphi(t, \beta_0)] + h(t, \beta_0) \\ &\quad + h_u(t, \beta_0)(\alpha_0 - \beta_0) \end{aligned}$$

olur. (5.7) den

$$\begin{aligned} W(t, \alpha_0, \beta_0; \alpha_0) &= f(t, \beta_0) + f_u(t, \alpha_0)(\alpha_0 - \beta_0) + g(t, \beta_0) \\ &\quad + [g_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0)](\alpha_0 - \beta_0) \\ &\quad - [\varphi(t, \alpha_0) - \varphi(t, \beta_0)] + h(t, \beta_0) \\ &\quad + h_u(t, \beta_0)(\alpha_0 - \beta_0) \end{aligned}$$

Olduğundan

$$\alpha_0^A \leq W(t, \alpha_0, \beta_0; \alpha_0)$$

olur. Benzer şekilde, $\beta_0^A \geq f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) + h(t, \beta_0)$ eşitsizliği göz önüne alındığında (5.7) den

$$W(t, \alpha_0, \beta_0; \beta_0) = f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) + h(t, \beta_0).$$

Yani

$$\beta_0^A \geq f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) + h(t, \beta_0) = W(t, \alpha_0, \beta_0; \beta_0).$$

Dolayısıyla,

$$\beta_0^A \geq W(t, \alpha_0, \beta_0; \beta_0)$$

olur. Böylece α_0, β_0 (5.7) denkleminin alt-üst çözümleridir. Teorem 3.3.8 den (5.7) nin $\beta_1(t)$ şeklinde tek çözümü var ve $\alpha_0(t) \leq \beta_1(t) \leq \beta_0(t)$ dır. Şimdi $\alpha_1(t) \leq \beta_1(t)$ olduğu gösterilecektir.

(5.3) ten

$$f(t, \alpha_0) \leq f(t, \alpha_1) + f_u(t, \alpha_0)(\alpha_0 - \alpha_1)$$

(5.4) ten

$$\begin{aligned} g(t, \alpha_0) &\leq g(t, \alpha_1) + [g_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0)](\alpha_0 - \alpha_1) \\ &\quad - [\varphi(t, \alpha_0) - \varphi(t, \alpha_1)] \end{aligned}$$

ve (5.5) ten

$$h(t, \alpha_0) \leq h(t, \alpha_1) + h_u(t, \alpha_1)(\alpha_0 - \alpha_1)$$

yazılabilir. (5.6) dan

$$\begin{aligned} \alpha_1^A &= w(t, \alpha_0, \beta_0; \alpha_1) \\ &= f(t, \alpha_0) + f_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) + g(t, \alpha_0) \\ &\quad + [g_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0)] \\ &\quad + [g_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0)](\alpha_1 - \alpha_0) \\ &\quad - [\varphi(t, \alpha_1) - \varphi(t, \alpha_0)] + h(t, \alpha_0) \\ &\quad + h_u(t, \beta_0)(\alpha_1 - \alpha_0) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarda elde edilen eşitsizlikler yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \alpha_1^A &\leq f(t, \alpha_1) + f_u(t, \alpha_0)(\alpha_0 - \alpha_1) + f_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) + g(t, \alpha_1) \\ &\quad + [g_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0)](\alpha_0 - \alpha_1) \\ &\quad - [\varphi(t, \alpha_0) - \varphi(t, \alpha_1)] \\ &\quad + [g_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0)](\alpha_1 - \alpha_0) \\ &\quad - [\varphi(t, \alpha_1) - \varphi(t, \alpha_0)] + h(t, \alpha_1) \\ &\quad + h_u(t, \alpha_1)(\alpha_0 - \alpha_1) + h_u(t, \beta_0)(\alpha_1 - \alpha_0) \end{aligned}$$

olur. Burada baz terimler sadeleştirildiğinde

$$\alpha_1^4 \leq f(t, \alpha_1) + g(t, \alpha_1) + h(t, \alpha_1) \\ + (\alpha_1 - \alpha_0)[h_u(t, \beta_0) - h_u(t, \alpha_1)]$$

elde edilir. Burada $h(t, u)$ fonksiyonunun konkav özelliği kullanılarak ve $\beta_0 \geq \alpha_1$ olduğundan, $[h_u(t, \beta_0) - h_u(t, \alpha_1)] \leq 0$ olur. Ayrıca $(\alpha_1 - \alpha_0) \geq 0$ olduğu da bilindiğinden

$$(\alpha_1 - \alpha_0)[h_u(t, \beta_0) - h_u(t, \alpha_1)] \leq 0$$

olur. Böylece

$$\alpha_1^4 \leq f(t, \alpha_1) + g(t, \alpha_1) + h(t, \alpha_1)$$

elde edilir. Benzer şekilde $\beta_0 \geq \beta_1$ olduğundan (5.3), (5.4) ve (5.5) göz önüne alındığında

$$f(t, \beta_0) \geq f(t, \beta_1) + f_u(t, \beta_1)(\beta_0 - \beta_1),$$

$$g(t, \beta_0) \geq g(t, \beta_1) + [g_u(t, \beta_1) + \varphi_u(t, \beta_1)](\beta_0 - \beta_1) \\ - [\varphi(t, \beta_0) - \varphi(t, \beta_1)],$$

$$h(t, \beta_0) \geq h(t, \beta_1) + h_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \beta_1)$$

elde edilir. Ayrıca (5.7) den

$$\beta_1^4 = W(t, \alpha_0, \beta_0; \beta_1) \\ = f(t, \beta_0) + f_u(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0) + g(t, \beta_0) \\ + [g_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0)](\beta_1 - \beta_0) \\ - [\varphi(t, \beta_1) - \varphi(t, \beta_0)] + h(t, \beta_1) \\ + h_u(t, \beta_0)(\beta_1 - \beta_0)$$

olur. Yukarıda elde edilen eşitsizlikler yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
\beta_1^A \geq & f(t, \beta_1) + f_u(t, \beta_1)(\beta_0 - \beta_1) + f_u(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0) + g(t, \beta_1) \\
& + [g_u(t, \beta_1) + \varphi_u(t, \beta_1)](\beta_0 - \beta_1) \\
& - [\varphi(t, \beta_0) - \varphi(t, \beta_1)] \\
& + [g_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0)](\beta_1 - \beta_0) \\
& - [\varphi(t, \beta_1) - \varphi(t, \beta_0)] + h(t, \beta_1) \\
& + h_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \beta_1) + h_u(t, \beta_0)(\beta_1 - \beta_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada bazı terimler birbirini götürdüğünde,

$$\begin{aligned}
\beta_1^A \geq & f(t, \beta_1) + (\beta_0 - \beta_1)[f_u(t, \beta_1) - f_u(t, \alpha_0)] + g(t, \beta_1) \\
& + (\beta_0 - \beta_1)[g_u(t, \beta_1) + \varphi_u(t, \beta_1) - g_u(t, \alpha_0) \\
& - \varphi_u(t, \alpha_0)] + h(t, \beta_1) \\
= & f(t, \beta_1) + (\beta_0 - \beta_1)[f_u(t, \beta_1) - f_u(t, \alpha_0)] + g(t, \beta_1) \\
& + (\beta_0 - \beta_1)[(g_u(t, \beta_1) + \varphi_u(t, \beta_1)) \\
& - (g_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0))] + h(t, \beta_1)
\end{aligned}$$

olur. $f(t, u)$ konveks özelliğinden, yani f_u nun monoton azalmayan özelliğinden ve $\beta_1 \geq \alpha_0$ olduğundan, $[f_u(t, \beta_1) - f_u(t, \alpha_0)] \geq 0$ dır. Ayrıca $(\beta_0 - \beta_1) \geq 0$ olduğundan

$(\beta_0 - \beta_1)[f_u(t, \beta_1) - f_u(t, \alpha_0)] \geq 0$ olur. Yine burada $g(t, u) + \varphi(t, u)$ konveks özelliğinden,

$$[(g_u(t, \beta_1) + \varphi_u(t, \beta_1)) - (g_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0))] \geq 0$$

dır.

$$(\beta_0 - \beta_1)[(g_u(t, \beta_1) + \varphi_u(t, \beta_1)) - (g_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0))] \geq 0$$

olur. Sonuç olarak

$$\beta_1^A \geq f(t, \beta_1) + g(t, \beta_1) + h(t, \beta_1)$$

elde edilir. Böylece α_1 ve β_1 alt-üst çözümler olur. Ayrıca Lipshitz şartları da sağlandığından Teorem 3.2.6 dan $\alpha_1(0) \leq \beta_1(0)$ olduğundan $\alpha_1(t) \leq \beta_1(t)$ olur. Sonuç olarak

$$\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t) \leq \beta_1(t) \leq \beta_0(t)$$

olur. Şimdi aşağıdaki başlangıç değer problemlerini ele alalım.

$$\begin{aligned} u^\Delta &= w(t, \alpha_1, \beta_1; u) \\ &= f(t, \alpha_1) + f_u(t, \alpha_1)(u - \alpha_1) + g(t, \alpha_1) \\ &\quad + [g_u(t, \alpha_1) + \varphi_u(t, \alpha_1)](u - \alpha_1) \\ &\quad - [\varphi(t, u) - \varphi(t, \alpha_1)] + h(t, \alpha_1) \\ &\quad + h_u(t, \beta_1)(u - \alpha_1), u(0) = u_0, \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} v^\Delta &= W(t, \alpha_1, \beta_1; v) \\ &= f(t, \beta_1) + f_u(t, \alpha_1)(v - \beta_1) + g(t, \beta_1) \\ &\quad + [g_u(t, \alpha_1) + \varphi_u(t, \alpha_1)](v - \beta_1) \\ &\quad - [\varphi(t, v) - \varphi(t, \beta_1)] + h(t, \beta_1) \\ &\quad + h_u(t, \beta_1)(v - \beta_1), v(0) = u_0. \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\alpha_1^\Delta \leq f(t, \alpha_1) + g(t, \alpha_1) + h(t, \alpha_1) = w(t, \alpha_1, \beta_1; \alpha_1)$$

olduğu aşikârdır. Yani

$$\alpha_1^\Delta \leq w(t, \alpha_1, \beta_1; \alpha_1)$$

olur.

(5.3), (5.4) ve (5.5) ten sırasıyla

$$f(t, \beta_1) \geq f(t, \alpha_1) + f_u(t, \alpha_1)(\beta_1 - \alpha_1),$$

$$\begin{aligned} g(t, \beta_1) &\geq g(t, \alpha_1) + [g_u(t, \alpha_1) + \varphi_u(t, \alpha_1)](\beta_1 - \alpha_1) \\ &\quad - [\varphi(t, \beta_1) - \varphi(t, \alpha_1)], \end{aligned}$$

$$h(t, \beta_1) \geq h(t, \alpha_1) + h_u(t, \beta_1)(\beta_1 - \alpha_1)$$

elde edilir. $\beta_1^A \geq f(t, \beta_1) + g(t, \beta_1) + h(t, \beta_1)$ olduğu aşikar. Burada yukarıda elde edilen eşitsizlikler yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \beta_1^A &\geq f(t, \beta_1) + g(t, \beta_1) + h(t, \beta_1) \\ &\geq f(t, \alpha_1) + f_u(t, \alpha_1)(\beta_1 - \alpha_1) + g(t, \alpha_1) \\ &\quad + [g_u(t, \alpha_1) + \varphi_u(t, \alpha_1)](\beta_1 - \alpha_1) \\ &\quad - [\varphi(t, \beta_1) - \varphi(t, \alpha_1) + h(t, \alpha_1) \\ &\quad + h_u(t, \beta_1)(\beta_1 - \alpha_1)] = w(t, \alpha_1, \beta_1; \beta_1) \end{aligned}$$

Sonuç olarak $\beta_1^A \geq w(t, \alpha_1, \beta_1; \beta_1)$ dır. Yani α_1 ve β_1 sırasıyla (5.8) in alt-üst çözümlerdir. Teorem 3.3.8 gereği (5.8) lineer denkleminin bir tek $\alpha_2(t)$ çözümü var ve $\alpha_1(t) \leq \alpha_2(t) \leq \beta_1(t)$ dır. Şimdi ise α_1 ve β_1 in (5.9) un alt-üst çözümleri olduğu gösterilip teorem gereği β_2 nin varlığı gösterilecektir.

$$\alpha_1^A \leq f(t, \alpha_1) + g(t, \alpha_1) + h(t, \alpha_1)$$

olduğu aşikar. (5.3), (5.4) ve (5.5) ten sırasıyla

$$f(t, \alpha_1) \leq f(t, \beta_1) + f_u(t, \alpha_1)(\alpha_1 - \beta_1)$$

$$\begin{aligned} g(t, \alpha_1) &\leq g(t, \beta_1) + [g_u(t, \alpha_1) + \varphi_u(t, \alpha_1)](\alpha_1 - \beta_1) \\ &\quad - [\varphi(t, \alpha_1) - \varphi(t, \beta_1)] \end{aligned}$$

$$h(t, \alpha_1) \leq h(t, \beta_1) + h_u(t, \beta_1)(\alpha_1 - \beta_1)$$

yazılabilir. Elde edilen bu eşitsizlikler yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \alpha_1^A &\leq f(t, \alpha_1) + g(t, \alpha_1) + h(t, \alpha_1) \\ &\leq f(t, \beta_1) + f_u(t, \alpha_1)(\alpha_1 - \beta_1) + g(t, \beta_1) \\ &\quad + [g_u(t, \alpha_1) + \varphi_u(t, \alpha_1)](\alpha_1 - \beta_1) \\ &\quad - [\varphi(t, \alpha_1) - \varphi(t, \beta_1)] + h(t, \beta_1) \\ &\quad + h_u(t, \beta_1)(\alpha_1 - \beta_1) = W(t, \alpha_1, \beta_1; \beta_1). \end{aligned}$$

Yani $\alpha_1^A \leq W(t, \alpha_1, \beta_1; \beta_1)$ alt çözümdür. Benzer şekilde

$$\beta_1^A \geq f(t, \beta_1) + g(t, \beta_1) + h(t, \beta_1) = W(t, \alpha_1, \beta_1; \beta_1)$$

olduğundan $\beta_1^A \geq W(t, \alpha_1, \beta_1; \beta_1)$ üst çözümdür. Böylece Teorem 3.3.8 den (5.9) lineer denkleminin bir tek $\beta_2(t)$ çözümü var ve $\alpha_1(t) \leq \beta_2(t) \leq \beta_1(t)$ dir. Şimdi $\alpha_2(t) \leq \beta_2(t)$ olduğu gösterilecektir. (5.8) den

$$\begin{aligned} \alpha_2^A &= w(t, \alpha_1, \beta_1; \alpha_2) \\ &= f(t, \alpha_1) + f_u(t, \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1) + g(t, \alpha_1) \\ &\quad + [g_u(t, \alpha_1) + \varphi_u(t, \alpha_1)] \\ &\quad + [g_u(t, \alpha_1) + \varphi_u(t, \alpha_1)](\alpha_2 - \alpha_1) \\ &\quad - [\varphi(t, \alpha_2) - \varphi(t, \alpha_1)] + h(t, \alpha_1) \\ &\quad + h_u(t, \beta_1)(\alpha_2 - \alpha_1) \end{aligned}$$

elde edilir. (5.3), (5.4) ve (5.5) ten sırasıyla

$$f(t, \alpha_1) \leq f(t, \alpha_2) + f_u(t, \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$\begin{aligned} g(t, \alpha_1) &\leq g(t, \alpha_2) + [g_u(t, \alpha_1) + \varphi_u(t, \alpha_1)](\alpha_1 - \alpha_2) \\ &\quad - [\varphi(t, \alpha_1) - \varphi(t, \alpha_2)] \end{aligned}$$

$$h(t, \alpha_1) \leq h(t, \alpha_2) + h_u(t, \beta_1)(\alpha_1 - \alpha_2)$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitsizlikler yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
\alpha_2^A &= w(t, \alpha_1, \beta_1; \alpha_2) \\
&= f(t, \alpha_1) + f_u(t, \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1) + g(t, \alpha_1) \\
&\quad + [g_u(t, \alpha_1) + \varphi_u(t, \alpha_1)] \\
&\quad + [g_u(t, \alpha_1) + \varphi_u(t, \alpha_1)](\alpha_2 - \alpha_1) \\
&\quad - [\varphi(t, \alpha_2) - \varphi(t, \alpha_1)] + h(t, \alpha_1) \\
&\quad + h_u(t, \beta_1)(\alpha_2 - \alpha_1) \\
&\leq f(t, \alpha_2) + f_u(t, \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2) + f_u(t, \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1) \\
&\quad + g(t, \alpha_2) + [g_u(t, \alpha_1) + \varphi_u(t, \alpha_1)](\alpha_1 - \alpha_2) \\
&\quad - [\varphi(t, \alpha_1) - \varphi(t, \alpha_2)] \\
&\quad + [g_u(t, \alpha_1) + \varphi_u(t, \alpha_1)](\alpha_2 - \alpha_1) \\
&\quad - [\varphi(t, \alpha_2) - \varphi(t, \alpha_1)] + h(t, \alpha_2) \\
&\quad + h_u(t, \beta_1)(\alpha_1 - \alpha_2) + h_u(t, \beta_1)(\alpha_2 - \alpha_1)
\end{aligned}$$

olur. Bazı terimler sadeleştirilirse,

$$\alpha_2^A \leq f(t, \alpha_2) + g(t, \alpha_2) + h(t, \alpha_2)$$

elde edilir. Benzer şekilde, (5.9) dan

$$\begin{aligned}
\beta_2^A &= W(t, \alpha_1, \beta_1; \beta_2) \\
&= f(t, \beta_1) + f_u(t, \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1) + g(t, \beta_1) \\
&\quad + [g_u(t, \alpha_1) + \varphi_u(t, \alpha_1)](\beta_2 - \beta_1) \\
&\quad - [\varphi(t, \beta_2) - \varphi(t, \beta_1)] + h(t, \beta_1) \\
&\quad + h_u(t, \beta_1)(\beta_2 - \beta_1)
\end{aligned}$$

olur. (5.3)–(5.5) ten sırasıyla

$$f(t, \beta_1) \geq f(t, \beta_2) + f_u(t, \beta_2)(\beta_1 - \beta_2)$$

$$\begin{aligned}
g(t, \beta_1) &\geq g(t, \beta_2) + [g_u(t, \beta_2) + \varphi_u(t, \beta_2)](\beta_1 - \beta_2) \\
&\quad - [\varphi(t, \beta_1) - \varphi(t, \beta_2)]
\end{aligned}$$

$$h(t, \beta_1) \geq h(t, \beta_2) + h_u(t, \beta_1)(\beta_1 - \beta_2)$$

eşitsizlikleri yukarda yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\beta_2^A &= f(t, \beta_1) + f_u(t, \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1) + g(t, \beta_1) \\
&\quad + [g_u(t, \alpha_1) + \varphi_u(t, \alpha_1)](\beta_2 - \beta_1) \\
&\quad - [\varphi(t, \beta_2) - \varphi(t, \beta_1)] + h(t, \beta_1) \\
&\quad + h_u(t, \beta_1)(\beta_2 - \beta_1) \\
&\geq f(t, \beta_2) + f_u(t, \beta_2)(\beta_1 - \beta_2) + f_u(t, \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1) \\
&\quad + g(t, \beta_2) + [g_u(t, \beta_2) + \varphi_u(t, \beta_2)](\beta_1 - \beta_2) \\
&\quad - [\varphi(t, \beta_1) - \varphi(t, \beta_2)] \\
&\quad + [g_u(t, \alpha_1) + \varphi_u(t, \alpha_1)](\beta_2 - \beta_1) \\
&\quad - [\varphi(t, \beta_2) - \varphi(t, \beta_1)] + h(t, \beta_2) \\
&\quad + h_u(t, \beta_1)(\beta_1 - \beta_2) + h_u(t, \beta_1)(\beta_2 - \beta_1)
\end{aligned}$$

olur. Baz terimler sadeleştiğinde

$$\begin{aligned}
\beta_2^A &\geq f(t, \beta_2) + (\beta_1 - \beta_2)[f_u(t, \beta_2) - f_u(t, \alpha_1)] + g(t, \beta_2) \\
&\quad + (\beta_1 - \beta_2)[(g_u(t, \beta_2) + \varphi_u(t, \beta_2)) \\
&\quad - (g_u(t, \alpha_1) + \varphi_u(t, \alpha_1))] + h(t, \beta_2).
\end{aligned}$$

Burada $f(t, u)$ konveks özelliğinden,

$$[f_u(t, \beta_2) - f_u(t, \alpha_1)] \geq 0$$

ve

$$(\beta_1 - \beta_2)[f_u(t, \beta_2) - f_u(t, \alpha_1)] \geq 0$$

olur. Benzer şekilde $g(t, u) + \varphi(t, u)$ konveks özelliğinden,

$$[(g_u(t, \beta_2) + \varphi_u(t, \beta_2)) - (g_u(t, \alpha_1) + \varphi_u(t, \alpha_1))] \geq 0$$

ve

$$(\beta_1 - \beta_2)[(g_u(t, \beta_2) + \varphi_u(t, \beta_2)) - (g_u(t, \alpha_1) + \varphi_u(t, \alpha_1))] \geq 0$$

olur. Böylece,

$$\beta_2^A \geq f(t, \beta_2) + g(t, \beta_2) + h(t, \beta_2)$$

olur. Dolayısıyla α_2 ve β_2 alt-üst çözümlerdir. Teorem 2.2.6'dan $\alpha_2(0) \leq \beta_2(0)$ olduğundan $\alpha_2(t) \leq \beta_2(t)$ olur. Sonuç olarak

$$\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t) \leq \alpha_2(t) \leq \beta_2(t) \leq \beta_1(t) \leq \beta_0(t)$$

olur. Bu işlem bu şekilde devam ettirilirse

$$\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t) \leq \dots \leq \alpha_n(t) \leq \beta_n(t) \leq \dots \leq \beta_2(t) \leq \beta_1(t) \leq \beta_0(t)$$

elde edilir. $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ sırasıyla

$$\alpha_{n+1}^A = w(t, \alpha_n, \beta_n; \alpha_{n+1}), \alpha_{n+1}(0) = u_0 \quad (5.10)$$

$$\beta_{n+1}^A = W(t, \alpha_n, \beta_n; \beta_{n+1}), \beta_{n+1}(0) = u_0 \quad (5.11)$$

başlangıç değer problemlerinin çözümleri olmakla birlikte düzgün sınırlıdır. Ayrıca $f(t, u)$, $g(t, u)$ ve $h(t, u)$ sınırlı olduğundan $\{\alpha_n^A(t)\}$ ve $\{\beta_n^A(t)\}$ dizileri de T de düzgün sınırlıdır. Bu ise $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ dizilerinin eşsürekli olduğunu gösterir. Diziler düzgün sınırlı ve eşsürekli olduğundan Arzela-Ascoli Teoremi gereğince $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ dizileri (5.1) in tek çözümü olan $u(t)$ ye düzgün ve monoton yaknsar. Şimdi bu yakınsamanın kuadratik olduğu gösterilecektir. Bunun için

$$p_{n+1}(t) = u(t) - \alpha_{n+1}(t) \geq 0, p_{n+1}(0) = 0$$

tanımlansın. Her tarafın delta türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
p_{n+1}^\Delta &= u^\Delta - \alpha_{n+1}^\Delta \\
&= f(t, u) + g(t, u) + h(t, u) - \{f(t, \alpha_n) \\
&\quad + f_u(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) + g(t, \alpha_n) \\
&\quad + [g_u(t, \alpha_n) + \varphi_u(t, \alpha_n)](\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\
&\quad - [\varphi(t, \alpha_{n+1}) - \varphi(t, \alpha_n)] + h(t, \alpha_n) \\
&\quad + h_u(t, \beta_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n)\} \\
&= f(t, u) - f(t, \alpha_n) - f_u(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\
&\quad + g(t, u) - g(t, \alpha_n) \\
&\quad - [g_u(t, \alpha_n) + \varphi_u(t, \alpha_n)](\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\
&\quad + [\varphi(t, \alpha_{n+1}) - \varphi(t, \alpha_n)] + h(t, u) - h(t, \alpha_n) \\
&\quad - h_u(t, \beta_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n)
\end{aligned}$$

elde edilir. Baz terimler eklenip yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
p_{n+1}^\Delta &= [f(t, u) - f(t, \alpha_n)] + f_u(t, \alpha_n)((u - \alpha_{n+1}) - (u - \alpha_n)) \\
&\quad + [g(t, u) + \varphi(t, u)] - [g(t, \alpha_n) + \varphi(t, \alpha_n)] \\
&\quad + [g_u(t, \alpha_n) + \varphi_u(t, \alpha_n)]((u - \alpha_{n+1}) - (u - \alpha_n)) \\
&\quad - [\varphi(t, u) - \varphi(t, \alpha_{n+1})] + [h(t, u) - h(t, \alpha_n)] \\
&\quad + h_u(t, \beta_n)((u - \alpha_{n+1}) - (u - \alpha_n))
\end{aligned}$$

olur. Burada kolaylık olması açısından $g(t, u) + \varphi(t, u) = F(t, u)$ alınıp yeniden düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned}
p_{n+1}^\Delta &= [f(t, u) - f(t, \alpha_n)] \\
&\quad + f_u(t, \alpha_n)((u - \alpha_{n+1}) - (u - \alpha_n))[F(t, u) \\
&\quad - F(t, \alpha_n)] + F_u(t, \alpha_n)((u - \alpha_{n+1}) - (u - \alpha_n)) \\
&\quad - [\varphi(t, u) - \varphi(t, \alpha_{n+1})] + [h(t, u) - h(t, \alpha_n)] \\
&\quad + h_u(t, \beta_n)((u - \alpha_{n+1}) - (u - \alpha_n))
\end{aligned}$$

yazılabilir. α_n ve β_n tanımları da dikkate alınıp fonksiyonlara ortalama değer teoremi uygulandığında

$$\begin{aligned}
p_{n+1}^\Delta &= f_u(t, a)(u - \alpha_n) + f_u(t, \alpha_n)((u - \alpha_{n+1}) - (u - \alpha_n)) \\
&\quad + F_u(t, c)(u - \alpha_n) \\
&\quad + F_u(t, \alpha_n)((u - \alpha_{n+1}) - (u - \alpha_n)) \\
&\quad - \varphi_u(t, d)(u - \alpha_{n+1}) + h_u(t, e)(u - \alpha_n) \\
&\quad + h_u(t, \beta_n)((u - \alpha_{n+1}) - (u - \alpha_n)).
\end{aligned}$$

Burada $\alpha_n < a < u$, $\alpha_n < c < u$, $\alpha_{n+1} < d < u$, $\alpha_n < e < u$ dır.

$$\begin{aligned}
p_{n+1}^\Delta &= f_u(t, a)p_n - f_u(t, \alpha_n)p_n + f_u(t, \alpha_n)p_{n+1} + F_u(t, c)p_n \\
&\quad - F_u(t, \alpha_n)p_n + F_u(t, \alpha_n)p_{n+1} - \varphi_u(t, d)p_{n+1} \\
&\quad + h_u(t, e)p_n - h_u(t, \beta_n)p_n + h_u(t, \beta_n)p_{n+1} \\
&= p_n[f_u(t, a) - f_u(t, \alpha_n)] + f_u(t, \alpha_n)p_{n+1} \\
&\quad + p_n[F_u(t, c) - F_u(t, \alpha_n)] \\
&\quad + p_{n+1}[F_u(t, \alpha_n) - \varphi_u(t, d)] \\
&\quad + p_n[h_u(t, e) - h_u(t, \beta_n)] + h_u(t, \beta_n)p_{n+1} \\
&\leq p_n[f_u(t, u) - f_u(t, \alpha_n)] + f_u(t, \alpha_n)p_{n+1} \\
&\quad + p_n[F_u(t, u) - F_u(t, \alpha_n)] \\
&\quad + p_{n+1}[F_u(t, \alpha_n) - \varphi_u(t, \alpha_n)] \\
&\quad + p_n[h_u(t, u) - h_u(t, \beta_n)] + h_u(t, \beta_n)p_{n+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Fonksiyonlara bir kere daha ortalama değeri teoremi uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
p_{n+1}^\Delta &\leq p_n f_{uu}(t, b)(u - \alpha_n) + f_u(t, \alpha_n)p_{n+1} + p_n F_{uu}(t, d)(u - \alpha_n) \\
&\quad + p_{n+1}[F_u(t, \alpha_n) - \varphi_u(t, \alpha_n)] + p_n h_{uu}(t, f)(u - \beta_n) \\
&\quad + h_u(t, \beta_n)p_{n+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\alpha_n < b < u$, $\alpha_n < d < u$, $u < f < \beta_n$ dır.

$$\begin{aligned}
p_{n+1}^\Delta &\leq p_n^2 f_{uu}(t, b) + p_{n+1} f_u(t, \alpha_n) + p_n^2 [g_{uu}(t, d) + \varphi_{uu}(t, d)] \\
&\quad + p_{n+1} [g_u(t, \alpha_n) + \varphi_u(t, \alpha_n) - \varphi_u(t, \alpha_n)] \\
&\quad - p_n q_n h_{uu}(t, f) + p_{n+1} h_u(t, \beta_n) \\
&= p_n^2 f_{uu}(t, b) + p_{n+1} f_u(t, \alpha_n) \\
&\quad + p_n^2 [g_{uu}(t, d) + \varphi_{uu}(t, d)] + p_{n+1} g_u(t, \alpha_n) \\
&\quad - p_n q_n h_{uu}(t, f) + p_{n+1} h_u(t, \beta_n).
\end{aligned}$$

Kapalı bir kümede sürekli fonksiyonlar sınırlı olduğundan

$$|f_{uu}(t, u)| \leq N, \quad |f_u(t, u)| \leq M, \quad |g_{uu}(t, u)| \leq L, \quad |g_u(t, u)| \leq K,$$

$$|\varphi_{uu}(t, u)| \leq B, \quad |h_{uu}(t, u)| \leq C, \quad |h_u(t, u)| \leq A$$

olarak alınabilir. Burada N, M, L, K, C, B, A pozitif sabitlerdir. O halde

$$\begin{aligned} p_{n+1}^A &\leq p_n^2 N + p_{n+1} M + p_n^2 (L + B) + p_{n+1} K - p_n q_n C + p_{n+1} A \\ &= p_n^2 (N + L + B) + p_{n+1} (M + K + A) - p_n q_n C \end{aligned}$$

olur. $p_n q_n \leq \frac{p_n^2}{2} + \frac{q_n^2}{2}$ terimine Cauchy eşitsizliği uygulanırsa

$$p_{n+1}^A \leq p_n^2 \left(N + L + B + \frac{C}{2} \right) + p_{n+1} (M + K + A) + q_n^2 \frac{C}{2}$$

elde edilir ki bu ifade p_{n+1} e göre lineerdir.

$$p_{n+1}^A - p_{n+1} (M + K + A) \leq p_n^2 \left(N + L + B + \frac{C}{2} \right) + q_n^2 \frac{C}{2}$$

ifadesinin her tarafını $\lambda = e^{-\int_0^t (M+K+A) \Delta s} = e^{-(M+K+A)t}$ integrasyon çarpanı ile çarparsak

$$\left[p_{n+1} e^{-(M+K+A)t} \right]^A \leq \left[p_n^2 \left(N + L + B + \frac{C}{2} \right) + q_n^2 \frac{C}{2} \right] e^{-(M+K+A)t}$$

elde edilir. Bu ifade $[0, t]$ de integre edildiğinde,

$$\begin{aligned} p_{n+1} e^{-(M+K+A)t} &\leq p_{n+1}(0) \\ &+ \int_0^t \left[p_n^2 \left(N + L + B + \frac{C}{2} \right) + q_n^2 \frac{C}{2} \right] e^{-(M+K+A)s} \Delta s. \end{aligned}$$

$$p_{n+1} \leq \int_0^t \left[p_n^2 \left(N + L + B + \frac{C}{2} \right) + q_n^2 \frac{C}{2} \right] e^{(M+K+A)(t-s)} \Delta s$$

J üzerinde maks alırsa,

$$\begin{aligned} \max_j |p_{n+1}| &\leq \max_j \left| p_n^2 \left(N + L + B + \frac{C}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + q_n^2 \frac{C}{2} \right| \int_0^t e^{(M+K+A)(t-s)} \Delta s \end{aligned}$$

$$\max_j |p_{n+1}| \leq \max_j \left| p_n^2 \left(N + L + B + \frac{C}{2} \right) + q_n^2 \frac{C}{2} \right| \frac{e^{(M+K+A)t} - 1}{M + K + A}$$

$$\max_j |p_{n+1}| \leq \max_j \left| p_n^2 \left(N + L + B + \frac{C}{2} \right) + q_n^2 \frac{C}{2} \right| \frac{e^{(M+K+A)t}}{M + K + A}$$

$$\max_j |u - \alpha_{n+1}|$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(N + L + B + \frac{C}{2} \right) \frac{e^{(M+K+A)t}}{M + K + A} \max_j |u - \alpha_n|^2 \\ &\quad + \frac{C}{2} \frac{e^{(M+K+A)t}}{M + K + A} \max_j |\beta_n - u|^2 \end{aligned}$$

Böylece $\{\alpha_n(t)\}$ dizisi $u(t)$ ye kuadratik yakınsar. Benzer şekilde

$$q_{n+1}(t) = \beta_{n+1}(t) - u(t) \geq 0, q_{n+1}(0) = 0$$

tanımlansın. Her tarafın delta türevi alındığında

$$\begin{aligned} q_{n+1}^\Delta &= \beta_{n+1}^\Delta - u^\Delta \\ &= f(t, \beta_n) + f_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) + g(t, \beta_n) \\ &\quad + [g_u(t, \alpha_n) + \varphi_u(t, \alpha_n)](\beta_{n+1} - \beta_n) \\ &\quad - [\varphi(t, \beta_{n+1}) - \varphi(t, \beta_n)] + h(t, \beta_n) \\ &\quad + h_u(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) \\ &\quad - \{f(t, u) + g(t, u) + h(t, u)\} \\ &= f(t, \beta_n) + f_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) - f(t, u) \\ &\quad + g(t, \beta_n) + [g_u(t, \alpha_n) + \varphi_u(t, \alpha_n)](\beta_{n+1} - \beta_n) \\ &\quad - [\varphi(t, \beta_{n+1}) - \varphi(t, \beta_n)] - g(t, u) + h(t, \beta_n) \\ &\quad + h_u(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) - h(t, u). \end{aligned}$$

Bazı terimler düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
q_{n+1}^A &= [f(t, \beta_n) - f(t, u)] + f_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) \\
&\quad + [g(t, \beta_n) + \varphi(t, \beta_n)] - [g(t, u) + \varphi(t, u)] \\
&\quad + [g_u(t, \alpha_n) + \varphi_u(t, \alpha_n)](\beta_{n+1} - \beta_n) \\
&\quad - [\varphi(t, \beta_{n+1}) - \varphi(t, u)] + [h(t, \beta_n) - h(t, u)] \\
&\quad + h_u(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n)
\end{aligned}$$

olur. $g(t, u) + \varphi(t, u) = F(t, u)$ alınıp yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
q_{n+1}^A &= [f(t, \beta_n) - f(t, u)] + f_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) \\
&\quad + [F(t, \beta_n) - F(t, u)] + F_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) \\
&\quad - [\varphi(t, \beta_{n+1}) - \varphi(t, u)] + [h(t, \beta_n) - h(t, u)] \\
&\quad + h_u(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n)
\end{aligned}$$

elde edilir. α_n ve β_n tanımlar da dikkate alınıp fonksiyonlara ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
q_{n+1}^A &= f_u(t, a)(\beta_n - u) + f_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) + F_u(t, c)(\beta_n - u) \\
&\quad + F_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) - \varphi_u(t, d)(\beta_{n+1} - u) \\
&\quad + h_u(t, f)(\beta_n - u) + h_u(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) \\
&= f_u(t, a)q_n + f_u(t, \alpha_n)(q_{n+1} - q_n) + F_u(t, c)q_n \\
&\quad + F_u(t, \alpha_n)(q_{n+1} - q_n) - \varphi_u(t, d)q_{n+1} + h_u(t, f)q_n \\
&\quad + h_u(t, \beta_n)(q_{n+1} - q_n) \\
&= q_n[f_u(t, a) - f_u(t, \alpha_n)] + q_{n+1}f_u(t, \alpha_n) \\
&\quad + q_n[F_u(t, c) - F_u(t, \alpha_n)] \\
&\quad + q_{n+1}[F_u(t, \alpha_n) - \varphi_u(t, d)] \\
&\quad + q_n[h_u(t, f) - h_u(t, \beta_n)] + q_{n+1}h_u(t, \beta_n) \\
&\leq q_n[f_u(t, \beta_n) - f_u(t, \alpha_n)] + q_{n+1}f_u(t, \alpha_n) \\
&\quad + q_n[F_u(t, \beta_n) - F_u(t, \alpha_n)] \\
&\quad + q_{n+1}[F_u(t, \alpha_n) - \varphi_u(t, \alpha_n)] \\
&\quad + q_n[h_u(t, u) - h_u(t, \beta_n)] + q_{n+1}h_u(t, \beta_n)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $u < a < \beta_n$, $u < c < \beta_n$, $u < d < \beta_{n+1}$, $u < f < \beta_n$ dır.

Fonksiyonlara bir kere daha ortalama değer teoremi uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
q_{n+1}^A &\leq q_n f_{uu}(t, b)(\beta_n - \alpha_n) + f_u(t, \alpha_n)q_{n+1} \\
&\quad + q_n F_{uu}(t, e)(\beta_n - \alpha_n) \\
&\quad + q_{n+1}[F_u(t, \alpha_n) - \varphi_u(t, \alpha_n)] + q_n h_{uu}(t, h)(u - \beta_n) \\
&\quad + h_u(t, \beta_n)q_{n+1} \\
&= q_n f_{uu}(t, b)(q_n + p_n) + f_u(t, \alpha_n)q_{n+1} \\
&\quad + q_n F_{uu}(t, e)(q_n + p_n) \\
&\quad + q_{n+1}[F_u(t, \alpha_n) - \varphi_u(t, \alpha_n)] + q_n h_{uu}(t, h)(-q_n) \\
&\quad + h_u(t, \beta_n)q_{n+1} \\
&= q_n^2 f_{uu}(t, b) + p_n q_n f_{1uu}(t, b) + f_u(t, \alpha_n)q_{n+1} \\
&\quad + q_n^2 F_{uu}(t, e) + p_n q_n F_{uu}(t, e) \\
&\quad + q_{n+1}[F_u(t, \alpha_n) - \varphi_u(t, \alpha_n)] - q_n^2 h_{uu}(t, h) \\
&\quad + h_u(t, \beta_n)q_{n+1}
\end{aligned}$$

olur. Burada $\alpha_n < b < \beta_n$, $\alpha_n < e < \beta_n$, $u < h < \beta_n$ dir. $F(t, u) = g(t, u) + \varphi(t, u)$ olarak yeniden yazılırsa,

$$\begin{aligned}
q_{n+1}^A &\leq q_n^2 f_{uu}(t, b) + p_n q_n f_{uu}(t, b) + f_u(t, \alpha_n)q_{n+1} \\
&\quad + q_n^2 [g_{uu}(t, e) + \varphi_{uu}(t, e)] \\
&\quad + p_n q_n [g_{uu}(t, e) + \varphi_{uu}(t, e)] \\
&\quad + q_{n+1}[g_u(t, \alpha_n) + \varphi_u(t, \alpha_n) - \varphi_u(t, \alpha_n)] \\
&\quad - q_n^2 h_{uu}(t, h) + h_u(t, \beta_n)q_{n+1} \\
&= q_n^2 f_{uu}(t, b) + p_n q_n f_{uu}(t, b) + f_u(t, \alpha_n)q_{n+1} \\
&\quad + q_n^2 [g_{uu}(t, e) + \varphi_{uu}(t, e)] \\
&\quad + p_n q_n [g_{uu}(t, e) + \varphi_{uu}(t, e)] + q_{n+1}g_u(t, \alpha_n) \\
&\quad - q_n^2 h_{uu}(t, h) + h_u(t, \beta_n)q_{n+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Kapalı bir kümede sürekli fonksiyonlar sınırlı olduğundan

$$|f_{uu}(t, u)| \leq N, \quad |f_u(t, u)| \leq M, \quad |g_{uu}(t, u)| \leq L, \quad |g_u(t, u)| \leq K,$$

$$|\varphi_{uu}(t, u)| \leq B, \quad |h_{uu}(t, u)| \leq C, \quad |h_u(t, u)| \leq A$$

olarak alınabilir. Burada N, M, L, K, C, B, A pozitif sabitlerdir.

$$\begin{aligned}
q_{n+1}^A &\leq q_n^2 N + p_n q_n N + M q_{n+1} + q_n^2 [L + B] + p_n q_n [L + B] \\
&\quad + q_{n+1} K - q_n^2 C + A q_{n+1}
\end{aligned}$$

yazılabilir. $p_n q_n \leq \frac{p_n^2}{2} + \frac{q_n^2}{2}$ Cauchy eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} q_{n+1}^A &\leq \frac{3N}{2} q_n^2 + \frac{N}{2} p_n^2 + M q_{n+1} + \frac{3}{2} (L+B) q_n^2 + \frac{1}{2} (L+B) p_n^2 \\ &\quad + K q_{n+1} - q_n^2 C + A q_{n+1} \\ &= \left(\frac{3N}{2} + \frac{3}{2} (L+B) - C \right) q_n^2 + \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2} (L+B) \right) p_n^2 \\ &\quad + (M+K+A) q_{n+1} \end{aligned}$$

olur ki bu ise q_{n+1} e göre lineerdir.

$$\begin{aligned} q_{n+1}^A - (M+K+A) q_{n+1} \\ \leq \left(\frac{3N}{2} + \frac{3}{2} (L+B) - C \right) q_n^2 + \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2} (L+B) \right) p_n^2 \end{aligned}$$

ifadesinin her tarafını $\lambda = e^{-\int_0^t (M+K+A) \Delta s} = e^{-(M+K+A)t}$ ile çarparsak

$$\begin{aligned} [q_{n+1} e^{-(M+K+A)t}]^A \\ \leq \left[\left(\frac{3N}{2} + \frac{3}{2} (L+B) - C \right) q_n^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2} (L+B) \right) p_n^2 \right] e^{-(M+K+A)t} \end{aligned}$$

bu ifade 0 dan t ye integre edildiğinde,

$$\begin{aligned} q_{n+1} e^{-(M+K+A)t} \\ \leq q_{n+1}(0) \\ + \int_0^t \left[\left(\frac{3N}{2} + \frac{3}{2} (L+B) - C \right) q_n^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2} (L+B) \right) p_n^2 \right] e^{-(M+K+A)s} \Delta s \\ q_{n+1} \leq \int_0^t \left[\left(\frac{3N}{2} + \frac{3}{2} (L+B) - C \right) q_n^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2} (L+B) \right) p_n^2 \right] e^{(M+K+A)(t-s)} \Delta s \end{aligned}$$

J üzerinde $\max$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
\max_J |q_{n+1}| &\leq \max_J \left| q_n^2 \left(\frac{3N}{2} + \frac{3}{2}(L+B) - C \right) \right. \\
&\quad \left. + p_n^2 \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2}(L+B) \right) \right| \int_0^t e^{(M+K+A)(t-s)} \Delta s \\
&\leq \max_J \left| q_n^2 \left(\frac{3N}{2} + \frac{3}{2}(L+B) - C \right) \right. \\
&\quad \left. + p_n^2 \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2}(L+B) \right) \right| \frac{e^{(M+K+A)t} - 1}{M+K+A} \\
&\leq \max_J \left| q_n^2 \left(\frac{3N}{2} + \frac{3}{2}(L+B) - C \right) \right. \\
&\quad \left. + p_n^2 \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2}(L+B) \right) \right| \frac{e^{(M+K+A)t}}{M+K+A}
\end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$\begin{aligned}
\max_J |\beta_{n+1} - u| &\leq \left(\frac{3N}{2} + \frac{3}{2}(L+B) - C \right) \frac{e^{(M+K+A)t}}{M+K+A} \max_J |\beta_n - u|^2 \\
&\quad + \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2}(L+B) \right) \frac{e^{(M+K+A)t}}{M+K+A} \max_J |u - \alpha_n|^2
\end{aligned}$$

yazılır. Bu sonuç ise $\{\beta_n(t)\}$ dizisinin $u(t)$ ye kuadratik yakınsadığını gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.2. (A_1) $\alpha_0(t), \beta_0(t) \in C_{rd}[T, R]$ (5.1) in doğal tipten alt-üst çözüm çifti olsun.

(A_2) Ω_0 da $f(t, u)$ fonksiyonu, konveks $\varphi(t, u)$ fonksiyonu yardımıyla konvekslenebilir, $g(t, u)$ fonksiyonu, $\psi(t, u)$ konkav fonksiyonu yardımıyla konkavlanabilir ve $h(t, u)$ fonksiyonu ise tek yönlü Lipschitz şartını sağlasın. Yani $u_1 \geq u_2 \in \Omega_0$ ve $k \geq 0$ Lipschitz sabiti olmak üzere

$$h(t, u_1) - h(t, u_2) \geq -k(u_1 - u_2)$$

olsun. Burada $f_u(t, u)$, $g_u(t, u)$, $f_{uu}(t, u)$, $g_{uu}(t, u)$ var ve süreklidir. O zaman $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ dizileri var ve öyle ki (5.1) in tek çözümüne düzgün ve monoton yakınsar ve bu yakınsama yarı kuadrattır.

İspat. Kolaylık olması açısından

$$F(t, u) = f(t, u) + \varphi(t, u),$$

$$G(t, u) = g(t, u) + \psi(t, u)$$

alınacaktır. $f(t, u), g(t, u), h(t, u)$ fonksiyonlarının $\alpha_0(t) \leq u_2 \leq u_1 \leq \beta_0(t)$ için

Lipschitz şartlarını sağladığı açıktır. (A_2) den $u, v \in \Omega_0$ olmak üzere $u \geq v$ için,

$F(t, u) = f(t, u) + \varphi(t, u)$ konveks olduğundan

$$\begin{aligned} f(t, u) &\geq f(t, v) + [f_u(t, v) + \varphi_u(t, v)](u - v) + \varphi(t, v) - \varphi(t, u) \\ &= F(t, v) + F_u(t, v)(u - v) - \varphi(t, u) \end{aligned} \quad (5.12)$$

$G(t, u) = g(t, u) + \psi(t, u)$ konkav olduğundan

$$\begin{aligned} g(t, u) &\leq g(t, v) + [g_u(t, v) + \psi_u(t, v)](u - v) + \psi(t, v) \\ &\quad - \psi(t, u) = G(t, v) + G_u(t, v)(u - v) - \psi(t, u) \end{aligned} \quad (5.13)$$

ve $h(t, u)$ yarı Lipschitz şartın sağladığından,

$$h(t, u) - h(t, v) \geq -k(u - v) \quad (5.14)$$

yazılabilir. (5.12), (5.13) ve (5.14) göz önüne alınarak aşağıdaki yardımcı lineer başlangıç değer problemleri ele alınsın.

$$\begin{aligned} \alpha_1^A &= f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) + h(t, \alpha_0) \\ &\quad + [f_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0) + g_u(t, \beta_0) + \psi_u(t, \beta_0) \\ &\quad - \varphi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0) - k](\alpha_1 - \alpha_0) \\ &= N(t, \alpha_0) \\ &\quad + [F_u(t, \alpha_0) + G_u(t, \beta_0) - \varphi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0) \\ &\quad - k](\alpha_1 - \alpha_0), \alpha_1(0) = u_0, \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned}
\beta_1^A &= f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) + h(t, \beta_0) \\
&\quad + [f_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0) + g_u(t, \beta_0) + \psi_u(t, \beta_0) \\
&\quad - \varphi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0) - k](\beta_1 - \beta_0) \\
&= N(t, \beta_0) \\
&\quad + [F_u(t, \alpha_0) + G_u(t, \beta_0) - \varphi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0) \\
&\quad - k](\beta_1 - \beta_0), \beta_1(0) = u_0
\end{aligned} \tag{5.16}$$

$\alpha_0 \leq \alpha_1$ olduğu gösterilecektir. Bunun için $p = \alpha_0 - \alpha_1$ olsun. $p(0) = \alpha_0(0) - \alpha_1(0) \leq 0$ dır. $p = \alpha_0 - \alpha_1$ ifadesinin delta türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
p^A &= \alpha_0^A - \alpha_1^A \leq N(t, \alpha_0) \\
&\quad - \{N(t, \alpha_0) \\
&\quad + [F_u(t, \alpha_0) + G_u(t, \beta_0) - \varphi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0) \\
&\quad - k](\alpha_1 - \alpha_0)\} \\
&= [F_u(t, \alpha_0) + G_u(t, \beta_0) - \varphi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0) \\
&\quad - k](\alpha_0 - \alpha_1) \\
&= [F_u(t, \alpha_0) + G_u(t, \beta_0) - \varphi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0) \\
&\quad - k]p
\end{aligned}$$

elde edilir. $p^A \leq Mp$ ve $p(0) \leq 0$ olduğundan Sonuç 3.2.8 den $p(t) \leq 0$ olur. Yani $\alpha_0 \leq \alpha_1$ dır. Benzer şekilde $\alpha_1 \leq \beta_0$ olduğu gösterilecektir. $p = \alpha_1 - \beta_0$ olsun. $p(0) = \alpha_1(0) - \beta_0(0) \leq 0$ dır. $p = \alpha_1 - \beta_0$ ifadesinin delta türevi alındığında,

$$\begin{aligned}
p^A &= \alpha_1^A - \beta_0^A \leq N(t, \alpha_0) \\
&\quad + [F_u(t, \alpha_0) + G_u(t, \beta_0) - \varphi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0) \\
&\quad - k](\alpha_1 - \alpha_0) - N(t, \beta_0) \\
&= N(t, \alpha_0) \\
&\quad + [F_u(t, \alpha_0) + G_u(t, \beta_0) - \varphi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0) \\
&\quad - k](\alpha_1 - \alpha_0) - f(t, \beta_0) - g(t, \beta_0) - h(t, \beta_0)
\end{aligned}$$

(5.12), (5.13) ve (5.14) ten elde edilecek $-f(t, \beta_0)$, $-g(t, \beta_0)$ ve $-h(t, \beta_0)$ eşitsizlikleri sırasıyla yerine yazılacaktır. (5.12) den

$$\begin{aligned}
-f(t, \beta_0) &\leq -F(t, \alpha_0) - F_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0) + \varphi(t, \beta_0) \\
&= -f(t, \alpha_0) - \varphi(t, \alpha_0) - F_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0) \\
&\quad + \varphi(t, \beta_0)
\end{aligned}$$

yazılabilir. $\varphi(t, \beta_0) - \varphi(t, \alpha_0)$ ifadesinde ortalama değer teoremi uygulandığında ve $\varphi(t, u)$ fonksiyonunun artan özelliğinden $\alpha_0 < \tau < \beta_0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
-f(t, \beta_0) &\leq -f(t, \alpha_0) - F_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0) + \varphi_u(t, \tau)(\beta_0 - \alpha_0) \\
&\leq -f(t, \alpha_0) - F_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0) \\
&\quad + \varphi_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \alpha_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.13) ten

$$\begin{aligned}
-g(t, \beta_0) &\leq -G(t, \alpha_0) - G_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \alpha_0) + \psi(t, \beta_0) \\
&= -g(t, \alpha_0) - \psi(t, \alpha_0) - G_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \alpha_0) \\
&\quad + \psi(t, \beta_0)
\end{aligned}$$

$\psi(t, \beta_0) - \psi(t, \alpha_0)$ ifadesinde ortalama değer teoremi uygulandığında ve $\psi(t, u)$ fonksiyonunun azalan özelliğinden $\alpha_0 < \xi < \beta_0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
-g(t, \beta_0) &\leq -g(t, \alpha_0) - G_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \alpha_0) + \psi_u(t, \xi)(\beta_0 - \alpha_0) \\
&\quad - g(t, \alpha_0) - G_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \alpha_0) \\
&\quad + \psi_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.14) ten

$$-h(t, \beta_0) \leq -h(t, \alpha_0) + k(\beta_0 - \alpha_0)$$

yazılır. Bu ifadeler yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
p^4 &\leq N(t, \alpha_0) + [F_u(t, \alpha_0) + G_u(t, \beta_0) - \varphi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0) \\
&\quad - k](\alpha_1 - \alpha_0) - f(t, \alpha_0) - F_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0) \\
&\quad + \varphi_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \alpha_0) - g(t, \alpha_0) \\
&\quad - G_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \alpha_0) + \psi_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0) \\
&\quad - h(t, \alpha_0) + k(\beta_0 - \alpha_0) \\
&= f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) + h(t, \alpha_0) \\
&\quad + [F_u(t, \alpha_0) + G_u(t, \beta_0) - \varphi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0) \\
&\quad - k](\alpha_1 - \alpha_0) - f(t, \alpha_0) - F_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0) \\
&\quad + \varphi_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \alpha_0) - g(t, \alpha_0) \\
&\quad - G_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \alpha_0) + \psi_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0) \\
&\quad - h(t, \alpha_0) + k(\beta_0 - \alpha_0) \\
&= [F_u(t, \alpha_0) + G_u(t, \beta_0) - \varphi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0) \\
&\quad - k]\alpha_1 \\
&\quad - [F_u(t, \alpha_0) + G_u(t, \beta_0) - \varphi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0) \\
&\quad - k]\alpha_0 \\
&\quad - [F_u(t, \alpha_0) + G_u(t, \beta_0) - \varphi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0) \\
&\quad - k]\beta_0 \\
&\quad + [F_u(t, \alpha_0) + G_u(t, \beta_0) - \varphi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0) \\
&\quad - k]\alpha_0 \\
&= [F_u(t, \alpha_0) + G_u(t, \beta_0) - \varphi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0) \\
&\quad - k](\alpha_1 - \beta_0) \\
&= [F_u(t, \alpha_0) + G_u(t, \beta_0) - \varphi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0) \\
&\quad - k]p
\end{aligned}$$

elde edilir. $p^4 \leq Mp$ ve $p(0) \leq 0$ olduğundan Sonuç 3.2.8 den $p(t) \leq 0$ olur. Yani $\alpha_1 \leq \beta_0$ dır. Benzer şekilde $\beta_1 \leq \beta_0$ olduğu gösterilebilir. Şimdi $\alpha_1 \leq \beta_1$ olduğu gösterilecektir. Bunun için α_1 ve β_1 in sırasıyla (5.1) in alt-üst çözüm çifti olduğunu göstermek gerekir. (5.15) ten

$$\begin{aligned}
\alpha_1^4 &= N(t, \alpha_0) + [F_u(t, \alpha_0) + G_u(t, \beta_0) - \varphi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0) \\
&\quad - k](\alpha_1 - \alpha_0) \\
&= [f(t, \alpha_0) + F_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0)] \\
&\quad + [g(t, \alpha_0) + G_u(t, \beta_0)(\alpha_1 - \alpha_0)] - k(\alpha_1 - \alpha_0) \\
&\quad - \varphi_u(t, \beta_0)(\alpha_1 - \alpha_0) - \psi_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) \\
&\quad + h(t, \alpha_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. $G_u(t, u)$ azalan olduğundan $G_u(t, \beta_0) \leq G_u(t, \beta_1)$ dır. Yani yukardaki ifade

$$\begin{aligned}
\alpha_1^4 &\leq [f(t, \alpha_0) + F_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0)] \\
&\quad + [g(t, \alpha_0) + G_u(t, \beta_1)(\alpha_1 - \alpha_0)] - k(\alpha_1 - \alpha_0) \\
&\quad - \varphi_u(t, \beta_0)(\alpha_1 - \alpha_0) - \psi_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) \\
&\quad + h(t, \alpha_0)
\end{aligned}$$

olur. (5.12), (5.13) ve (5.14) ten sırasıyla

$$f(t, \alpha_1) \geq f(t, \alpha_0) + F_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) + \varphi(t, \alpha_0) - \varphi(t, \alpha_1)$$

$$f(t, \alpha_0) + F_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) \leq f(t, \alpha_1) + \varphi(t, \alpha_1) - \varphi(t, \alpha_0),$$

$$g(t, \alpha_1) \geq g(t, \alpha_0) + G_u(t, \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_0) + \psi(t, \alpha_0) - \psi(t, \alpha_1)$$

$$g(t, \alpha_0) + G_u(t, \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_0) \leq g(t, \alpha_1) + \psi(t, \alpha_1) - \psi(t, \alpha_0),$$

$$h(t, \alpha_1) - h(t, \alpha_0) \geq -k(\alpha_1 - \alpha_0)$$

$$h(t, \alpha_0) \leq h(t, \alpha_1) + k(\alpha_1 - \alpha_0)$$

olur. Elde edilen bu ifadeler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\alpha_1^A &\leq f(t, \alpha_1) + \varphi(t, \alpha_1) - \varphi(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_1) + \psi(t, \alpha_1) \\
&\quad - \psi(t, \alpha_0) - k(\alpha_1 - \alpha_0) - \varphi_u(t, \beta_0)(\alpha_1 - \alpha_0) \\
&\quad - \psi_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) + h(t, \alpha_1) + k(\alpha_1 - \alpha_0) \\
&= f(t, \alpha_1) + \varphi(t, \alpha_1) - \varphi(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_1) \\
&\quad + \psi(t, \alpha_1) - \psi(t, \alpha_0) + h(t, \alpha_1) \\
&\quad - \varphi_u(t, \beta_0)(\alpha_1 - \alpha_0) - \psi_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) \\
&= f(t, \alpha_1) + g(t, \alpha_1) + h(t, \alpha_1) \\
&\quad + [\varphi(t, \alpha_1) - \varphi(t, \alpha_0)] + [\psi(t, \alpha_1) - \psi(t, \alpha_0)] \\
&\quad - \varphi_u(t, \beta_0)(\alpha_1 - \alpha_0) - \psi_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) \\
&= N(t, \alpha_1) + [\varphi(t, \alpha_1) - \varphi(t, \alpha_0)] \\
&\quad + [\psi(t, \alpha_1) - \psi(t, \alpha_0)] - \varphi_u(t, \beta_0)(\alpha_1 - \alpha_0) \\
&\quad - \psi_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0)
\end{aligned}$$

Burada $[\varphi(t, \alpha_1) - \varphi(t, \alpha_0)]$ ve $[\psi(t, \alpha_1) - \psi(t, \alpha_0)]$ için ayrı ayrı ortalama değer teoremi uygulanp φ_u nun artan özelliği ve ψ_u nun azalan özelliği kullanıldığında,

$$\begin{aligned}
\alpha_1^A &\leq N(t, \alpha_1) + \varphi_u(t, \xi)(\alpha_1 - \alpha_0) + \psi_u(t, \tau)(\alpha_1 - \alpha_0) \\
&\quad - \varphi_u(t, \beta_0)(\alpha_1 - \alpha_0) - \psi_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) \\
&\leq N(t, \alpha_1) + \varphi_u(t, \beta_0)(\alpha_1 - \alpha_0) \\
&\quad + \psi_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) - \varphi_u(t, \beta_0)(\alpha_1 - \alpha_0) \\
&\quad - \psi_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) = N(t, \alpha_1)
\end{aligned}$$

Yani $\alpha_1^A \leq N(t, \alpha_1)$ olup α_1 alt çözüm olur. Benzer şekilde β_1 in üst çözüm olduğunu gösterelim. (5.16) dan

$$\begin{aligned}
\beta_1^A &= N(t, \beta_0) + [F_u(t, \alpha_0) + G_u(t, \beta_0) - \varphi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0) \\
&\quad - k](\beta_1 - \beta_0) \\
&= [f(t, \beta_0) + F_u(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0)] \\
&\quad + [g(t, \beta_0) + G_u(t, \beta_0)(\beta_1 - \beta_0)] \\
&\quad - \varphi_u(t, \beta_0)(\beta_1 - \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0) \\
&\quad - k(\beta_1 - \beta_0) + h(t, \beta_0)
\end{aligned}$$

olur. (5.12)–(5.14) ten sırasıyla

$$f(t, \beta_0) \geq f(t, \beta_1) + F_u(t, \beta_1)(\beta_0 - \beta_1) + \varphi(t, \beta_1) - \varphi(t, \beta_0)$$

$$g(t, \beta_0) \geq g(t, \beta_1) + G_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \beta_1) + \psi(t, \beta_1) - \psi(t, \beta_0)$$

$$h(t, \beta_0) \geq h(t, \beta_1) - k(\beta_0 - \beta_1)$$

olur. Elde edilen bu ifadeler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \beta_1^A &\geq f(t, \beta_1) + F_u(t, \beta_1)(\beta_0 - \beta_1) + \varphi(t, \beta_1) - \varphi(t, \beta_0) \\ &\quad + F_u(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0) + g(t, \beta_1) + G_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \beta_1) \\ &\quad + \psi(t, \beta_1) - \psi(t, \beta_0) + G_u(t, \beta_0)(\beta_1 - \beta_0) \\ &\quad - \varphi_u(t, \beta_0)(\beta_1 - \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0) \\ &\quad - k(\beta_1 - \beta_0) + h(t, \beta_1) - k(\beta_0 - \beta_1) \end{aligned}$$

olur. F_u artan olduğundan $F_u(t, \beta_1) \geq F_u(t, \alpha_0)$ dir. O zaman

$$\begin{aligned} \beta_1^A &\geq f(t, \beta_1) + F_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \beta_1) + \varphi(t, \beta_1) - \varphi(t, \beta_0) \\ &\quad + F_u(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0) + g(t, \beta_1) + G_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \beta_1) \\ &\quad + \psi(t, \beta_1) - \psi(t, \beta_0) + G_u(t, \beta_0)(\beta_1 - \beta_0) \\ &\quad - \varphi_u(t, \beta_0)(\beta_1 - \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0) \\ &\quad - k(\beta_1 - \beta_0) + h(t, \beta_1) - k(\beta_0 - \beta_1) \end{aligned}$$

elde edilir. Baz terimler sadeleştirildiğinde

$$\begin{aligned} \beta_1^A &\geq f(t, \beta_1) + \varphi(t, \beta_1) - \varphi(t, \beta_0) + g(t, \beta_1) + \psi(t, \beta_1) \\ &\quad - \psi(t, \beta_0) - \varphi_u(t, \beta_0)(\beta_1 - \beta_0) \\ &\quad - \psi_u(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0) + h(t, \beta_1) \end{aligned}$$

elde edilir. $\varphi(t, \beta_1) - \varphi(t, \beta_0)$ ifadesinde ortalama değer teoremi uygulanıp $\varphi(t, u)$ fonksiyonunun artan özelliğinden ve $\psi(t, \beta_1) - \psi(t, \beta_0)$ ifadesinde ortalama değer teoremi uygulanıp $\psi(t, u)$ fonksiyonunun azalan özelliğinden faydalanılarak

$$\begin{aligned} \beta_1^A &\geq f(t, \beta_1) + \varphi_u(t, \beta_0)(\beta_1 - \beta_0) + g(t, \beta_1) + \psi_u(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0) \\ &\quad - \varphi_u(t, \beta_0)(\beta_1 - \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0) \\ &\quad + h(t, \beta_1) = f(t, \beta_1) + g(t, \beta_1) + h(t, \beta_1) = N(t, \beta_1) \end{aligned}$$

yazılır. Yani $\beta_1^A \geq N(t, \beta_1)$ olup β_1 üst çözümdür. Böylece Teorem 3.3.8 e göre α_1, β_1 alt-üst çözüm çifti ve $\alpha_1(0) \leq \beta_1(0)$ olduğundan ve aynı zamanda Lipschitz şartı sağlandığından $\alpha_1(t) \leq \beta_1(t)$ olur. Yani

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \beta_0$$

olur. Şimdi

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n \leq \alpha_{n+1} \leq \beta_{n+1} \leq \beta_n \leq \dots \leq \beta_1 \leq \beta_0$$

olduğu gösterilecektir. Önce $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$ olduğu gösterilecektir. Bunun için $p_n(t) = \alpha_n(t) - \alpha_{n+1}(t)$ alalım. $p_n(0) = \alpha_n(0) - \alpha_{n+1}(0) = u_0 - u_0 = 0$ dır.

$$\begin{aligned} p_n^A &= \alpha_n^A - \alpha_{n+1}^A \\ &= N(t, \alpha_{n-1}) \\ &\quad + [F_u(t, \alpha_{n-1}) + G_u(t, \beta_{n-1}) - \varphi_u(t, \beta_{n-1}) \\ &\quad - \psi_u(t, \alpha_{n-1}) - k](\alpha_n - \alpha_{n-1}) \\ &\quad - \{N(t, \alpha_n) \\ &\quad + [F_u(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n) - \varphi_u(t, \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n) \\ &\quad - k](\alpha_{n+1} - \alpha_n)\} \\ &= f(t, \alpha_{n-1}) + g(t, \alpha_{n-1}) + h(t, \alpha_{n-1}) \\ &\quad + [F_u(t, \alpha_{n-1}) + G_u(t, \beta_{n-1}) - \varphi_u(t, \beta_{n-1}) \\ &\quad - \psi_u(t, \alpha_{n-1}) - k](\alpha_n - \alpha_{n-1}) - f(t, \alpha_n) \\ &\quad - g(t, \alpha_n) - h(t, \alpha_n) \\ &\quad - [F_u(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n) - \varphi_u(t, \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n) \\ &\quad - k](\alpha_{n+1} - \alpha_n) \end{aligned}$$

(5.12) deki eşitsizlik düzenlendiğinde ve ortalama değer teoremi uygulanıp φ_u fonksiyonunun artan özelliği kullanıldığında

$$f(t, \alpha_n) \geq f(t, \alpha_{n-1}) + F_u(t, \alpha_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + \varphi(t, \alpha_{n-1})$$

$$\begin{aligned}
-f(t, \alpha_n) &\leq -f(t, \alpha_{n-1}) - F_u(t, \alpha_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \\
&\quad + \varphi_u(t, \alpha_n)(\alpha_n - \alpha_{n-1}),
\end{aligned}$$

(5.13) teki eşitsizlik düzenlendiğinde ve ortalama değer teoremi uygulanıp ψ_u fonksiyonunun azalan özelliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}
g(t, \alpha_n) &\geq g(t, \alpha_{n-1}) + G_u(t, \alpha_n)(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + \psi(t, \alpha_{n-1}) \\
&\quad - \psi(t, \alpha_n) - g(t, \alpha_n) \\
&\leq -g(t, \alpha_{n-1}) - G_u(t, \alpha_n)(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + \psi(t, \alpha_n) \\
&\quad - \psi(t, \alpha_{n-1})g(t, \alpha_n) \\
&\leq -g(t, \alpha_{n-1}) - G_u(t, \alpha_n)(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \\
&\quad + \psi_u(t, \alpha_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n-1})
\end{aligned}$$

ve (5.14) ten

$$\begin{aligned}
h(t, \alpha_n) - h(t, \alpha_{n-1}) &\geq -k(\alpha_n - \alpha_{n-1})h(t, \alpha_n) \\
&\geq h(t, \alpha_{n-1}) - k(\alpha_n - \alpha_{n-1}) - h(t, \alpha_n) \\
&\leq -h(t, \alpha_{n-1}) + k(\alpha_n - \alpha_{n-1})
\end{aligned}$$

yazılır. Elde edilen bu eşitsizlikler yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
p_n^A &\leq f(t, \alpha_{n-1}) + g(t, \alpha_{n-1}) + h(t, \alpha_{n-1}) \\
&\quad + [F_u(t, \alpha_{n-1}) + G_u(t, \beta_{n-1}) - \varphi_u(t, \beta_{n-1}) \\
&\quad - \psi_u(t, \alpha_{n-1}) - k](\alpha_n - \alpha_{n-1}) - f(t, \alpha_{n-1}) \\
&\quad - F_u(t, \alpha_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + \varphi_u(t, \alpha_n)(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \\
&\quad - g(t, \alpha_{n-1}) - G_u(t, \alpha_n)(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \\
&\quad + \psi_u(t, \alpha_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n-1}) - h(t, \alpha_{n-1}) \\
&\quad + k(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \\
&\quad - [F_u(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n) - \varphi_u(t, \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n) \\
&\quad - k](\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\
&= [F_u(t, \alpha_{n-1}) + G_u(t, \beta_{n-1}) - \varphi_u(t, \beta_{n-1}) \\
&\quad - \psi_u(t, \alpha_{n-1}) - k](\alpha_n - \alpha_{n-1}) \\
&\quad - [F_u(t, \alpha_{n-1}) - \varphi_u(t, \alpha_n) + G_u(t, \alpha_n) - \psi_u(t, \alpha_{n-1}) \\
&\quad - k](\alpha_n - \alpha_{n-1}) \\
&\quad - [F_u(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n) - \varphi_u(t, \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n) \\
&\quad - k](\alpha_{n+1} - \alpha_n)
\end{aligned}$$

G_u azalan olduğunda $G_u(t, \beta_{n-1}) \leq G_u(t, \alpha_n)$ ve φ_u artan olduğundan $-\varphi_u(t, \beta_{n-1}) \leq -\varphi_u(t, \alpha_n)$ dır. Böylece eşitsizlik

$$\begin{aligned}
&[F_u(t, \alpha_{n-1}) + G_u(t, \alpha_n) - \varphi_u(t, \alpha_n) - \psi_u(t, \alpha_{n-1}) - k](\alpha_n \\
&\quad - \alpha_{n-1}) \\
&\quad - [F_u(t, \alpha_{n-1}) - \varphi_u(t, \alpha_n) + G_u(t, \alpha_n) - \psi_u(t, \alpha_{n-1}) \\
&\quad - k](\alpha_n - \alpha_{n-1}) \\
&\quad - [F_u(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n) - \varphi_u(t, \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n) \\
&\quad - k](\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\
&= [F_u(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n) - \varphi_u(t, \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n) \\
&\quad - k](\alpha_n - \alpha_{n+1})
\end{aligned}$$

olur. Yani

$$p_n^A \leq [F_u(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n) - \varphi_u(t, \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n) - k]p$$

ve $p_n(0) = 0$ olduğundan Sonuç 3.2.8 gereği $p_n(t) = 0$ olur. Sonuç olarak $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$ dır. Şimdi $\alpha_{n+1} \leq \beta_{n+1}$ olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1}^A &= N(t, \alpha_n) \\
&+ [F_u(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n) - \varphi_u(t, \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n) \\
&- k](\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\
&= [f(t, \alpha_n) + F_u(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n)] \\
&+ [g(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n)] \\
&- [\varphi_u(t, \beta_n) + \psi_u(t, \alpha_n) + k](\alpha_{n+1} - \alpha_n) + h(t, \alpha_n)
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.12) den

$$\begin{aligned}
f(t, \alpha_{n+1}) &\geq f(t, \alpha_n) + F_u(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) + \varphi(t, \alpha_n) \\
&- \varphi(t, \alpha_{n+1})f(t, \alpha_n) + F_u(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\
&\leq f(t, \alpha_{n+1}) + \varphi(t, \alpha_{n+1}) - \varphi(t, \alpha_n),
\end{aligned}$$

(5.13) düzenlenip G_u nun azalan özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(t, \alpha_{n+1}) &\geq g(t, \alpha_n) + G_u(t, \alpha_{n+1})(\alpha_{n+1} - \alpha_n) + \psi(t, \alpha_n) \\
&- \psi(t, \alpha_{n+1})g(t, \alpha_{n+1}) \\
&\geq g(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) + \psi(t, \alpha_n) \\
&- \psi(t, \alpha_{n+1})g(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\
&\leq g(t, \alpha_{n+1}) + \psi(t, \alpha_{n+1}) - \psi(t, \alpha_n),
\end{aligned}$$

(5.14) ten

$$\begin{aligned}
h(t, \alpha_{n+1}) - h(t, \alpha_n) &\geq -k(\alpha_{n+1} - \alpha_n)h(t, \alpha_n) \\
&\leq h(t, \alpha_{n+1}) + k(\alpha_{n+1} - \alpha_n)
\end{aligned}$$

yerine yazıldığında ise

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1}^A &\leq f(t, \alpha_{n+1}) + \varphi(t, \alpha_{n+1}) - \varphi(t, \alpha_n) + g(t, \alpha_{n+1}) \\
&+ \psi(t, \alpha_{n+1}) - \psi(t, \alpha_n) - \varphi_u(t, \beta_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\
&- \psi_u(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) - k(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\
&+ h(t, \alpha_{n+1}) + k(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\
&= [f(t, \alpha_{n+1}) + \varphi(t, \alpha_{n+1}) - \varphi(t, \alpha_n)] \\
&+ [g(t, \alpha_{n+1}) + \psi(t, \alpha_{n+1}) - \psi(t, \alpha_n)] \\
&- \varphi_u(t, \beta_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) - \psi_u(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\
&+ h(t, \alpha_{n+1})
\end{aligned}$$

olur. $\varphi(t, \alpha_{n+1}) - \varphi(t, \alpha_n)$ ifadesinde ortalama değer teoremi uygulandığında ve $\varphi_u(t, u)$ fonksiyonunun artan özelliğinden ve $\psi(t, \alpha_{n+1}) - \psi(t, \alpha_n)$ ifadesinde ortalama değer teoremi uygulandığında ve $\psi_u(t, u)$ fonksiyonunun azalan özelliğinden yukarıdaki eşitsizlik

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1}^\Delta &\leq f(t, \alpha_{n+1}) + \varphi_u(t, \beta_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) + g(t, \alpha_{n+1}) \\ &\quad + \psi_u(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) - \varphi_u(t, \beta_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\ &\quad - \psi_u(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) + h(t, \alpha_{n+1}) \\ &= f(t, \alpha_{n+1}) + g(t, \alpha_{n+1}) + h(t, \alpha_{n+1}) = N(t, \alpha_{n+1})\end{aligned}$$

Yani $\alpha_{n+1}^\Delta \leq N(t, \alpha_{n+1})$ olup α_{n+1} alt çözümdür.

$$\begin{aligned}\beta_{n+1}^\Delta &= N(t, \beta_n) \\ &\quad + [F_u(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n) - \varphi_u(t, \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n) \\ &\quad - k](\beta_{n+1} - \beta_n) \\ &= [f(t, \beta_n) + F_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n)] \\ &\quad + [g(t, \beta_n) + G_u(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n)] \\ &\quad - \varphi_u(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) \\ &\quad - k(\beta_{n+1} - \beta_n) + h(t, \beta_n)\end{aligned}$$

elde edilir. (5.12) den

$$\begin{aligned}f(t, \beta_{n+1}) &\leq f(t, \beta_n) + F_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) + \varphi(t, \beta_n) \\ &\quad - \varphi(t, \beta_{n+1})f(t, \beta_n) + F_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) \\ &\geq f(t, \beta_{n+1}) + \varphi(t, \beta_{n+1}) - \varphi(t, \beta_n),\end{aligned}$$

(5.13) ten

$$\begin{aligned}g(t, \beta_{n+1}) &\leq g(t, \beta_n) + G_u(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) + \psi(t, \beta_n) \\ &\quad - \psi(t, \beta_{n+1})g(t, \beta_n) + G_u(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) \\ &\geq g(t, \beta_{n+1}) + \psi(t, \beta_{n+1}) - \psi(t, \beta_n)\end{aligned}$$

ve (5.14) ten

$$\begin{aligned}h(t, \beta_n) - h(t, \beta_{n+1}) &\geq k(\beta_{n+1} - \beta_n)h(t, \beta_n) \\ &\geq h(t, \beta_{n+1}) + k(\beta_{n+1} - \beta_n)\end{aligned}$$

olur. Elde edilen bu eşitsizlikler göz önüne alındığında ve $\varphi(t, \beta_{n+1}) - \varphi(t, \beta_n)$ ve $\psi(t, \beta_{n+1}) - \psi(t, \beta_n)$ ifadelerine ortalama değer teoremi uygulanıp φ_u nun artan özelliği ve ψ_u nun azalan özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\beta_{n+1}^A &\geq [f(t, \beta_{n+1}) + \varphi(t, \beta_{n+1}) - \varphi(t, \beta_n)] \\
&\quad + [g(t, \beta_{n+1}) + \psi(t, \beta_{n+1}) - \psi(t, \beta_n)] \\
&\quad - \varphi_u(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) \\
&\quad - k(\beta_{n+1} - \beta_n) + h(t, \beta_{n+1}) + k(\beta_{n+1} - \beta_n) \\
&\geq f(t, \beta_{n+1}) + \varphi_u(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) + g(t, \beta_{n+1}) \\
&\quad + \psi_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) - \varphi_u(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) \\
&\quad - \psi_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) + h(t, \beta_{n+1}) \\
&= f(t, \beta_{n+1}) + g(t, \beta_{n+1}) + h(t, \beta_{n+1}) = N(t, \beta_{n+1})
\end{aligned}$$

Yani $\beta_{n+1}^A \geq N(t, \beta_{n+1})$ olup β_{n+1} üst çözümdür. Sonuç olarak α_{n+1} ve β_{n+1} alt-üst çözüm çifti ve $N(t, u)$ Lipschitz şartını sağladığından Teorem 3.2.6 dan $\alpha_{n+1}(0) \leq \beta_{n+1}(0)$ olduğundan $\alpha_{n+1}(t) \leq \beta_{n+1}(t)$ dır. Böylece matematiksel induksiyon prensibiyle

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n \leq \alpha_{n+1} \leq \beta_{n+1} \leq \beta_n \leq \dots \leq \beta_1 \leq \beta_0$$

olur. Standart argümanlar (Arzela-Ascoli teoremi) kullanılarak (5.1) in tek çözümüne düzgün ve monoton yakınsadığı gösterilebilir. Şimdi bu yakınsamanın yarı kuadratik olduğu gösterilecektir. Bunun için $p_{n+1}(t) = u(t) - \alpha_{n+1}(t) \geq 0$ tanımlansın. $p_{n+1}(0) = u(0) - \alpha_{n+1}(0) = 0$ olduğu açıktır. $p_{n+1}(t) = u(t) - \alpha_{n+1}(t)$ ifadesinin her tarafının delta türevini alalım.

$$\begin{aligned}
p_{n+1}^{\Delta}(t) &= u^{\Delta}(t) - \alpha_{n+1}^{\Delta}(t) \\
&= N(t, \alpha_n) \\
&\quad - \{N(t, \alpha_n) \\
&\quad + [F_u(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n) - \varphi_u(t, \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n) \\
&\quad - k](\alpha_{n+1} - \alpha_n)\} \\
&= f(t, u) + g(t, u) + h(t, u) - f(t, \alpha_n) - g(t, \alpha_n) \\
&\quad - h(t, \alpha_n) \\
&\quad - [F_u(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n) - \varphi_u(t, \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n) \\
&\quad - k](\alpha_{n+1} - \alpha_n) + \varphi(t, u) + \psi(t, u) + \varphi(t, \alpha_n) \\
&\quad + \psi(t, \alpha_n) - \varphi(t, u) - \psi(t, u) - \varphi(t, \alpha_n) - \psi(t, \alpha_n) \\
&= F(t, u) - F(t, \alpha_n) + G(t, u) - G(t, \alpha_n) \\
&\quad - [F_u(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n) - \varphi_u(t, \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n) \\
&\quad - k](\alpha_{n+1} - \alpha_n) - [\varphi(t, u) - \varphi(t, \alpha_n)] \\
&\quad - [\psi(t, u) - \psi(t, \alpha_n)] + h(t, u) - h(t, \alpha_n)
\end{aligned}$$

$\varphi(t, u) - \varphi(t, \alpha_n)$ ifadesinde ortalama değer teoremi uygulandığında ve $\varphi_u(t, u)$ fonksiyonunun artan özelliğinden ve $\psi(t, u) - \psi(t, \alpha_n)$ ifadesinde ortalama değer teoremi uygulandığında ve $\psi_u(t, u)$ fonksiyonunun azalan özelliğinden yukarıdaki eşitsizlik

$$\begin{aligned}
p_{n+1}^{\Delta}(t) &\leq F(t, u) - F(t, \alpha_n) + G(t, u) - G(t, \alpha_n) \\
&\quad - [F_u(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n) - \varphi_u(t, \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n) \\
&\quad - k](\alpha_{n+1} - \alpha_n) - \varphi_u(t, \alpha_n)(u - \alpha_n) \\
&\quad - \psi_u(t, u)(u - \alpha_n) + k(u - \alpha_n) \\
&\leq F(t, u) - F(t, \alpha_n) + G(t, u) - G(t, \alpha_n) \\
&\quad - [F_u(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n) - \varphi_u(t, \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n) \\
&\quad - k](u - \alpha_n) - \varphi_u(t, \alpha_n)(u - \alpha_n) \\
&\quad - \psi_u(t, u)(u - \alpha_n) + k(u - \alpha_n)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $F(t, u) - F(t, \alpha_n)$ ve $G(t, u) - G(t, \alpha_n)$ ifadelerinde ortalama değer teoremi uygulanıp sırasıyla $F_u(t, u)$ fonksiyonunun artan özelliği ve $G_u(t, u)$ fonksiyonunun azalan özelliğinden

$$\begin{aligned}
p_{n+1}^\Delta(t) &\leq F_u(t, u)(u - \alpha_n) + G_u(t, \alpha_n)(u - \alpha_n) \\
&\quad - F_u(t, \alpha_n)(u - \alpha_n) - G_u(t, \beta_n)(u - \alpha_n) \\
&\quad + \varphi_u(t, \beta_n)(u - \alpha_n) + \psi_u(t, \alpha_n)(u - \alpha_n) \\
&\quad + k(u - \alpha_n) - \varphi_u(t, \alpha_n)(u - \alpha_n) \\
&\quad - \psi_u(t, u)(u - \alpha_n) + k(u - \alpha_n) \\
&= F_u(t, u)(u - \alpha_n) + G_u(t, \alpha_n)(u - \alpha_n) \\
&\quad - F_u(t, \alpha_n)(u - \alpha_n) \\
&\quad - G_u(t, \beta_n)(u - \alpha_n)[\varphi_u(t, \beta_n) - \varphi_u(t, \alpha_n)](u - \alpha_n) \\
&\quad - [\psi_u(t, u) - \psi_u(t, \alpha_n)](u - \alpha_n) + 2k(u - \alpha_n)
\end{aligned}$$

olur. $\varphi_u(t, \beta_n) - \varphi_u(t, \alpha_n)$ ve $\psi_u(t, u) - \psi_u(t, \alpha_n)$ ifadelerinde ortalama değer teoremi uygulandığında

$$\begin{aligned}
p_{n+1}^\Delta(t) &\leq F_u(t, u)(u - \alpha_n) - F_u(t, \alpha_n)(u - \alpha_n) \\
&\quad + G_u(t, \alpha_n)(u - \alpha_n) - G_u(t, \beta_n)(u - \alpha_n) \\
&\quad + \varphi_{uu}(t, \delta)(\beta_n - \alpha_n)(u - \alpha_n) \\
&\quad - \psi_{uu}(t, \eta)(u - \alpha_n)(u - \alpha_n) + 2k(u - \alpha_n) \\
&\leq F_u(t, u)(u - \alpha_n) - F_u(t, \alpha_n)(u - \alpha_n) \\
&\quad + G_u(t, \alpha_n)(u - \alpha_n) - G_u(t, \beta_n)(u - \alpha_n) \\
&\quad + \varphi_{uu}(t, \delta)(\beta_n - \alpha_n)(u - \alpha_n) \\
&\quad - \psi_{uu}(t, \eta)(u - \alpha_n)(u - \alpha_n) + 2k(u - \alpha_n) \\
&\quad - [F_u(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n) - \varphi_u(t, \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n) \\
&\quad - k](\alpha_{n+1} - u) \\
&= [F_u(t, u) - F_u(t, \alpha_n)](u - \alpha_n) \\
&\quad - [G_u(t, \beta_n) - G_u(t, \alpha_n)](u - \alpha_n) \\
&\quad + \varphi_{uu}(t, \delta)(\beta_n - \alpha_n)(u - \alpha_n) \\
&\quad - \psi_{uu}(t, \eta)(u - \alpha_n)(u - \alpha_n) + 2k(u - \alpha_n) \\
&\quad - [F_u(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n) - \varphi_u(t, \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n) \\
&\quad - k](\alpha_{n+1} - u)
\end{aligned}$$

elde edilir. $F_u(t, u) - F_u(t, \alpha_n)$ ve $G_u(t, \beta_n) - G_u(t, \alpha_n)$ ifadelerinde ortalama değer teoremi uygulandığında

$$\begin{aligned}
p_{n+1}^A(t) &\leq F_{uu}(t, \gamma)(u - \alpha_n)(u - \alpha_n) \\
&- G_{uu}(t, \sigma)(\beta_n - \alpha_n)(u - \alpha_n) \\
&+ \varphi_{uu}(t, \delta)(\beta_n - \alpha_n)(u - \alpha_n) \\
&- \psi_{uu}(t, \eta)(u - \alpha_n)(u - \alpha_n) + 2k(u - \alpha_n) \\
&- [F_u(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n) - \varphi_u(t, \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n) \\
&- k](\alpha_{n+1} - u) \\
&= [F_{uu}(t, \gamma) - \psi_{uu}(t, \eta)](u - \alpha_n)^2 \\
&+ [\varphi_{uu}(t, \delta) - G_{uu}(t, \sigma)](\beta_n - \alpha_n)(u - \alpha_n) \\
&+ [F_u(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n) - \varphi_u(t, \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n) \\
&- k](u - \alpha_{n+1}) + 2k(u - \alpha_n) \\
&= [f_{uu}(t, \gamma) + \varphi_{uu}(t, \gamma) - \psi_{uu}(t, \eta)](u - \alpha_n)^2 \\
&+ [\varphi_{uu}(t, \delta) - g_{uu}(t, \sigma) - \psi_{uu}(t, \sigma)](\beta_n - \alpha_n)(u - \alpha_n) \\
&+ [f_u(t, \alpha_n) + \varphi_u(t, \alpha_n) + g_u(t, \beta_n) + \psi_u(t, \beta_n) \\
&- \varphi_u(t, \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n) - k](u - \alpha_{n+1}) \\
&+ 2k(u - \alpha_n)
\end{aligned}$$

olur. Kapalı bir kümede sürekli bir fonksiyon sınırlı olduğundan aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned}
|f_{uu}| < A, |\varphi_{uu}| < B, |g_{uu}| < C, |\psi_{uu}| < D, |f_u| < E, |g_u| < T, |\varphi_u| \\
&< R, |\psi_u| < S.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{n+1}^A(t) &\leq (A + B + D)(u - \alpha_n)^2 \\
&+ (B + C + D)(\beta_n - \alpha_n)(u - \alpha_n) \\
&+ (E + 2R + T + 2S)(u - \alpha_{n+1}) + 2k(u - \alpha_n) \\
&= (A + B + D)p_n^2 + (B + C + D)p_n(p_n + q_n) \\
&+ (E + 2R + T + 2S)p_{n+1} + 2kp_n \\
&= (A + B + D)p_n^2 + (B + C + D)p_n^2 \\
&+ (B + C + D)(p_n q_n) + (E + 2R + T + 2S)p_{n+1} \\
&+ 2kp_n.
\end{aligned}$$

$(B + C + D)(p_n q_n)$ ifadesinde Cauchy eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
p_{n+1}^A(t) &\leq (A+B+D)p_n^2 + (B+C+D)p_n^2 + (B+C+D)\frac{p_n^2}{2} \\
&\quad + (B+C+D)\frac{q_n^2}{2} + (E+2R+T+2S)p_{n+1} + 2kp_n \\
&= (A+B+D)p_n^2 + \frac{B+C+D}{2}(3p_n^2 + q_n^2) \\
&\quad + (E+2R+T+2S)p_{n+1} + 2kp_n \\
&= \left(A + \frac{5B}{2} + \frac{3C}{2} + \frac{5D}{2}\right)p_n^2 + \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2} + \frac{D}{2}\right)q_n^2 \\
&\quad + (E+2R+T+2S)p_{n+1} + 2kp_n
\end{aligned}$$

Kolaylık olması açısından

$$A + \frac{5B}{2} + \frac{3C}{2} + \frac{5D}{2} = M, \frac{B}{2} + \frac{C}{2} + \frac{D}{2} = N, E + 2R + T + 2S = Y$$

alalım. O halde

$$p_{n+1}^A(t) \leq Mp_n^2 + Nq_n^2 + Yp_{n+1} + 2kp_n$$

olur. Bu eşitliliğe Gronwall eşitsizliği uygulanırsa

$$p_{n+1}^A(t) - Yp_{n+1} \leq Mp_n^2 + Nq_n^2 + 2kp_n$$

lineer denklemin her tarafını integrasyon çarpanı olan

$$\lambda = e^{-\int_0^t Y \Delta s} = e^{-Yt}$$

ile çarpalım.

$$\begin{aligned}
e^{-Yt}p_{n+1}^A \pm e^{-Yt}Wp_{n+1} &\leq [Mp_n^2 + Nq_n^2 + 2kp_n]e^{-Yt}[e^{-Yt}p_{n+1}]^A \\
&\leq [Mp_n^2 + Nq_n^2 + 2kp_n]e^{-Yt}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade 0 dan t ye integre edildiğinde,

$$\begin{aligned}
e^{-Yt}p_{n+1} &\leq p_{n+1}(0) + \int_0^t [Mp_n^2 + Nq_n^2 + 2kp_n] e^{-Ys} \Delta s p_{n+1} \\
&\leq e^{Yt} \int_0^t [Mp_n^2 + Nq_n^2 + 2kp_n] e^{-Ys} \Delta s \\
&= \int_0^t [Mp_n^2 + Nq_n^2 + 2kp_n] e^{Y(t-s)} \Delta s \\
&= [Mp_n^2 + Nq_n^2 + 2kp_n] \frac{e^{Yt} - 1}{Y} \\
&\leq [Mp_n^2 + Nq_n^2 + 2kp_n] \frac{e^{Yt}}{Y}
\end{aligned}$$

olur. J üzerinde maks alınırsa,

$$\begin{aligned}
\max_j |p_{n+1}| &\leq \left\{ M \max_j |p_n^2| + N \max_j |q_n^2| \right. \\
&\quad \left. + 2k \max_j |p_n| \right\} \frac{e^{Yt}}{Y} \max_j |u - \alpha_{n+1}| \\
&\leq \left\{ M \max_j |u - \alpha_n|^2 + N \max_j |\beta_n - u|^2 \right. \\
&\quad \left. + 2k \max_j |u - \alpha_n| \right\} \frac{e^{Yt}}{Y}
\end{aligned}$$

Böylece $\{\alpha_n(t)\}$ dizisi $u(t)$ ye yarı kuadratik yakınsar. Benzer şekilde

$$q_{n+1}(t) = \beta_{n+1}(t) - u(t) \geq 0, q_{n+1}(0) = 0$$

tanımlanarak benzer işlemler elde edilip $\{\beta_n(t)\}$ dizisinin (5.1) tek çözümü olan $u(t)$ ye yarı kuadratik yakınsadığı gösterilebilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.3. (A_1) $\alpha_0(t), \beta_0(t) \in C_{rd}[T, R]$ (5.1) in doğal tipten alt-üst çözüm çifti olsun.

(A_2) Ω_0 da $f(t, u)$ fonksiyonu, konveks $\varphi(t, u)$ fonksiyonu yardımıyla konvekslenebilir, $g(t, u)$ fonksiyonu, $\psi(t, u)$ konkav fonksiyonu yardımıyla konkavlanabilir ve $h(t, u)$ fonksiyonu ise pozitif olmayan ve azalmayan bir fonksiyon olsun. Aynı zamanda $h_u(t, u)$ tek (sağ) yönlü Lipschitz şartını sağlasın. Yani $u, v \in \Omega_0$, ve $u \geq v$ olmak üzere ve $k \geq 0$ Lipschitz sabiti olmak üzere

$$h_u(t, u) - h_u(t, v) \geq -k(u - v)$$

olsun. Burada $f_u(t, u)$, $g_u(t, u)$, $f_{uu}(t, u)$, $g_{uu}(t, u)$ var ve sürekli fonksiyonlardır. O zaman $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ dizileri vardır öyle ki (5.1) in tek çözümüne düzgün ve monoton yakınsar ve bu yakınsama kuadratiklidir.

İspat. $f(t, u), g(t, u), h(t, u)$ fonksiyonlarının $\alpha_0(t) \leq u_2 \leq u_1 \leq \beta_0(t)$ için Lipschitz şartlarını sağladığı açıktır. Kolaylık olması açısından

$$F(t, u) = f(t, u) + \varphi(t, u),$$

$$G(t, u) = g(t, u) + \psi(t, u)$$

olarak alalım. $u, v \in \Omega_0$ olmak üzere $u \geq v$ için, $F(t, u) = f(t, u) + \varphi(t, u)$ konveks olduğundan

$$\begin{aligned} f(t, u) &\geq f(t, v) + [f_u(t, v) + \varphi_u(t, v)](u - v) + \varphi(t, v) - \varphi(t, u) \\ &= F(t, v) + F_u(t, v)(u - v) - \varphi(t, u), \end{aligned} \quad (5.17)$$

$G(t, u) = g(t, u) + \psi(t, u)$ konkav olduğundan

$$\begin{aligned} g(t, u) &\leq g(t, v) + [g_u(t, v) + \psi_u(t, v)](u - v) + \psi(t, v) \\ &\quad - \psi(t, u) = G(t, v) + G_u(t, v)(u - v) - \psi(t, u), \end{aligned} \quad (5.18)$$

$h_u(t, u)$ tek yönlü Lipschitz şartını sağladığından,

$$h_u(t, u) - h_u(t, v) \geq -k(u - v) \quad (5.19)$$

yazılabilir. (5.17), (5.18) ve (5.19) göz önüne alınarak aşağıdaki yardımcı lineer başlangıç değer problemleri ele alınsın.

$$\begin{aligned} \alpha_1^A &= f(t, \alpha_0) + [F_u(t, \alpha_0) - \varphi_u(t, \beta_0)](\alpha_1 - \alpha_0) + g(t, \alpha_0) \\ &\quad + [G_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0)](\alpha_1 - \alpha_0) + h_u(t, \alpha_0) \\ &\quad - k(\alpha_1 - \alpha_0), \quad \alpha_1(0) = u_0, \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned}
\beta_1^A &= f(t, \beta_0) + [F_u(t, \alpha_0) - \varphi_u(t, \beta_0)](\beta_1 - \beta_0) + g(t, \beta_0) \\
&\quad + [G_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0)](\beta_1 - \beta_0) + h_u(t, \beta_0) \\
&\quad - k(\beta_1 - \beta_0), \beta_1(0) = u_0.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

$\alpha_0 \leq \alpha_1$ olduğu gösterilecektir. Bunun için $p = \alpha_0 - \alpha_1$ olsun. $p(0) = \alpha_0(0) - \alpha_1(0) \leq 0$ dır. $p = \alpha_0 - \alpha_1$ ifadesinin delta türevi alınıp $h(t, u)$ fonksiyonunun pozitif olmayan ve azalmayan özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
p^A &= \alpha_0^A - \alpha_1^A \leq f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) + h(t, \alpha_0) - f(t, \alpha_0) \\
&\quad - g(t, \alpha_0) - h_u(t, \alpha_0) \\
&\quad + [F_u(t, \alpha_0) + G_u(t, \beta_0) - \varphi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0) \\
&\quad - k](\alpha_0 - \alpha_1) \\
&\leq [F_u(t, \alpha_0) + G_u(t, \beta_0) - \varphi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0) \\
&\quad - k](\alpha_0 - \alpha_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. $p^A \leq Mp$ ve $p(0) \leq 0$ olduğundan Sonuç 3.2.8 den $p(t) \leq 0$ olur. Yani $\alpha_0 \leq \alpha_1$ dır. Benzer şekilde $\alpha_1 \leq \beta_0$ olduğu gösterilecektir. $p = \alpha_1 - \beta_0$ olsun. $p(0) = \alpha_1(0) - \beta_0(0) \leq 0$ dır. $p = \alpha_1 - \beta_0$ ifadesinin delta türevi alınır,

$$\begin{aligned}
p^A &= \alpha_1^A - \beta_0^A \leq f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) + h_u(t, \alpha_0) \\
&\quad + [F_u(t, \alpha_0) + G_u(t, \beta_0) - \varphi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0) \\
&\quad - k](\alpha_1 - \alpha_0) - f(t, \beta_0) - g(t, \beta_0) - h(t, \beta_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.17)–(5.19) dan elde edilecek $-f(t, \beta_0)$, $-g(t, \beta_0)$ ve $-h(t, \beta_0)$ değerleri sırasıyla yerine yazılacaktır. (5.17) den

$$\begin{aligned}
f(t, \beta_0) &\geq F(t, \alpha_0) + F_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0) - \varphi(t, \beta_0) - f(t, \beta_0) \\
&\leq -F(t, \alpha_0) - F_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0) + \varphi(t, \beta_0) \\
&= -f(t, \alpha_0) - \varphi(t, \alpha_0) - F_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0) \\
&\quad + \varphi(t, \beta_0).
\end{aligned}$$

$\varphi(t, \beta_0) - \varphi(t, \alpha_0)$ ifadesinde ortalama değer teoremi uygulanıp $\varphi(t, u)$ fonksiyonunun artan özelliğinden $\alpha_0 < \tau < \beta_0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
-f(t, \beta_0) &\leq -f(t, \alpha_0) - F_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0) + \varphi_u(t, \tau)(\beta_0 - \alpha_0) \\
&\leq -f(t, \alpha_0) - F_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0) \\
&\quad + \varphi_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \alpha_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.18) den

$$g(t, \beta_0) \geq G(t, \alpha_0) + G_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \alpha_0) - \psi(t, \beta_0)$$

$$\begin{aligned}
-g(t, \beta_0) &\leq -G(t, \alpha_0) - G_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \alpha_0) + \psi(t, \beta_0) \\
&= -g(t, \alpha_0) - \psi(t, \alpha_0) - G_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \alpha_0) \\
&\quad + \psi(t, \beta_0)
\end{aligned}$$

$\psi(t, \beta_0) - \psi(t, \alpha_0)$ ifadesinde ortalama değer teoremi uygulanıp $\psi(t, u)$ fonksiyonunun azalan özelliğinden $\alpha_0 < \xi < \beta_0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
-g(t, \beta_0) &\leq -g(t, \alpha_0) - G_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \alpha_0) + \psi_u(t, \xi)(\beta_0 - \alpha_0) \\
&\leq -g(t, \alpha_0) - G_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \alpha_0) \\
&\quad + \psi_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.19) dan

$$h_u(t, \beta_0) - h_u(t, \alpha_0) \geq -k(\beta_0 - \alpha_0)$$

$$h(t, \beta_0) \geq h_u(t, \alpha_0) - k(\beta_0 - \alpha_0)$$

$$-h(t, \beta_0) \leq -h_u(t, \alpha_0) + k(\beta_0 - \alpha_0)$$

yazılır. Bu ifadeler yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
p^4 &\leq f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) + h_u(t, \alpha_0) \\
&\quad + [F_u(t, \alpha_0) + G_u(t, \beta_0) - \varphi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0) \\
&\quad - k](\alpha_1 - \alpha_0) - f(t, \alpha_0) - F_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0) \\
&\quad + \varphi_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \alpha_0) - g(t, \alpha_0) \\
&\quad - G_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \alpha_0) + \psi_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0) \\
&\quad - h_u(t, \alpha_0) + k(\beta_0 - \alpha_0) \\
&= F_u(t, \alpha_0)\alpha_1 - F_u(t, \alpha_0)\alpha_0 + G_u(t, \beta_0)\alpha_1 \\
&\quad - G_u(t, \beta_0)\alpha_0 - \varphi_u(t, \beta_0)\alpha_1 + \varphi_u(t, \beta_0)\alpha_0 \\
&\quad - \psi_u(t, \alpha_0)\alpha_1 + \psi_u(t, \alpha_0)\alpha_0 - k\alpha_1 + k\alpha_0 \\
&\quad - F_u(t, \alpha_0)\beta_0 + F_u(t, \alpha_0)\alpha_0 + \varphi_u(t, \beta_0)\beta_0 \\
&\quad - \varphi_u(t, \beta_0)\alpha_0 - G_u(t, \beta_0)\beta_0 + G_u(t, \beta_0)\alpha_0 \\
&\quad + \psi_u(t, \alpha_0)\beta_0 - \psi_u(t, \alpha_0)\alpha_0 + k\beta_0 - k\alpha_0 \\
&= [F_u(t, \alpha_0) + G_u(t, \beta_0) - \varphi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0) \\
&\quad - k](\alpha_1 - \beta_0) \\
&= [F_u(t, \alpha_0) + G_u(t, \beta_0) - \varphi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0) \\
&\quad - k]p
\end{aligned}$$

elde edilir. $p^4 \leq Mp$ ve $p(0) \leq 0$ olduğundan Sonuç 3.2.8 den $p(t) \leq 0$ olur. Yani $\alpha_1 \leq \beta_0$ dır. Benzer şekilde $\beta_1 \leq \beta_0$ olduğu gösterilebilir. Şimdi $\alpha_1 \leq \beta_1$ olduğu gösterilecektir. Bunun için α_1 ve β_1 in sırasıyla (5.1) in alt-üst çözüm çifti olduğunu göstermek gerekir. (5.20) den

$$\begin{aligned}
\alpha_1^4 &= f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) + h_u(t, \alpha_0) \\
&\quad + [F_u(t, \alpha_0) + G_u(t, \beta_0) - \varphi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0) \\
&\quad - k](\alpha_1 - \alpha_0) \\
&= [f(t, \alpha_0) + F_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0)] \\
&\quad + [g(t, \alpha_0) + G_u(t, \beta_0)(\alpha_1 - \alpha_0)] - k(\alpha_1 - \alpha_0) \\
&\quad - \varphi_u(t, \beta_0)(\alpha_1 - \alpha_0) - \psi_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) \\
&\quad + h_u(t, \alpha_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. $G_u(t, u)$ azalan olduğundan $G_u(t, \beta_0) \leq G_u(t, \alpha_1)$ dır. Yani yukarıdaki ifade

$$\begin{aligned}
\alpha_1^A \leq & [f(t, \alpha_0) + F_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0)] \\
& + [g(t, \alpha_0) + G_u(t, \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_0)] - k(\alpha_1 - \alpha_0) \\
& - \varphi_u(t, \beta_0)(\alpha_1 - \alpha_0) - \psi_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) \\
& + h_u(t, \alpha_0)
\end{aligned}$$

olur. (5.17)–(5.19) dan sırasıyla

$$f(t, \alpha_1) \geq f(t, \alpha_0) + F_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) + \varphi(t, \alpha_0) - \varphi(t, \alpha_1)$$

$$f(t, \alpha_0) + F_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) \leq f(t, \alpha_1) + \varphi(t, \alpha_1) - \varphi(t, \alpha_0),$$

$$g(t, \alpha_1) \geq g(t, \alpha_0) + G_u(t, \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_0) + \psi(t, \alpha_0) - \psi(t, \alpha_1)$$

$$g(t, \alpha_0) + G_u(t, \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_0) \leq g(t, \alpha_1) + \psi(t, \alpha_1) - \psi(t, \alpha_0),$$

$$h_u(t, \alpha_1) - h_u(t, \alpha_0) \geq -k(\alpha_1 - \alpha_0)$$

$$h_u(t, \alpha_0) \leq h_u(t, \alpha_1) + k(\alpha_1 - \alpha_0)$$

olur. Elde edilen bu ifadeler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\alpha_1^A \leq & f(t, \alpha_1) + \varphi(t, \alpha_1) - \varphi(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_1) + \psi(t, \alpha_1) \\
& - \psi(t, \alpha_0) - k(\alpha_1 - \alpha_0) - \varphi_u(t, \beta_0)(\alpha_1 - \alpha_0) \\
& - \psi_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) + h_u(t, \alpha_1) + k(\alpha_1 - \alpha_0) \\
= & f(t, \alpha_1) + g(t, \alpha_1) + h_u(t, \alpha_1) \\
& + [\varphi(t, \alpha_1) - \varphi(t, \alpha_0)] + [\psi(t, \alpha_1) - \psi(t, \alpha_0)] \\
& - \varphi_u(t, \beta_0)(\alpha_1 - \alpha_0) - \psi_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $[\varphi(t, \alpha_1) - \varphi(t, \alpha_0)]$ ve $[\psi(t, \alpha_1) - \psi(t, \alpha_0)]$ için ayrı ayrı ortalama değer teoremi uygulanıp φ_u nun artan özelliği, ψ_u nun azalan özelliği ve $h(t, u)$ nun pozitif olmayan ve azalmayan özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\alpha_1^A &\leq f(t, \alpha_1) + g(t, \alpha_1) + h_u(t, \alpha_1) + \varphi_u(t, \xi)(\alpha_1 - \alpha_0) \\
&\quad + \psi_u(t, \tau)(\alpha_1 - \alpha_0) - \varphi_u(t, \beta_0)(\alpha_1 - \alpha_0) \\
&\quad - \psi_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) \\
&\leq f(t, \alpha_1) + g(t, \alpha_1) + h_u(t, \alpha_1) \\
&\quad + \varphi_u(t, \beta_0)(\alpha_1 - \alpha_0) + \psi_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) \\
&\quad - \varphi_u(t, \beta_0)(\alpha_1 - \alpha_0) - \psi_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) \\
&= f(t, \alpha_1) + g(t, \alpha_1) + h_u(t, \alpha_1) \\
&\leq f(t, \alpha_1) + g(t, \alpha_1) + h(t, \alpha_1)
\end{aligned}$$

Yani $\alpha_1^A \leq f(t, \alpha_1) + g(t, \alpha_1) + h(t, \alpha_1)$ olup α_1 alt çözümdür. Benzer şekilde β_1 in üst çözüm olduğunu gösterelim. (5.21) den

$$\begin{aligned}
\beta_1^A &= f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) + h_u(t, \beta_0) \\
&\quad + [F_u(t, \alpha_0) + G_u(t, \beta_0) - \varphi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0) \\
&\quad - k](\beta_1 - \beta_0) \\
&= [f(t, \beta_0) + F_u(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0)] \\
&\quad + [g(t, \beta_0) + G_u(t, \beta_0)(\beta_1 - \beta_0)] \\
&\quad - \varphi_u(t, \beta_0)(\beta_1 - \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0) \\
&\quad - k(\beta_1 - \beta_0) + h_u(t, \beta_0)
\end{aligned}$$

olur. (5.17)–(5.19) dan sırasıyla

$$f(t, \beta_0) \geq f(t, \beta_1) + F_u(t, \beta_1)(\beta_0 - \beta_1) + \varphi(t, \beta_1) - \varphi(t, \beta_0),$$

$$g(t, \beta_0) \geq g(t, \beta_1) + G_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \beta_1) + \psi(t, \beta_1) - \psi(t, \beta_0),$$

$$h_u(t, \beta_0) \geq h_u(t, \beta_1) - k(\beta_0 - \beta_1)$$

olur. Elde edilen bu ifadeler yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
\beta_1^A &\geq f(t, \beta_1) + F_u(t, \beta_1)(\beta_0 - \beta_1) + \varphi(t, \beta_1) - \varphi(t, \beta_0) \\
&\quad - F_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \beta_1) + g(t, \beta_1) + G_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \beta_1) \\
&\quad + \psi(t, \beta_1) - \psi(t, \beta_0) - G_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \beta_1) \\
&\quad - \varphi_u(t, \beta_0)(\beta_1 - \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0) \\
&\quad - k(\beta_1 - \beta_0) + h_u(t, \beta_1) - k(\beta_0 - \beta_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. F_u artan olduğundan $-F_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \beta_1) \geq -F_u(t, \beta_1)(\beta_0 - \beta_1)$ dır. O zaman

$$\begin{aligned}
\beta_1^A &\geq f(t, \beta_1) + F_u(t, \beta_1)(\beta_0 - \beta_1) + \varphi(t, \beta_1) - \varphi(t, \beta_0) \\
&\quad - F_u(t, \beta_1)(\beta_0 - \beta_1) + g(t, \beta_1) + \psi(t, \beta_1) - \psi(t, \beta_0) \\
&\quad - \varphi_u(t, \beta_0)(\beta_1 - \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0) \\
&\quad + h_u(t, \beta_1) \\
&= f(t, \beta_1) + \varphi(t, \beta_1) - \varphi(t, \beta_0) + g(t, \beta_1) \\
&\quad + \psi(t, \beta_1) - \psi(t, \beta_0) - \varphi_u(t, \beta_0)(\beta_1 - \beta_0) \\
&\quad - \psi_u(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0) + h_u(t, \beta_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\varphi(t, \beta_1) - \varphi(t, \beta_0)$ ve $\psi(t, \beta_1) - \psi(t, \beta_0)$ ifadelerine ayrı ayrı ortalama değer teoremi uygulanıp ve $\varphi_u(t, u)$ fonksiyonunun artan özelliğinden, $\psi_u(t, u)$ fonksiyonunun azalan özelliğinden ve $h(t, u)$ nun pozitif olmayan ve azalmayan özelliğinden,

$$\begin{aligned}
\beta_1^A &\geq f(t, \beta_1) + \varphi_u(t, \beta_0)(\beta_1 - \beta_0) + g(t, \beta_1) + \psi_u(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0) \\
&\quad - \varphi_u(t, \beta_0)(\beta_1 - \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0) \\
&\quad + h_u(t, \beta_1)
\end{aligned}$$

$$\beta_1^A \geq f(t, \beta_1) + g(t, \beta_1) + h(t, \beta_1)$$

Yani β_1 üst çözümdür. Böylece Teorem 3.3.8 den α_1, β_1 alt-üst çözüm çifti ve $\alpha_1(0) \leq \beta_1(0)$ olduğundan $\alpha_1(t) \leq \beta_1(t)$ olur. Yani

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \beta_0$$

dır. Şimdi

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n \leq \alpha_{n+1} \leq \beta_{n+1} \leq \beta_n \leq \dots \leq \beta_1 \leq \beta_0$$

olduğu gösterilecektir. Önce $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$ olduğu gösterilecektir. Bunun için $p_n(t) = \alpha_n(t) - \alpha_{n+1}(t)$ olsun. $p_n(0) = \alpha_n(0) - \alpha_{n+1}(0) = u_0 - u_0 = 0$ dır.

$$\begin{aligned} p_n^\Delta &= \alpha_n^\Delta - \alpha_{n+1}^\Delta \\ &= f(t, \alpha_{n-1}) + g(t, \alpha_{n-1}) + h_u(t, \alpha_{n-1}) \\ &\quad + [F_u(t, \alpha_{n-1}) + G_u(t, \beta_{n-1}) - \varphi_u(t, \beta_{n-1}) \\ &\quad - \psi_u(t, \alpha_{n-1}) - k](\alpha_n - \alpha_{n-1}) - f(t, \alpha_n) \\ &\quad - g(t, \alpha_n) - h_u(t, \alpha_n) \\ &\quad - [F_u(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n) - \varphi_u(t, \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n) \\ &\quad - k](\alpha_{n+1} - \alpha_n). \end{aligned}$$

(5.17) deki eşitsizlik düzenlendiğinde ve ortalama değer teoremi uygulanıp φ_u nun artan özelliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} f(t, \alpha_n) &\geq f(t, \alpha_{n-1}) + F_u(t, \alpha_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + \varphi(t, \alpha_{n-1}) \\ &\quad - \varphi(t, \alpha_n) \\ -f(t, \alpha_n) &\leq -f(t, \alpha_{n-1}) - F_u(t, \alpha_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + \varphi(t, \alpha_n) \\ &\quad - \varphi(t, \alpha_{n-1}) \\ -f(t, \alpha_n) &\leq -f(t, \alpha_{n-1}) - F_u(t, \alpha_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \\ &\quad + \varphi_u(t, \alpha_n)(\alpha_n - \alpha_{n-1}), \end{aligned}$$

(5.18) göz önüne alınıp ve ortalama değer teoremi uygulandığında ve ψ_u nun azalan özelliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} g(t, \alpha_n) &\geq g(t, \alpha_{n-1}) + G_u(t, \alpha_n)(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + \psi(t, \alpha_{n-1}) \\ &\quad - \psi(t, \alpha_n) \\ -g(t, \alpha_n) &\leq -g(t, \alpha_{n-1}) - G_u(t, \alpha_n)(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + \psi(t, \alpha_n) \\ &\quad - \psi(t, \alpha_{n-1}) \\ -g(t, \alpha_n) &\leq -g(t, \alpha_{n-1}) - G_u(t, \alpha_n)(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \\ &\quad + \psi_u(t, \alpha_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \end{aligned}$$

ve (5.19) dan

$$h_u(t, \alpha_n) - h_u(t, \alpha_{n-1}) \geq -k(\alpha_n - \alpha_{n-1})$$

$$h_u(t, \alpha_n) \geq h_u(t, \alpha_{n-1}) - k(\alpha_n - \alpha_{n-1})$$

$$-h_u(t, \alpha_n) \leq -h_u(t, \alpha_{n-1}) + k(\alpha_n - \alpha_{n-1})$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitsizlikler dikkate alındığında yukarıdaki eşitsizlik

$$\begin{aligned} p_n^A &\leq f(t, \alpha_{n-1}) + g(t, \alpha_{n-1}) + h_u(t, \alpha_{n-1}) \\ &\quad + [F_u(t, \alpha_{n-1}) + G_u(t, \beta_{n-1}) - \varphi_u(t, \beta_{n-1}) \\ &\quad - \psi_u(t, \alpha_{n-1}) - k](\alpha_n - \alpha_{n-1}) - f(t, \alpha_{n-1}) \\ &\quad - F_u(t, \alpha_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + \varphi_u(t, \alpha_n)(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \\ &\quad - g(t, \alpha_{n-1}) - G_u(t, \alpha_n)(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \\ &\quad + \psi_u(t, \alpha_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n-1}) - h_u(t, \alpha_{n-1}) \\ &\quad + k(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \\ &\quad + [F_u(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n) - \varphi_u(t, \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n) \\ &\quad - k](\alpha_n - \alpha_{n+1}) \end{aligned}$$

olur. G_u azalan olduğundan $G_u(t, \beta_{n-1}) \leq G_u(t, \alpha_n)$ ve φ_u artan olduğundan $-\varphi_u(t, \beta_{n-1}) \leq -\varphi_u(t, \alpha_n)$ dır. Böylece eşitsizlik

$$\begin{aligned} p_n^A &\leq [F_u(t, \alpha_{n-1}) + G_u(t, \alpha_n) - \varphi_u(t, \alpha_n) - \psi_u(t, \alpha_{n-1}) - k](\alpha_n \\ &\quad - \alpha_{n-1}) \\ &\quad - [F_u(t, \alpha_{n-1}) - \varphi_u(t, \alpha_n) + G_u(t, \alpha_n) - \psi_u(t, \alpha_{n-1}) \\ &\quad - k](\alpha_n - \alpha_{n-1}) \\ &\quad - [F_u(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n) - \varphi_u(t, \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n) \\ &\quad - k](\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\ &= [F_u(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n) - \varphi_u(t, \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n) \\ &\quad - k](\alpha_n - \alpha_{n+1}) \end{aligned}$$

olur. Yani

$$p_n^A \leq [F_u(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n) - \varphi_u(t, \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n) - k]p_n$$

ve $p_n(0) = 0$ olduğundan Sonuç 3.2.8 gereği $p_n(t) = 0$ olur. Sonuç olarak $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$ dır. Şimdi $\alpha_{n+1} \leq \beta_{n+1}$ olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1}^A &= [f(t, \alpha_n) + F_u(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n)] \\ &\quad + [g(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n)] \\ &\quad - [\varphi_u(t, \beta_n) + \psi_u(t, \alpha_n) + k](\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\ &\quad + h_u(t, \alpha_n) \end{aligned}$$

elde edilir. (5.17) den

$$\begin{aligned} f(t, \alpha_{n+1}) &\geq f(t, \alpha_n) + F_u(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) + \varphi(t, \alpha_n) \\ &\quad - \varphi(t, \alpha_{n+1}) \\ f(t, \alpha_n) + F_u(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\ &\leq f(t, \alpha_{n+1}) + \varphi(t, \alpha_{n+1}) - \varphi(t, \alpha_n), \end{aligned}$$

(5.18) deki eşitsizlik G_u nun azalan özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(t, \alpha_{n+1}) &\geq g(t, \alpha_n) + G_u(t, \alpha_{n+1})(\alpha_{n+1} - \alpha_n) + \psi(t, \alpha_n) \\ &\quad - \psi(t, \alpha_{n+1}) \\ g(t, \alpha_{n+1}) &\geq g(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) + \psi(t, \alpha_n) \\ &\quad - \psi(t, \alpha_{n+1}) \\ g(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\ &\leq g(t, \alpha_{n+1}) + \psi(t, \alpha_{n+1}) - \psi(t, \alpha_n), \end{aligned}$$

(5.19) dan

$$\begin{aligned} h_u(t, \alpha_{n+1}) - h_u(t, \alpha_n) &\geq -k(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\ h_u(t, \alpha_n) &\leq h_u(t, \alpha_{n+1}) + k(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeler dikkate alındığında

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1}^\Delta &\leq f(t, \alpha_{n+1}) + \varphi(t, \alpha_{n+1}) - \varphi(t, \alpha_n) + g(t, \alpha_{n+1}) \\
&\quad + \psi(t, \alpha_{n+1}) - \psi(t, \alpha_n) - \varphi_u(t, \beta_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\
&\quad - \psi_u(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) - k(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\
&\quad + h_u(t, \alpha_{n+1}) + k(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\
&= [f(t, \alpha_{n+1}) + \varphi(t, \alpha_{n+1}) - \varphi(t, \alpha_n)] \\
&\quad + [g(t, \alpha_{n+1}) + \psi(t, \alpha_{n+1}) - \psi(t, \alpha_n)] \\
&\quad - \varphi_u(t, \beta_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) - \psi_u(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\
&\quad + h_u(t, \alpha_{n+1})
\end{aligned}$$

olur. $\varphi(t, \alpha_{n+1}) - \varphi(t, \alpha_n)$ ve $\psi(t, \alpha_{n+1}) - \psi(t, \alpha_n)$ ifadelerine ortalama değer teoremi uygulanıp $\varphi_u(t, u)$ nun artan özelliğinden ve $\psi_u(t, u)$ nun azalan özelliğinden yukardaki eşitsizlik

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1}^\Delta &\leq f(t, \alpha_{n+1}) + \varphi_u(t, \beta_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) + g(t, \alpha_{n+1}) \\
&\quad + \psi_u(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) - \varphi_u(t, \beta_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\
&\quad - \psi_u(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) + h_u(t, \alpha_{n+1}) \\
&= f(t, \alpha_{n+1}) + g(t, \alpha_{n+1}) + h(t, \alpha_{n+1})
\end{aligned}$$

olur. Yani $\alpha_{n+1}^\Delta \leq f(t, \alpha_{n+1}) + g(t, \alpha_{n+1}) + h(t, \alpha_{n+1})$ olup α_{n+1} alt çözümdür.

$$\begin{aligned}
\beta_{n+1}^\Delta &= [f(t, \beta_n) + F_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n)] \\
&\quad + [g(t, \beta_n) + G_u(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n)] \\
&\quad - \varphi_u(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) \\
&\quad - k(\beta_{n+1} - \beta_n) + h_u(t, \beta_n)
\end{aligned}$$

yazılır. (5.17)–(5.19) dan sırasıyla

$$\begin{aligned}
f(t, \beta_{n+1}) &\leq f(t, \beta_n) + F_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) + \varphi(t, \beta_n) \\
&\quad - \varphi(t, \beta_{n+1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(t, \beta_n) + F_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) \\
\geq f(t, \beta_{n+1}) + \varphi(t, \beta_{n+1}) - \varphi(t, \beta_n),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(t, \beta_{n+1}) &\leq g(t, \beta_n) + G_u(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) + \psi(t, \beta_n) \\
&\quad - \psi(t, \beta_{n+1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(t, \beta_n) + G_u(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) \\ \geq g(t, \beta_{n+1}) + \psi(t, \beta_{n+1}) - \psi(t, \beta_n), \end{aligned}$$

$$h_u(t, \beta_n) - h_u(t, \beta_{n+1}) \geq k(\beta_{n+1} - \beta_n)$$

$$h_u(t, \beta_n) \geq h_u(t, \beta_{n+1}) - k(\beta_n - \beta_{n+1})$$

olur. Elde edilen bu eşitsizlikler yerine yazılırsa ve $\varphi(t, \beta_{n+1}) - \varphi(t, \beta_n)$ ve $\psi(t, \beta_{n+1}) - \psi(t, \beta_n)$ ortalama değer teoremi uygulanp φ_u nun artan özelliği ve ψ_u nun azalan özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \beta_{n+1}^A &\geq [f(t, \beta_{n+1}) + \varphi(t, \beta_{n+1}) - \varphi(t, \beta_n)] \\ &\quad + [g(t, \beta_{n+1}) + \psi(t, \beta_{n+1}) - \psi(t, \beta_n)] \\ &\quad - \varphi_u(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) \\ &\quad - k(\beta_{n+1} - \beta_n) + h_u(t, \beta_{n+1}) + k(\beta_{n+1} - \beta_n) \\ &\geq f(t, \beta_{n+1}) + \varphi_u(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) + g(t, \beta_{n+1}) \\ &\quad + \psi_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) - \varphi_u(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) \\ &\quad - \psi_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) + h_u(t, \beta_{n+1}) \\ &= f(t, \beta_{n+1}) + g(t, \beta_{n+1}) + h(t, \beta_{n+1}). \end{aligned}$$

Yani $\beta_{n+1}^A \geq f(t, \beta_{n+1}) + g(t, \beta_{n+1}) + h(t, \beta_{n+1})$ olup β_{n+1} üst çözümdür. Sonuç olarak α_{n+1} ve β_{n+1} alt-üst çözüm çifti ve $\alpha_{n+1}(0) \leq \beta_{n+1}(0)$ olduğundan Teorem 3.3.8'den $\alpha_{n+1}(t) \leq \beta_{n+1}(t)$ olur. Böylece matematiksel induksiyon prensibiyle

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n \leq \alpha_{n+1} \leq \beta_{n+1} \leq \beta_n \leq \dots \leq \beta_1 \leq \beta_0$$

olur. Standart argümanlar (Arzela-Ascoli teoremi) kullanılarak bu dizilerin (5.1) in tek çözümüne düzgün ve monoton yakınsadığı gösterilebilir. Şöyle ki α_0 ve β_0 sınırlı olduğundan her $t \in N$ için $|\alpha_0| \leq L_1$ ve $|\beta_0| \leq L_2$ olacak şekilde L_1, L_2 vardır. Her $m > 0$ için $\alpha_0 \leq \beta_m \leq \beta_0$ olduğundan dolayı $\{\beta_m(t)\}$ düzgün sınırlıdır. Benzer şekilde $\{\alpha_m(t)\}$ de düzgün snrl olduğu gösterilebilir. Şimdi $\{\beta_m(t)\}$ nin eşşürekli olduğunu gösterelim. Bunun için $0 \leq t_1 \leq t_2$ ve $m > 0$ için

$$\begin{aligned}
& |\beta_m(t_1) - \beta_m(t_2)| \\
&= \left| u_0 \right. \\
&\quad + \int_0^{t_1} [f(s, \beta_{m-1}(s) - K(\beta_m(s) - \beta_{m-1}(s)))] \Delta s - u_0 \\
&\quad \left. - \int_0^{t_2} [f(s, \beta_{m-1}(s) - K(\beta_m(s) - \beta_{m-1}(s)))] \Delta s \right| \\
&\leq \int_{t_2}^{t_1} |f(s, \beta_{m-1}(s) - K(\beta_m(s) - \beta_{m-1}(s))| \Delta s
\end{aligned}$$

elde edilir ki $\{\beta_m(t)\}$ ve $\{\alpha_m(t)\}$ dizileri düzgün sınırlı ve $f(t, u), g(t, u), h(t, u)$ fonksiyonları sınırlı olduğundan m den bağımsız bir L vardır öyle ki

$$\begin{aligned}
& |\beta_m(t_1) - \beta_m(t_2)| \\
&\leq \int_{t_2}^{t_1} |[f(s, \beta_{m-1}(s)) + g(s, \beta_{m-1}(s)) \\
&\quad - h(s, \alpha_{m-1}(s))]| \Delta s \leq L|t_1 - t_2|
\end{aligned}$$

olur. Buradan her $\varepsilon > 0$ için $|t_1 - t_2| < \delta$ iken $|\beta_m(t_1) - \beta_m(t_2)| < \varepsilon$ sağlanacak şekilde $\delta = \frac{\varepsilon}{L} > 0$ seçilirse $\{\beta_m(t)\}$ eşsürekli olur. Benzer şekilde $\{\alpha_m(t)\}$ nin de eşsürekli olduğu gösterilebilir. Arzela-Ascoli teoremine göre $\{\alpha_m(t)\}$ ve $\{\beta_m(t)\}$ dizileri (5.1) in tek çözümüne düzgün ve monoton yakınsar. Benzer şekilde yakınsamanın kuadratik olduğu gösterilebilir.

Teorem 5.4. (A_1) $\alpha_0(t), \beta_0(t) \in C_{rd}[T, R]$ (5.1) in doğal tipten alt-üst çözüm çifti olsun.

(A_2) Ω_0 da $f(t, u)$ fonksiyonu, konveks $\varphi(t, u)$ fonksiyonu yardımıyla konvekslenebilir, $g(t, u)$ fonksiyonu, $\psi(t, u)$ konkav fonksiyonu yardımıyla konkavlanabilir ve $h(t, u)$ fonksiyonu ise sürekli olsun. Burada $f_u(t, u)$, $g_u(t, u)$, $f_{uu}(t, u)$, $g_{uu}(t, u)$, $\varphi_u(t, u)$, $\varphi_{uu}(t, u)$, $\psi_u(t, u)$, $\psi_{uu}(t, u)$ var ve süreklidir. O zaman $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ dizileri vardır öyle ki (5.1) in tek çözümüne yakınsar ve bu yakınsama zayıf kuadrattır.

İspat. $f(t, u), g(t, u)$ fonksiyonlar $\alpha_0(t) \leq u_2 \leq u_1 \leq \beta_0(t)$ için

Lipschitz şartlarını sağladığı açıktır. Kolaylık olması açısından

$$F(t, u) = f(t, u) + \varphi(t, u),$$

$$G(t, u) = g(t, u) + \psi(t, u),$$

olarak alacağız. (A_2) den $u, v \in \Omega_0$ olmak üzere $u \geq v$ için, $F(t, u) = f(t, u) + \varphi(t, u)$ konveks olduğundan

$$\begin{aligned} f(t, u) &\geq f(t, v) + [f_u(t, v) + \varphi_u(t, v)](u - v) + \varphi(t, v) - \varphi(t, u) \\ &= F(t, v) + F_u(t, v)(u - v) - \varphi(t, u) \end{aligned} \quad (5.22)$$

$G(t, u) = g(t, u) + \psi(t, u)$ konkav olduğundan

$$\begin{aligned} g(t, u) &\geq g(t, v) + [g_u(t, u) + \psi_u(t, u)](u - v) + \psi(t, v) \\ &\quad - \psi(t, u) = G(t, v) + G_u(t, u)(u - v) - \psi(t, u) \end{aligned} \quad (5.23)$$

yazılabilir. (5.22) ve (5.23) ü göz önüne alarak aşağıdaki

$$\begin{aligned} u^A &= w(t, u; \alpha_0, \beta_0) \\ &= f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) + h(t, u) \\ &\quad + [f_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0) - \varphi_u(t, \beta_0)](u - \alpha_0) \\ &\quad + [g_u(t, \beta_0) + \psi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0)](u - \alpha_0), u(0) \\ &= u_0, \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} v^A &= W(t, v; \alpha_0, \beta_0) \\ &= f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) + h(t, v) \\ &\quad + [f_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0) - \varphi_u(t, \beta_0)](v - \alpha_0) \\ &\quad + [g_u(t, \beta_0) + \psi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0)](v - \alpha_0), v(0) \\ &= u_0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

yardımcı lineer başlangıç değer problemlerini ele alalım. (A_1) den $\alpha_0^A \leq f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) + h(t, \alpha_0)$ olduğundan

$$f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) + h(t, \alpha_0) = w(t, \alpha_0; \alpha_0, \beta_0)$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla

$$\alpha_0^A \leq w(t, \alpha_0; \alpha_0, \beta_0).$$

Yani α_0 (5.24) ün alt çözümüdür. Benzer şekilde, β_0 , (5.1) in üst çözümü olduğundan $\beta_0^A \geq f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) + h(t, \beta_0)$ dır. (5.22) den

$$\begin{aligned} f(t, \beta_0) &\geq f(t, \alpha_0) + [f_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0)](\beta_0 - \alpha_0) + \varphi(t, \alpha_0) \\ &\quad - \varphi(t, \beta_0), \end{aligned}$$

(5.23) ten

$$\begin{aligned} g(t, \beta_0) &\geq g(t, \alpha_0) + [g_u(t, \beta_0) + \psi_u(t, \beta_0)](\beta_0 - \alpha_0) + \psi(t, \alpha_0) \\ &\quad - \psi(t, \beta_0) \end{aligned}$$

yazılabilir. Elde edilen bu eşitsizliklerde ortalama değer teoremi uygulanıp yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \beta_0^A &\geq f(t, \alpha_0) + [f_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0)](\beta_0 - \alpha_0) \\ &\quad - \varphi_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \alpha_0) + g(t, \alpha_0) \\ &\quad + [g_u(t, \beta_0) + \psi_u(t, \beta_0)](\beta_0 - \alpha_0) \\ &\quad - \psi_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0) + h(t, \beta_0) = w(t, \beta_0; \alpha_0, \beta_0) \end{aligned}$$

olur. Yani $\beta_0^A \geq w(t, \beta_0; \alpha_0, \beta_0)$ olup β_0 (5.24) ün üst çözümüdür. α_0, β_0 (5.24) denkleminin alt-üst çözümleri olduğundan Teorem 3.3.8 den (5.24) ün $\alpha_1(t)$ şeklinde tek çözümü var ve $\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t) \leq \beta_0(t)$ dır. Benzer şekilde, α_0 ve β_0 ın (5.25) in alt-üst çözümleri olduğu gösterilecektir.

(A₁) den $\alpha_0^A \leq f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) + h(t, \alpha_0)$ dır. (5.22) den

$$\begin{aligned} f(t, \alpha_0) &\leq f(t, \beta_0) + [f_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0)](\alpha_0 - \beta_0) + \varphi(t, \beta_0) \\ &\quad - \varphi(t, \alpha_0) \\ &\leq f(t, \beta_0) + [f_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0)](\alpha_0 - \beta_0) \\ &\quad - \varphi_u(t, \beta_0)(\alpha_0 - \beta_0) \end{aligned}$$

(5.23) ten

$$\begin{aligned}
g(t, \alpha_0) &\leq g(t, \beta_0) + [g_u(t, \beta_0) + \psi_u(t, \beta_0)](\alpha_0 - \beta_0) + \psi(t, \beta_0) \\
&\quad - \psi(t, \alpha_0) \\
&\leq g(t, \beta_0) + [g_u(t, \beta_0) + \psi_u(t, \beta_0)](\alpha_0 - \beta_0) \\
&\quad - \psi_u(t, \alpha_0)(\alpha_0 - \beta_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitsizlikler yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\alpha_0^A &\leq f(t, \beta_0) + [f_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0)](\alpha_0 - \beta_0) \\
&\quad - \varphi_u(t, \beta_0)(\alpha_0 - \beta_0) + g(t, \beta_0) \\
&\quad + [g_u(t, \beta_0) + \psi_u(t, \beta_0)](\alpha_0 - \beta_0) \\
&\quad - \psi_u(t, \alpha_0)(\alpha_0 - \beta_0) + h(t, \beta_0) = W(t, \alpha_0; \alpha_0, \beta_0)
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece

$$\alpha_0^A \leq W(t, \alpha_0; \alpha_0, \beta_0)$$

olup α_0 , (5.25) in alt çözümüdür. Benzer şekilde, β_0 , (5.1) in üst çözümü olduğundan $\beta_0^A \geq f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) + h(t, \beta_0)$ dır. Yani

$$\beta_0^A \geq f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) + h(t, \beta_0) = W(t, \beta_0; \alpha_0, \beta_0).$$

Sonuç olarak β_0 , (5.25) in üst çözümüdür. α_0, β_0 (5.25) denkleminin alt-üst çözümleri olduğundan Teorem 3.3.8 e göre (5.25) in $\beta_1(t)$ şeklinde tek çözümü var ve $\alpha_0(t) \leq \beta_1(t) \leq \beta_0(t)$ dır. Şimdi $\alpha_1(t) \leq \beta_1(t)$ olduğu gösterilecektir. Bunun için $\alpha_1(t)$ ve $\beta_1(t)$ in alt-üst çözüm çifti olduğunu göstermek gerekir. (5.24) ten

$$\begin{aligned}
\alpha_1^A &= f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) + h(t, \alpha_1) \\
&\quad + [f_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0) - \varphi_u(t, \beta_0)](\alpha_1 - \alpha_0) \\
&\quad + [g_u(t, \beta_0) + \psi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0)](\alpha_1 - \alpha_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.22) ve (5.23) ten sırasıyla

$$\begin{aligned}
f(t, \alpha_0) &\leq f(t, \alpha_1) + [f_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0)](\alpha_0 - \alpha_1) + \varphi(t, \alpha_1) \\
&\quad - \varphi(t, \alpha_0) \\
&\leq f(t, \alpha_1) + [f_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0)](\alpha_0 - \alpha_1) \\
&\quad + \varphi_u(t, \beta_0)(\alpha_1 - \alpha_0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(t, \alpha_0) &\leq g(t, \alpha_1) + [g_u(t, \alpha_1) + \psi_u(t, \alpha_1)](\alpha_0 - \alpha_1) + \psi(t, \alpha_1) \\
&\quad - \psi(t, \alpha_0) \\
&\leq g(t, \alpha_1) + [g_u(t, \alpha_1) + \psi_u(t, \alpha_1)](\alpha_0 - \alpha_1) \\
&\quad + \psi_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\alpha_1^A &\leq f(t, \alpha_1) + [f_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0)](\alpha_0 - \alpha_1) \\
&\quad + \varphi_u(t, \beta_0)(\alpha_1 - \alpha_0) \\
&\quad + [f_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0)](\alpha_1 - \alpha_0) \\
&\quad - \varphi_u(t, \beta_0)(\alpha_1 - \alpha_0) + g(t, \alpha_1) \\
&\quad + [g_u(t, \alpha_1) + \psi_u(t, \alpha_1)](\alpha_0 - \alpha_1) \\
&\quad + \psi_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) \\
&\quad + [g_u(t, \alpha_1) + \psi_u(t, \alpha_1)](\alpha_1 - \alpha_0) \\
&\quad - \psi_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) + h(t, \alpha_1) \\
&= f(t, \alpha_1) + g(t, \alpha_1) + h(t, \alpha_1)
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\alpha_1^A \leq f(t, \alpha_1) + g(t, \alpha_1) + h(t, \alpha_1)$$

olup α_1 alt çözümdür. Benzer şekilde (5.25) ten

$$\begin{aligned}
\beta_1^A &= W(t, \alpha_0, \beta_0; \beta_1) \\
&= f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) + h(t, \beta_1) \\
&\quad + [f_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0) - \varphi_u(t, \beta_0)](\beta_1 - \beta_0) \\
&\quad + [g_u(t, \beta_0) + \psi_u(t, \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0)](\beta_1 - \beta_0)
\end{aligned}$$

yazılır. $\beta_0 \geq \beta_1$ olduğundan (5.22) ve (5.23) ten sırasıyla $u \rightarrow \beta_0$ ve $v \rightarrow \beta_1$ dönüşümleri yapıldığında

$$f(t, \beta_0) \geq f(t, \beta_1) + F_u(t, \beta_1)(\beta_0 - \beta_1) - [\varphi(t, \beta_0) - \varphi(t, \beta_1)],$$

$$g(t, \beta_0) \geq g(t, \beta_1) + G_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \beta_1) - [\psi(t, \beta_0) - \psi(t, \beta_1)]$$

elde edilir. Yukarıda elde edilen eşitsizlikler yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \beta_1^A &\geq f(t, \beta_1) + F_u(t, \beta_1)(\beta_0 - \beta_1) + \varphi(t, \beta_1) - \varphi(t, \beta_0) \\ &\quad + F_u(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0) - \varphi_u(t, \beta_0)(\beta_1 - \beta_0) + g(t, \beta_1) \\ &\quad + G_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \beta_1) + \psi(t, \beta_1) - \psi(t, \beta_0) \\ &\quad + G_u(t, \beta_0)(\beta_1 - \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0) + h(t, \beta_1) \end{aligned}$$

elde edilir. Ortalama değer teoremleri ve fonksiyonların konveks ve konkav özellikleri kullanılıp yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \beta_1^A &\geq f(t, \beta_1) + F_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \beta_1) + \varphi_u(t, \beta_0)(\beta_1 - \beta_0) \\ &\quad + F_u(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0) - \varphi_u(t, \beta_0)(\beta_1 - \beta_0) + g(t, \beta_1) \\ &\quad + G_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \beta_1) + \psi_u(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0) \\ &\quad + G_u(t, \beta_0)(\beta_1 - \beta_0) - \psi_u(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0) + h(t, \beta_1) \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$\beta_1^A \geq f(t, \beta_1) + g(t, \beta_1) + h(t, \beta_1)$$

elde edilir. Böylece α_1 ve β_1 alt-üst çözümler olur. $\alpha_1(0) \leq \beta_1(0)$ olduğundan dolayı Teorem 3.2.6 dan $\alpha_1(t) \leq \beta_1(t)$ olur. Sonuç olarak

$$\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t) \leq \beta_1(t) \leq \beta_0(t)$$

olur. Benzer işlemler yapılarak bir aşama sonrası olan $\alpha_2(t)$ ve $\beta_2(t)$ nin varlığından Teorem 3.3.8 gereği ve sıralamasından Teorem 3.2.6 gereği bahsedilebilir. Bu işlem bu şekilde devam ettirilirse

$$\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t) \leq \dots \leq \alpha_n(t) \leq \beta_n(t) \leq \dots \leq \beta_2(t) \leq \beta_1(t) \leq \beta_0(t)$$

elde edilir. $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ sırasıyla

$$\alpha_{n+1}^\Delta = w(t, \alpha_n, \beta_n; \alpha_{n+1}), \alpha_{n+1}(0) = u_0, \quad (5.26)$$

$$\beta_{n+1}^\Delta = W(t, \alpha_n, \beta_n; \beta_{n+1}), \beta_{n+1}(0) = u_0 \quad (5.27)$$

BDP çözümleri olmakla birlikte düzgün sınırlıdır. Ayrıca $f(t, u)$, $g(t, u)$ ve $h(t, u)$ sınırlı olduğundan $\{\alpha_n^\Delta(t)\}$ ve $\{\beta_n^\Delta(t)\}$ dizileri de T de düzgün sınırlıdır. Bu ise $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ dizilerinin eşsürekli olduğunu gösterir. Diziler düzgün sınırlı ve eşsürekli olduğundan Arzela-Ascoli Teoremi gereğince $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ dizileri (5.1) in tek çözümü olan $u(t)$ ye düzgün ve monoton yakınsar. Şimdi bu yakınsamanın zayıf kuadratik olduğu gösterilecektir. Bunun için

$$p_{n+1}(t) = u(t) - \alpha_{n+1}(t) \geq 0, p_{n+1}(0) = 0,$$

$$q_{n+1}(t) = \beta_{n+1}(t) - u(t) \geq 0, q_{n+1}(0) = 0$$

tanımlansın. Her tarafın delta türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} p_{n+1}^\Delta &= u^\Delta - \alpha_{n+1}^\Delta \\ &= f(t, u) + g(t, u) + h(t, u) - \{f(t, \alpha_n) + g(t, \alpha_n) \\ &\quad + h(t, \alpha_{n+1}) \\ &\quad + [F_u(t, \alpha_n) + G_u(t, \beta_n) - \varphi_u(t, \beta_n) \\ &\quad - \psi_u(t, \alpha_n)](\alpha_{n+1} - \alpha_n) \end{aligned}$$

bazı terimler eklenip yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned}
p_{n+1}^A &= f(t, u) + g(t, u) + h(t, u) - f(t, \alpha_n) - g(t, \alpha_n) \\
&\quad - h(t, \alpha_{n+1}) - F_u(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - u) \\
&\quad - F_u(t, \alpha_n)(u - \alpha_n) - G_u(t, \beta_n)(\alpha_{n+1} - u) \\
&\quad - G_u(t, \beta_n)(u - \alpha_n) + \varphi_u(t, \beta_n)(\alpha_{n+1} - u) \\
&\quad + \varphi_u(t, \beta_n)(u - \alpha_n) + \psi_u(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - u) \\
&\quad + \psi_u(t, \alpha_n)(u - \alpha_n) + \varphi(t, u) - \varphi(t, u) + \varphi(t, \alpha_n) \\
&\quad - \varphi(t, \alpha_n) + \psi(t, u) - \psi(t, u) + \psi(t, \alpha_n) - \psi(t, \alpha_n) \\
&= F(t, u) - F(t, \alpha_n) + G(t, u) - G(t, \alpha_n) \\
&\quad - F_u(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - u) - F_u(t, \alpha_n)(u - \alpha_n) \\
&\quad - G_u(t, \beta_n)(\alpha_{n+1} - u) - G_u(t, \beta_n)(u - \alpha_n) \\
&\quad + \varphi_u(t, \beta_n)(\alpha_{n+1} - u) + \varphi_u(t, \beta_n)(u - \alpha_n) \\
&\quad + \psi_u(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - u) + \psi_u(t, \alpha_n)(u - \alpha_n) \\
&\quad + \varphi(t, \alpha_n) - \varphi(t, u) + \psi(t, \alpha_n) - \psi(t, u) + h(t, u) \\
&\quad - h(t, \alpha_{n+1}) \\
&\leq F_u(t, u)(u - \alpha_n) + G_u(t, \alpha_n)(u - \alpha_n) \\
&\quad + [F_u(t, \alpha_n) - \varphi_u(t, \beta_n)](u - \alpha_{n+1}) \\
&\quad - F_u(t, \alpha_n)(u - \alpha_n) \\
&\quad + [G_u(t, \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n)](u - \alpha_{n+1}) \\
&\quad - G_u(t, \beta_n)(u - \alpha_n) + \varphi_u(t, \beta_n)(u - \alpha_n) \\
&\quad + \psi_u(t, \alpha_n)(u - \alpha_n) - \varphi_u(t, u)(u - \alpha_n) \\
&\quad - \psi_u(t, \alpha_n)(u - \alpha_n) + h(t, u) - h(t, \alpha_{n+1}) \\
&= [F_u(t, u) - F_u(t, \alpha_n)](u - \alpha_n) \\
&\quad + [G_u(t, \alpha_n) - G_u(t, \beta_n)](u - \alpha_n) \\
&\quad + [[F_u(t, \alpha_n) - \varphi_u(t, \beta_n)](u - \alpha_{n+1})] \\
&\quad + [G_u(t, \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n)](u - \alpha_{n+1}) \\
&\quad + [\varphi_u(t, \beta_n) - \varphi_u(t, u)](u - \alpha_n) + h(t, u) \\
&\quad - h(t, \alpha_{n+1})
\end{aligned}$$

elde edilir. Ardından ortalama değeri teoremi uygulanıp eşitsizlik yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& F_{uu}(t, a)(u - \alpha_n)(u - \alpha_n) - G_{uu}(t, b)(\beta_n - \alpha_n)(u - \alpha_n) \\
& + [F_u(t, \alpha_n) - \varphi_u(t, \beta_n)](u - \alpha_{n+1}) \\
& + [G_u(t, \beta_n) - \psi_u(t, \alpha_n)](u - \alpha_{n+1}) \\
& + \varphi_{uu}(t, c)(\beta_n - u)(u - \alpha_n) + h(t, u) - h(t, \alpha_{n+1})
\end{aligned}$$

olur. Burada $\alpha_n < a < u$, $\alpha_n < b < \beta_n$, $u < c < \beta_n$ dır. Kapalı bir kümede sürekli fonksiyonlar sınırlı olduğundan

$$|F_{uu}(t, u)| \leq A, \quad |G_{uu}(t, u)| \leq B, \quad |F_u(t, u) - \varphi_u(t, u)| \leq C,$$

$$|G_u(t, u) - \psi_u(t, u)| \leq D, \quad |\varphi_{uu}(t, u)| \leq E, \quad |h(t, u) - h(t, \alpha_{n+1})| \leq M$$

olarak alınabilir. Burada A, B, C, D, E, M pozitif sabitlerdir. O halde

$$\begin{aligned}
p_{n+1}^A & \leq Ap_n^2 + Bp_nq_n + Bp_n^2 + Cp_{n+1} + Dp_{n+1} + Ep_nq_n + M \\
& = (A + B)p_n^2 + (B + E)p_nq_n + (C + D)p_{n+1} + M
\end{aligned}$$

elde edilir. $p_nq_n \leq \frac{p_n^2}{2} + \frac{q_n^2}{2}$ Cauchy eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
p_{n+1}^A & \leq (A + B)p_n^2 + \frac{B + E}{2}p_n^2 + \frac{B + E}{2}q_n^2 + (C + D)p_{n+1} + M \\
& = \frac{2A + 3B}{2}p_n^2 + \frac{B + E}{2}q_n^2 + (C + D)p_{n+1} + M
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu ifade p_{n+1} e göre lineerdir.

$$p_{n+1}^A - (C + D)p_{n+1} \leq \frac{2A + 3B}{2}p_n^2 + \frac{B + E}{2}q_n^2 + M$$

ifadesine Gronwall eşitsizliği uygulamak için

$$\lambda = e^{-\int_0^t (C+D) \Delta s} = e^{-(C+D)t}$$

olmak üzere eşitsizliğin her tarafını λ ile çarparsak,

$$\begin{aligned}
& e^{-(C+D)t}p_{n+1}^A - (C + D)e^{-(C+D)t}p_{n+1} \\
& \leq \left[\frac{2A + 3B}{2}p_n^2 + \frac{B + E}{2}q_n^2 + M \right] e^{-(C+D)t}
\end{aligned}$$

$$[p_{n+1}e^{-(C+D)t}]^\Delta \leq \left[\frac{2A+3B}{2} p_n^2 + \frac{B+E}{2} q_n^2 + M \right] e^{-(C+D)t}.$$

Bu ifade 0 dan t ye integre edildiğinde,

$$\begin{aligned} p_{n+1}e^{-(C+D)t} &\leq p_{n+1}(0) \\ &+ \int_0^t \left[\left(\frac{2A+3B}{2} \right) p_n^2 + \left(\frac{B+E}{2} \right) q_n^2 \right. \\ &\left. + M \right] e^{(C+D)(t-s)} \Delta s \\ &= \left[\left(\frac{2A+3B}{2} \right) p_n^2 + \left(\frac{B+E}{2} \right) q_n^2 \right. \\ &\left. + M \right] \int_0^t e^{(C+D)(t-s)} \Delta s. \end{aligned}$$

$J = T^k$ üzerinde *maks* alınırsa,

$$\begin{aligned} maks_J |p_{n+1}| &\leq maks_J \left| \left[\left(\frac{2A+3B}{2} \right) p_n^2 + \left(\frac{B+E}{2} \right) q_n^2 + M \right] \frac{e^{(C+D)t}}{C+D} \right| \\ &= \left(\frac{2A+3B}{2} \right) \frac{e^{(C+D)t}}{C+D} maks_J |p_n^2| \\ &+ \left(\frac{B+E}{2} \right) \frac{e^{(C+D)t}}{C+D} maks_J |q_n^2| + M \frac{e^{(C+D)t}}{C+D}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} maks_J |u - \alpha_{n+1}| &\leq \left(\frac{2A+3B}{2} \right) \frac{e^{(C+D)t}}{C+D} maks_J |u - \alpha_n|^2 \\ &+ \left(\frac{B+E}{2} \right) \frac{e^{(C+D)t}}{C+D} maks_J |\beta_n - u|^2 + M \frac{e^{(C+D)t}}{C+D}. \end{aligned}$$

Böylece $\{\alpha_n(t)\}$ dizisi $u(t)$ ye zayıf kuadratik yakınsar. Benzer şekilde

$$q_{n+1}(t) = \beta_{n+1}(t) - u(t) \geq 0, q_{n+1}(0) = 0$$

tanımlansın. Her tarafın delta türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
q_{n+1}^\Delta &= \beta_{n+1}^\Delta - u^\Delta \\
&= f(t, \beta_n) + f_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) + g(t, \beta_n) \\
&\quad + [g_u(t, \alpha_n) + \varphi_u(t, \alpha_n)](\beta_{n+1} - \beta_n) \\
&\quad - [\varphi(t, \beta_{n+1}) - \varphi(t, \beta_n)] + h(t, \beta_n) \\
&\quad + h_u(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) \\
&\quad - \{f(t, u) + g(t, u) + h(t, u)\} \\
&= f(t, \beta_n) + f_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) - f(t, u) \\
&\quad + g(t, \beta_n) + [g_u(t, \alpha_n) + \varphi_u(t, \alpha_n)](\beta_{n+1} - \beta_n) \\
&\quad - [\varphi(t, \beta_{n+1}) - \varphi(t, \beta_n)] - g(t, u) + h(t, \beta_n) \\
&\quad + h_u(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) - h(t, u)
\end{aligned}$$

olur. Bu ifade yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
q_{n+1}^\Delta &= [f(t, \beta_n) - f(t, u)] + f_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) \\
&\quad + [g(t, \beta_n) + \varphi(t, \beta_n)] - [g(t, u) + \varphi(t, u)] \\
&\quad + [g_u(t, \alpha_n) + \varphi_u(t, \alpha_n)](\beta_{n+1} - \beta_n) \\
&\quad - [\varphi(t, \beta_{n+1}) - \varphi(t, u)] + [h(t, \beta_n) - h(t, u)] \\
&\quad + h_u(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n)
\end{aligned}$$

yazılır. Burada kolaylık olması açısından $g(t, u) + \varphi(t, u) = F(t, u)$ alınıp yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
q_{n+1}^\Delta &= [f(t, \beta_n) - f(t, u)] + f_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) \\
&\quad + [F(t, \beta_n) - F(t, u)] + F_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) \\
&\quad - [\varphi(t, \beta_{n+1}) - \varphi(t, u)] + [h(t, \beta_n) - h(t, u)] \\
&\quad + h_u(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n)
\end{aligned}$$

elde edilir. α_n ve β_n tanımlar da dikkate alınıp fonksiyonlara ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
q_{n+1}^A &= f_u(t, a)(\beta_n - u) + f_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) + F_u(t, c)(\beta_n - u) \\
&\quad + F_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) - \varphi_u(t, d)(\beta_{n+1} - u) \\
&\quad + h_u(t, f)(\beta_n - u) + h_u(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) \\
&= f_u(t, a)q_n + f_u(t, \alpha_n)(q_{n+1} - q_n) + F_u(t, c)q_n \\
&\quad + F_u(t, \alpha_n)(q_{n+1} - q_n) - \varphi_u(t, d)q_{n+1} + h_u(t, f)q_n \\
&\quad + h_u(t, \beta_n)(q_{n+1} - q_n) \\
&= q_n[f_u(t, a) - f_u(t, \alpha_n)] + q_{n+1}f_u(t, \alpha_n) \\
&\quad + q_n[F_u(t, c) - F_u(t, \alpha_n)] \\
&\quad + q_{n+1}[F_u(t, \alpha_n) - \varphi_u(t, d)] \\
&\quad + q_n[h_u(t, f) - h_u(t, \beta_n)] + q_{n+1}h_u(t, \beta_n) \\
&\leq q_n[f_u(t, \beta_n) - f_u(t, \alpha_n)] + q_{n+1}f_u(t, \alpha_n) \\
&\quad + q_n[F_u(t, \beta_n) - F_u(t, \alpha_n)] \\
&\quad + q_{n+1}[F_u(t, \alpha_n) - \varphi_u(t, \alpha_n)] \\
&\quad + q_n[h_u(t, u) - h_u(t, \beta_n)] + q_{n+1}h_u(t, \beta_n)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $u < a < \beta_n$, $u < c < \beta_n$, $u < d < \beta_{n+1}$, $u < f < \beta_n$ dir. Fonksiyonlara bir kere daha ortalama değeri teoremi uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
q_{n+1}^A &\leq q_n f_{uu}(t, b)(\beta_n - \alpha_n) + f_u(t, \alpha_n)q_{n+1} \\
&\quad + q_n F_{uu}(t, e)(\beta_n - \alpha_n) \\
&\quad + q_{n+1}[F_u(t, \alpha_n) - \varphi_u(t, \alpha_n)] + q_n h_{uu}(t, h)(u - \beta_n) \\
&\quad + h_u(t, \beta_n)q_{n+1} \\
&= q_n f_{uu}(t, b)(q_n + p_n) + f_u(t, \alpha_n)q_{n+1} \\
&\quad + q_n F_{uu}(t, e)(q_n + p_n) \\
&\quad + q_{n+1}[F_u(t, \alpha_n) - \varphi_u(t, \alpha_n)] + q_n h_{uu}(t, h)(-q_n) \\
&\quad + h_u(t, \beta_n)q_{n+1} \\
&= q_n^2 f_{uu}(t, b) + p_n q_n f_{uu}(t, b) + f_u(t, \alpha_n)q_{n+1} \\
&\quad + q_n^2 F_{uu}(t, e) + p_n q_n F_{uu}(t, e) \\
&\quad + q_{n+1}[F_u(t, \alpha_n) - \varphi_u(t, \alpha_n)] - q_n^2 h_{uu}(t, h) \\
&\quad + h_u(t, \beta_n)q_{n+1}
\end{aligned}$$

olur. Burada $\alpha_n < b < \beta_n$, $\alpha_n < e < \beta_n$, $u < h < \beta_n$ dir. $F(t, u) = g(t, u) + \varphi(t, u)$ olarak yeniden yazılırsa,

$$\begin{aligned}
q_{n+1}^A &\leq q_n^2 f_{uu}(t, b) + p_n q_n f_{uu}(t, b) + f_u(t, \alpha_n) q_{n+1} \\
&\quad + q_n^2 [g_{uu}(t, e) + \varphi_{uu}(t, e)] \\
&\quad + p_n q_n [g_{uu}(t, e) + \varphi_{uu}(t, e)] \\
&\quad + q_{n+1} [g_u(t, \alpha_n) + \varphi_u(t, \alpha_n) - \varphi_u(t, \alpha_n)] \\
&\quad - q_n^2 h_{uu}(t, h) + h_u(t, \beta_n) q_{n+1} \\
&= q_n^2 f_{uu}(t, b) + p_n q_n f_{uu}(t, b) + f_u(t, \alpha_n) q_{n+1} \\
&\quad + q_n^2 [g_{uu}(t, e) + \varphi_{uu}(t, e)] \\
&\quad + p_n q_n [g_{uu}(t, e) + \varphi_{uu}(t, e)] + q_{n+1} g_u(t, \alpha_n) \\
&\quad - q_n^2 h_{uu}(t, h) + h_u(t, \beta_n) q_{n+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Kapalı bir kümede sürekli fonksiyonlar sınırlı olduğundan

$$\begin{aligned}
|f_{uu}(t, u)| &\leq N, \quad |f_u(t, u)| \leq M, \quad |g_{uu}(t, u)| \leq L, \quad |g_u(t, u)| \leq K, \\
|\varphi_{uu}(t, u)| &\leq B, \quad |h_{uu}(t, u)| \leq C, \quad |h_u(t, u)| \leq A
\end{aligned}$$

olarak alınabilir. Burada N, M, L, K, C, B, A pozitif sabitlerdir.

$$\begin{aligned}
q_{n+1}^A &\leq q_n^2 N + p_n q_n N + M q_{n+1} + q_n^2 [L + B] + p_n q_n [L + B] \\
&\quad + q_{n+1} K - q_n^2 C + A q_{n+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. $p_n q_n \leq \frac{p_n^2}{2} + \frac{q_n^2}{2}$ Cauchy eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
q_{n+1}^A &\leq \frac{3N}{2} q_n^2 + \frac{N}{2} p_n^2 + M q_{n+1} + \frac{3}{2} (L + B) q_n^2 + \frac{1}{2} (L + B) p_n^2 \\
&\quad + K q_{n+1} - q_n^2 C + A q_{n+1} \\
&= \left(\frac{3N}{2} + \frac{3}{2} (L + B) - C \right) q_n^2 + \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2} (L + B) \right) p_n^2 \\
&\quad + (M + K + A) q_{n+1}
\end{aligned}$$

olur ki bu ise q_{n+1} e göre lineerdir.

$$\begin{aligned}
q_{n+1}^A &- (M + K + A) q_{n+1} \\
&\leq \left(\frac{3N}{2} + \frac{3}{2} (L + B) - C \right) q_n^2 + \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2} (L + B) \right) p_n^2
\end{aligned}$$

ifadesinin her tarafını $\lambda = e^{-\int_0^t (M+K+A) \Delta s} = e^{-(M+K+A)t}$ ile çarparsak

$$\begin{aligned}
& \left[q_{n+1} e^{-(M+K+A)t} \right]^4 \\
& \leq \left[\left(\frac{3N}{2} + \frac{3}{2}(L+B) - C \right) q_n^2 \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2}(L+B) \right) p_n^2 \right] e^{-(M+K+A)t}
\end{aligned}$$

bu ifade 0 dan t ye integre edildiğinde,

$$\begin{aligned}
& q_{n+1} e^{-(M+K+A)t} \\
& \leq q_{n+1}(0) \\
& \quad + \int_0^t \left[\left(\frac{3N}{2} + \frac{3}{2}(L+B) - C \right) q_n^2 \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2}(L+B) \right) p_n^2 \right] e^{-(M+K+A)s} \Delta s \\
q_{n+1} & \leq \int_0^t \left[\left(\frac{3N}{2} + \frac{3}{2}(L+B) - C \right) q_n^2 \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2}(L+B) \right) p_n^2 \right] e^{(M+K+A)(t-s)} \Delta s
\end{aligned}$$

olur. J üzerinde *maks* alınırsa,

$$\begin{aligned}
\max_j |q_{n+1}| & \leq \max_j \left| q_n^2 \left(\frac{3N}{2} + \frac{3}{2}(L+B) - C \right) \right. \\
& \quad \left. + p_n^2 \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2}(L+B) \right) \right| \int_0^t e^{(M+K+A)(t-s)} \Delta s \\
& \leq \max_j \left| q_n^2 \left(\frac{3N}{2} + \frac{3}{2}(L+B) - C \right) \right. \\
& \quad \left. + p_n^2 \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2}(L+B) \right) \right| \frac{e^{(M+K+A)t} - 1}{M+K+A} \\
& \leq \max_j \left| q_n^2 \left(\frac{3N}{2} + \frac{3}{2}(L+B) - C \right) \right. \\
& \quad \left. + p_n^2 \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2}(L+B) \right) \right| \frac{e^{(M+K+A)t}}{M+K+A}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& maks_j |\beta_{n+1} - u| \\
& \leq \left(\frac{3N}{2} + \frac{3}{2}(L+B) - C \right) \frac{e^{(M+K+A)t}}{M+K+A} maks_j |\beta_n - u|^2 \\
& + \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2}(L+B) \right) \frac{e^{(M+K+A)t}}{M+K+A} maks_j |u - \alpha_n|^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu sonuç ise $\{\beta_n(t)\}$ dizisinin $u(t)$ ye zayıf kuadratik yakınsadığını gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

5.3. Farklı Tipten Alt-Üst Çözüm Kullanılarak Kuasilineerizasyon Metodu

Sırada inceleyeceğimiz teoremden daha önce doğal tipten alınan alt-üst çözümler yerine VII. tipten alt-üst çözümler alınarak denklemin tek çözümüne monoton ve düzgün yakınsayan çözümler elde edildi ve yakınsama hızı incelendi.

Teorem 5.5. (A_1) $\alpha_0(t), \beta_0(t) \in C_{rd}[T, R]$ (5.1) in VII. tipten alt-üst çözüm çifti olsun.

(A_2) Ω_0 da $f(t, u)$ fonksiyonu konveks, $g(t, u)$ fonksiyonu, $\varphi(t, u)$ konveks fonksiyonu yardımıyla konvekslenebilir ve $h(t, u)$ fonksiyonu ise konkav olsun. O zaman $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ dizileri var ve (5.1) in tek çözümüne düzgün ve monoton yakınsar ve bu yakınsama kuadrattır.

İspat. $f(t, u), g(t, u), h(t, u)$ fonksiyonları $\alpha_0(t) \leq u_2 \leq u_1 \leq \beta_0(t)$ için

Lipschitz şartlarını sağladığı açıktır. (A_2) den $u, v \in \Omega_0$ olmak üzere $u \geq v$ için $f(t, u)$ konveks olduğundan

$$f(t, u) \geq f(t, v) + f_u(t, v)(u - v)$$

veya

$$f(t, u) \leq f(t, v) + f_u(t, u)(u - v), \quad (5.28)$$

$g(t, u) + \varphi(t, u)$ konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
g(t, u) & \geq g(t, v) + [g_u(t, v) + \varphi_u(t, v)](u - v) \\
& - [\varphi(t, u) - \varphi(t, v)]
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} g(t, u) &\leq g(t, v) + [g_u(t, u) + \varphi_u(t, u)](u - v) \\ &\quad - [\varphi(t, u) - \varphi(t, v)] \end{aligned} \quad (5.29)$$

ve $h(t, u)$ konkav olduğundan

$$h(t, u) \geq h(t, v) + h_u(t, u)(u - v)$$

veya

$$h(t, u) \leq h(t, v) + h_u(t, v)(u - v) \quad (5.30)$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} u^A &= w(t, \alpha_0, \beta_0; v) \\ &= f(t, \beta_0) + f_u(t, \beta_0)(v - \beta_0) + g(t, \beta_0) \\ &\quad + [g_u(t, \beta_0) + \varphi_u(t, \beta_0)](v - \beta_0) \\ &\quad - [\varphi(t, v) - \varphi(t, \beta_0)] + h(t, \beta_0) \\ &\quad + h_u(t, \beta_0)(v - \beta_0), u(0) = u_0, \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} v^A &= W(t, \alpha_0, \beta_0; u) \\ &= f(t, \alpha_0) + f_u(t, \alpha_0)(u - \alpha_0) + g(t, \alpha_0) \\ &\quad + [g_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0)](u - \alpha_0) \\ &\quad - [\varphi(t, u) - \varphi(t, \alpha_0)] + h(t, \alpha_0) \\ &\quad + h_u(t, \alpha_0)(u - \alpha_0), v(0) = u_0 \end{aligned} \quad (5.32)$$

yardımcı lineer BDP ele alalım. (A_1) den $\alpha_0^A \leq f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) + h(t, \beta_0)$ olduğu biliniyor. (5.31) den

$$f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) + h(t, \beta_0) = w(t, \alpha_0, \beta_0; \beta_0)$$

yazılır. Yani

$$\alpha_0^A \leq f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) + h(t, \beta_0) = w(t, \alpha_0, \beta_0; \beta_0).$$

Dolayısıyla

$$\alpha_0^A \leq w(t, \alpha_0, \beta_0; \beta_0)$$

olup (5.31) in alt çözümüdür. Benzer şekilde, (A_1) den $\beta_0^A \geq f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) + h(t, \alpha_0)$ olduğu biliniyor. Ayrıca (5.28) den

$$f(t, \alpha_0) \geq f(t, \beta_0) + f_u(t, \beta_0)(\alpha_0 - \beta_0),$$

(5.29) dan

$$\begin{aligned} g(t, \alpha_0) &\geq g(t, \beta_0) + [g_u(t, \beta_0) + \varphi_u(t, \beta_0)](\alpha_0 - \beta_0) \\ &\quad - [\varphi(t, \alpha_0) - \varphi(t, \beta_0)] \end{aligned}$$

ve (5.30) dan

$$h(t, \alpha_0) \geq h(t, \beta_0) + h_u(t, \alpha_0)(\alpha_0 - \beta_0)$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitsizlikler dikkate alındığında,

$$\begin{aligned} \beta_0^A &\geq f(t, \beta_0) + f_u(t, \beta_0)(\alpha_0 - \beta_0) + g(t, \beta_0) \\ &\quad + [g_u(t, \beta_0) + \varphi_u(t, \beta_0)](\alpha_0 - \beta_0) \\ &\quad - [\varphi(t, \alpha_0) - \varphi(t, \beta_0)] + h(t, \beta_0) \\ &\quad + h_u(t, \alpha_0)(\alpha_0 - \beta_0) \\ &\geq f(t, \beta_0) + f_u(t, \beta_0)(\alpha_0 - \beta_0) + g(t, \beta_0) \\ &\quad + [g_u(t, \beta_0) + \varphi_u(t, \beta_0)](\alpha_0 - \beta_0) \\ &\quad - [\varphi(t, \alpha_0) - \varphi(t, \beta_0)] + h(t, \beta_0) \\ &\quad + h_u(t, \beta_0)(\alpha_0 - \beta_0) = w(t, \alpha_0, \beta_0; \alpha_0) \end{aligned}$$

olur. Yani

$$\beta_0^A \geq w(t, \alpha_0, \beta_0; \alpha_0)$$

olur. Sonuç olarak α_0, β_0 (5.31) denkleminin alt-üst çözümleridir. Benzer şekilde, α_0 ve β_0 in (5.32) nn alt-üst çözümleri olduğu gösterilecektir. $\alpha_0^A \leq f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) + h(t, \beta_0)$ göz önüne alındığında (5.28)–(5.30) dan sırasıyla

$$f(t, \beta_0) \leq f(t, \alpha_0) + f_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \alpha_0),$$

$$g(t, \beta_0) \leq g(t, \alpha_0) + [g_u(t, \beta_0) + \varphi_u(t, \beta_0)](\beta_0 - \alpha_0) \\ - [\varphi(t, \beta_0) - \varphi(t, \alpha_0)],$$

$$h(t, \beta_0) \leq h(t, \alpha_0) + h_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0)$$

yazılır. Elde edilen bu eşitsizlikler yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \alpha_0^A &\leq f(t, \alpha_0) + f_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0) + g(t, \alpha_0) \\ &\quad + [g_u(t, \beta_0) + \varphi_u(t, \beta_0)](\beta_0 - \alpha_0) \\ &\quad - [\varphi(t, \beta_0) - \varphi(t, \alpha_0)] + h(t, \alpha_0) \\ &\quad + h_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0) \\ &= f(t, \alpha_0) + f_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \alpha_0) + g(t, \alpha_0) \\ &\quad + [g_u(t, \beta_0) + \varphi_u(t, \beta_0)](\beta_0 - \alpha_0) \\ &\quad - [\varphi(t, \beta_0) - \varphi(t, \alpha_0)] + h(t, \alpha_0) \\ &\quad + h_u(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0) = W(t, \alpha_0, \beta_0; \beta_0) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\alpha_0^A \leq W(t, \alpha_0, \beta_0; \beta_0)$$

olur. Benzer şekilde,

$$\beta_0^A \geq f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) + h(t, \alpha_0) = W(t, \alpha_0, \beta_0; \alpha_0).$$

$$\beta_0^A \geq W(t, \alpha_0, \beta_0; \alpha_0)$$

olur. Sonuç olarak α_0, β_0 sırasıyla (5.32) denkleminin alt-üst çözümleridir. Teorem 3.3.8'den (5.31) ve (5.32) nin sırasıyla $\alpha_1(t)$ ve $\beta_1(t)$ şeklinde tek çözümü var ve $\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t), \beta_1(t) \leq \beta_0(t)$ dir. Şimdi $\alpha_1(t) \leq \beta_1(t)$ olduğu gösterilecektir. (5.31) den

$$\begin{aligned}
\alpha_1^A &= w(t, \alpha_0, \beta_0; \beta_1) \\
&= f(t, \beta_0) + f_u(t, \beta_0)(\beta_1 - \beta_0) + g(t, \beta_0) \\
&\quad + [g_u(t, \beta_0) + \varphi_u(t, \beta_0)](\beta_1 - \beta_0) \\
&\quad - [\varphi(t, \beta_1) - \varphi(t, \beta_0)] + h(t, \beta_0) \\
&\quad + h_u(t, \beta_0)(\beta_1 - \beta_0)
\end{aligned}$$

yazılır. (5.28)–(5.30) dan sırasıyla

$$f(t, \beta_0) \leq f(t, \beta_1) + f_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \beta_1),$$

$$\begin{aligned}
g(t, \beta_0) &\leq g(t, \beta_1) + [g_u(t, \beta_0) + \varphi_u(t, \beta_0)](\beta_0 - \beta_1) \\
&\quad - [\varphi(t, \beta_0) - \varphi(t, \beta_1)],
\end{aligned}$$

$$h(t, \beta_0) \leq h(t, \beta_1) + h_u(t, \beta_1)(\beta_0 - \beta_1)$$

yazılabilir. Yukarda elde edilen eşitsizlikler yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
\alpha_1^A &\leq f(t, \beta_1) + f_u(t, \beta_0)(\beta_0 - \beta_1) + f_u(t, \beta_0)(\beta_1 - \beta_0) + g(t, \beta_1) \\
&\quad + [g_u(t, \beta_0) + \varphi_u(t, \beta_0)](\beta_0 - \beta_1) \\
&\quad - [\varphi(t, \beta_0) - \varphi(t, \beta_1)] \\
&\quad + [g_u(t, \beta_0) + \varphi_u(t, \beta_0)](\beta_1 - \beta_0) \\
&\quad - [\varphi(t, \beta_1) - \varphi(t, \beta_0)] + h(t, \beta_1) \\
&\quad + h_u(t, \beta_1)(\beta_0 - \beta_1) + h_u(t, \beta_0)(\beta_1 - \beta_0) \\
&\leq f(t, \beta_1) + g(t, \beta_1) + h(t, \beta_1).
\end{aligned}$$

Benzer şekilde (5.32) den

$$\begin{aligned}
\beta_1^A &= W(t, \alpha_0, \beta_0; \alpha_1) \\
&= f(t, \alpha_0) + f_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) + g(t, \alpha_0) \\
&\quad + [g_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0)](\alpha_1 - \alpha_0) \\
&\quad - [\varphi(t, \alpha_1) - \varphi(t, \alpha_0)] + h(t, \alpha_0) \\
&\quad + h_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0)
\end{aligned}$$

yazılır. (5.28)–(5.30) dan sırasıyla

$$f(t, \alpha_0) \geq f(t, \alpha_1) + f_u(t, \alpha_1)(\alpha_0 - \alpha_1),$$

$$g(t, \alpha_0) \geq g(t, \alpha_1) + [g_u(t, \alpha_1) + \varphi_u(t, \alpha_1)](\alpha_0 - \alpha_1) \\ - [\varphi(t, \alpha_0) - \varphi(t, \alpha_1)],$$

$$h(t, \alpha_0) \geq h(t, \alpha_1) + h_u(t, \alpha_0)(\alpha_0 - \alpha_1)$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitsizlikler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \beta_1^A &\geq f(t, \alpha_1) + f_u(t, \alpha_1)(\alpha_0 - \alpha_1) + f_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) + g(t, \alpha_1) \\ &\quad + [g_u(t, \alpha_1) + \varphi_u(t, \alpha_1)](\alpha_0 - \alpha_1) \\ &\quad - [\varphi(t, \alpha_0) - \varphi(t, \alpha_1)] \\ &\quad + [g_u(t, \alpha_0) + \varphi_u(t, \alpha_0)](\alpha_1 - \alpha_0) \\ &\quad - [\varphi(t, \alpha_1) - \varphi(t, \alpha_0)] + h(t, \alpha_1) \\ &\quad + h_u(t, \alpha_0)(\alpha_0 - \alpha_1) + h_u(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) \\ &= f(t, \alpha_1) + g(t, \alpha_1) + h(t, \alpha_1) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\beta_1^A \geq f(t, \alpha_1) + g(t, \alpha_1) + h(t, \alpha_1)$$

olup α_1 ve β_1 alt-üst çözümler olur. $\alpha_1(0) \leq \beta_1(0)$ olduğundan dolayı Teorem 2.2.6 dan $\alpha_1(t) \leq \beta_1(t)$ olur. Sonuç olarak

$$\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t) \leq \beta_1(t) \leq \beta_0(t)$$

elde edilir. Şimdi aşağıdaki başlangıç değer problemlerini ele alalım.

$$\begin{aligned} u^A &= w(t, \alpha_1, \beta_1; v) \\ &= f(t, \beta_1) + f_u(t, \beta_1)(v - \beta_1) + g(t, \beta_1) \\ &\quad + [g_u(t, \beta_1) + \varphi_u(t, \beta_1)](v - \beta_1) \\ &\quad - [\varphi(t, v) - \varphi(t, \beta_1)] + h(t, \beta_1) \\ &\quad + h_u(t, \beta_1)(v - \beta_1), u(0) = u_0, \end{aligned} \tag{5.33}$$

$$\begin{aligned}
v^A &= W(t, \alpha_1, \beta_1; u) \\
&= f(t, \alpha_1) + f_u(t, \alpha_1)(u - \alpha_1) + g(t, \alpha_1) \\
&\quad + [g_u(t, \alpha_1) + \varphi_u(t, \alpha_1)](u - \alpha_1) \\
&\quad - [\varphi(t, u) - \varphi(t, \alpha_1)] + h(t, \alpha_1) \\
&\quad + h_u(t, \alpha_1)(u - \alpha_1), v(0) = u_0.
\end{aligned} \tag{5.34}$$

$$\alpha_1^A \leq f(t, \beta_1) + g(t, \beta_1) + h(t, \beta_1) = w(t, \alpha_1, \beta_1; \beta_1)$$

olduğu aşikârdır. Yani

$$\alpha_1^A \leq w(t, \alpha_1, \beta_1; \beta_1)$$

olur ve (5.33) ün alt çözümüdür.

$$\beta_1^A \geq f(t, \alpha_1) + g(t, \alpha_1) + h(t, \alpha_1)$$

olduğu biliniyor. (5.28)–(5.30) dan sırasıyla

$$f(t, \alpha_1) \geq f(t, \beta_1) + f_u(t, \beta_1)(\alpha_1 - \beta_1),$$

$$\begin{aligned}
g(t, \alpha_1) &\geq g(t, \beta_1) + [g_u(t, \beta_1) + \varphi_u(t, \beta_1)](\alpha_1 - \beta_1) \\
&\quad - [\varphi(t, \alpha_1) - \varphi(t, \beta_1)],
\end{aligned}$$

$$h(t, \alpha_1) \geq h(t, \beta_1) + h_u(t, \alpha_1)(\alpha_1 - \beta_1)$$

yazılabilir. Elde edilen bu eşitsizlikler $\beta_1^A \geq f(t, \alpha_1) + g(t, \alpha_1) + h(t, \alpha_1)$ de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\beta_1^A &\geq f(t, \beta_1) + g(t, \beta_1) + h(t, \beta_1) \\
&\geq f(t, \beta_1) + f_u(t, \beta_1)(\alpha_1 - \beta_1) + g(t, \beta_1) \\
&\quad + [g_u(t, \beta_1) + \varphi_u(t, \beta_1)](\alpha_1 - \beta_1) \\
&\quad - [\varphi(t, \alpha_1) - \varphi(t, \beta_1)] + h(t, \beta_1) \\
&\quad + h_u(t, \alpha_1)(\alpha_1 - \beta_1) \\
&\geq f(t, \beta_1) + f_u(t, \beta_1)(\alpha_1 - \beta_1) + g(t, \beta_1) \\
&\quad + [g_u(t, \beta_1) + \varphi_u(t, \beta_1)](\alpha_1 - \beta_1) \\
&\quad - [\varphi(t, \alpha_1) - \varphi(t, \beta_1)] + h(t, \beta_1) \\
&\quad + h_u(t, \beta_1)(\alpha_1 - \beta_1) = w(t, \alpha_1, \beta_1; \alpha_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\beta_1^A \geq w(t, \alpha_1, \beta_1; \alpha_1)$ dır. Yani β_1 , (5.33) ün üst çözümüdür. Teorem 3.3.8 gereği (5.33) lineer denkleminin bir tek $\alpha_2(t)$ çözümü var ve $\alpha_1(t) \leq \alpha_2(t) \leq \beta_1(t)$ dır. Şimdi ise α_1 ve β_1 in (5.34) ün alt-üst çözümleri olduğu gösterilip teorem gereği β_2 nin varlığını göstereceğiz. Teoremin hipotezinden

$$\alpha_1^A \leq f(t, \beta_1) + g(t, \beta_1) + h(t, \beta_1)$$

yazılabilir. (5.28)–(5.30) dan sırasıyla

$$f(t, \beta_1) \leq f(t, \alpha_1) + f_u(t, \beta_1)(\beta_1 - \alpha_1),$$

$$\begin{aligned}
g(t, \beta_1) &\leq g(t, \alpha_1) + [g_u(t, \beta_1) + \varphi_u(t, \beta_1)](\beta_1 - \alpha_1) \\
&\quad - [\varphi(t, \beta_1) - \varphi(t, \alpha_1)],
\end{aligned}$$

$$h(t, \beta_1) \leq h(t, \alpha_1) + h_u(t, \alpha_1)(\beta_1 - \alpha_1)$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitsizlikler ışığında

$$\begin{aligned}
\alpha_1^A &\leq f(t, \beta_1) + g(t, \beta_1) + h(t, \beta_1) \\
&\leq f(t, \alpha_1) + f_u(t, \beta_1)(\beta_1 - \alpha_1) + g(t, \alpha_1) \\
&\quad + [g_u(t, \beta_1) + \varphi_u(t, \beta_1)](\beta_1 - \alpha_1) \\
&\quad - [\varphi(t, \beta_1) - \varphi(t, \alpha_1)] + h(t, \alpha_1) \\
&\quad + h_u(t, \alpha_1)(\beta_1 - \alpha_1) \\
&\leq f(t, \alpha_1) + f_u(t, \alpha_1)(\beta_1 - \alpha_1) + g(t, \alpha_1) \\
&\quad + [g_u(t, \alpha_1) + \varphi_u(t, \alpha_1)](\beta_1 - \alpha_1) \\
&\quad - [\varphi(t, \beta_1) - \varphi(t, \alpha_1)] + h(t, \alpha_1) \\
&\quad + h_u(t, \alpha_1)(\beta_1 - \alpha_1) = W(t, \alpha_1, \beta_1; \beta_1)
\end{aligned}$$

olur. Yani $\alpha_1^A \leq W(t, \alpha_1, \beta_1; \beta_1)$ alt çözümdür. Benzer şekilde

$$\beta_1^A \geq f(t, \alpha_1) + g(t, \alpha_1) + h(t, \alpha_1) = W(t, \alpha_1, \beta_1; \alpha_1)$$

olduğundan $\beta_1^A \geq W(t, \alpha_1, \beta_1; \alpha_1)$ üst çözümdür. Böylece Teorem 3.3.8 gereği Lipschitz şartları da sağlandığından (5.34) lineer denkleminin bir tek $\beta_2(t)$ çözümü var ve $\alpha_1(t) \leq \beta_2(t) \leq \beta_1(t)$ dır. Benzer şekilde $\alpha_1(t) \leq \beta_1(t)$ gösterildiği gibi Teorem 2.2.6 kullanılarak $\alpha_2(t) \leq \beta_2(t)$ olduğu gösterilebilir. Sonuç olarak

$$\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t) \leq \alpha_2(t) \leq \beta_2(t) \leq \beta_1(t) \leq \beta_0(t)$$

olur. Bu işlem bu şekilde devam ettirildiği takdirde

$$\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t) \leq \alpha_2(t) \leq \dots \leq \alpha_n(t) \leq \beta_n(t) \leq \dots \leq \beta_1(t) \leq \beta_0(t)$$

elde edilir. $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ dizilerinin her bir eleman sırasıyla

$$\alpha_{n+1}^A = w(t, \alpha_n, \beta_n; \beta_{n+1}), \alpha_{n+1}(0) = u_0, \quad (5.35)$$

$$\beta_{n+1}^A = W(t, \alpha_n, \beta_n; \alpha_{n+1}), \beta_{n+1}(0) = u_0 \quad (5.36)$$

başlangıç değer problemlerinin çözümleri olmakla birlikte düzgün sınırlıdır. Ayrıca $f(t, u)$, $g(t, u)$ ve $h(t, u)$ sınırlı olduğundan $\{\alpha_n^A(t)\}$ ve $\{\beta_n^A(t)\}$ dizileri de T de düzgün sınırlıdır. Bu ise $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ dizilerinin eşsürekli olduğunu gösterir.

Diziler düzgün sınırlı ve eşsürekli olduğundan Arzela-Ascoli Teoremi gereğince $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ dizileri (5.1) in tek çözümü olan $u(t)$ ye düzgün ve monoton yakınsar. Şimdi bu yakınsamanın kuadratik olduğu gösterilecektir. Bunun için

$$p_n(t) = u(t) - \alpha_n(t) \geq 0, p_n(0) = 0,$$

$$q_n(t) = \beta_n(t) - u(t) \geq 0, q_n(0) = 0$$

tanımlansın. Her tarafın delta türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} p_n^\Delta &= u^\Delta - \alpha_n^\Delta = f(t, u) + g(t, u) + h(t, u) - \{f(t, \beta_{n-1}) \\ &\quad + f_u(t, \beta_{n-1})(\beta_n - \beta_{n-1}) + g(t, \beta_{n-1}) \\ &\quad + [g_u(t, \beta_{n-1}) + \varphi_u(t, \beta_{n-1})](\beta_n - \beta_{n-1}) \\ &\quad - [\varphi(t, \beta_n) - \varphi(t, \beta_{n-1})] + h(t, \beta_{n-1}) \\ &\quad + h_u(t, \alpha_{n-1})(\beta_n - \beta_{n-1})\} + \varphi(t, u) - \varphi(t, u) \\ &= [f(t, u) - f(t, \beta_{n-1})] - [f_u(t, \beta_{n-1})](\beta_n - \beta_{n-1}) \\ &\quad + [g(t, u) + \varphi(t, u)] + [g(t, \beta_{n-1}) - \varphi(t, \beta_{n-1})] \\ &\quad - [g_u(t, \beta_{n-1}) + \varphi_u(t, \beta_{n-1})](\beta_n - \beta_{n-1}) \\ &\quad + [\varphi(t, \beta_n) - \varphi(t, u)] \\ &\quad - [g_u(t, \beta_{n-1}) + \varphi_u(t, \beta_{n-1})](\beta_n - \beta_{n-1}) + h(t, u) \\ &\quad - h(t, \beta_{n-1}) - h_u(t, \alpha_{n-1})(\beta_n - \beta_{n-1}) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada kolaylık olması açısından $g(t, u) + \varphi(t, u) = G(t, u)$ alınıp yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} p_n^\Delta &= [f(t, u) - f(t, \beta_{n-1})] - [f_u(t, \beta_{n-1})](\beta_n - \beta_{n-1}) \\ &\quad + [G(t, u) - G(t, \beta_{n-1})] - G_u(t, \beta_{n-1})(\beta_n - \beta_{n-1}) \\ &\quad + [\varphi(t, \beta_n) - \varphi(t, u)] \\ &\quad - [g_u(t, \beta_{n-1}) + \varphi_u(t, \beta_{n-1})](\beta_n - \beta_{n-1}) \\ &\quad + [h(t, u) - h(t, \beta_{n-1})] - h_u(t, \alpha_{n-1})(\beta_n - \beta_{n-1}). \end{aligned}$$

α_n ve β_n in tanımları da dikkate alınıp fonksiyonlara ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
p_n^A = & -f_u(t, a)(\beta_{n-1} - u) - [f_u(t, \beta_{n-1})](\beta_n - \beta_{n-1}) \\
& - G_u(t, b)(\beta_{n-1} - u) + \varphi_u(t, c)(\beta_n - u) \\
& - G_u(t, \beta_{n-1})(\beta_n - \beta_{n-1}) - h_u(t, d)(\beta_{n-1} - u) \\
& - h_u(t, \alpha_{n-1})(\beta_n - \beta_{n-1})
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $u < a < \beta_{n-1}$, $u < b < \beta_{n-1}$, $u < c < \beta_n$, $u < d < \beta_{n-1}$ dir.

$$\begin{aligned}
p_n^A \leq & -f_u(t, u)q_{n-1} - [f_u(t, \beta_{n-1})](q_n - q_{n-1}) - G_u(t, u)q_{n-1} \\
& + \varphi_u(t, u)q_n - G_u(t, \beta_{n-1})(q_n - q_{n-1}) \\
& - h_u(t, \beta_{n-1})q_{n-1} - h_u(t, \alpha_{n-1})(q_n - q_{n-1}) \\
= & q_{n-1}[f_u(t, \beta_{n-1}) - f_u(t, u)] \\
& + q_{n-1}[G_u(t, \beta_{n-1}) - G_u(t, u)] \\
& + q_{n-1}[h_u(t, \alpha_{n-1}) - h_u(t, \beta_{n-1})] \\
& + q_n[-f_u(t, \beta_{n-1}) + \varphi_u(t, u) - G_u(t, \beta_{n-1}) \\
& - h_u(t, \alpha_{n-1})] \\
\leq & q_{n-1}[f_u(t, \beta_{n-1}) - f_u(t, u)] \\
& + q_{n-1}[G_u(t, \beta_{n-1}) - G_u(t, u)] \\
& + q_{n-1}[h_u(t, \alpha_{n-1}) - h_u(t, \beta_{n-1})] \\
& + q_n[-f_u(t, \beta_{n-1}) + \varphi_u(t, u) - g_u(t, u) - \varphi_u(t, u) \\
& - h_u(t, \alpha_{n-1})] \\
\leq & q_{n-1}^2 f_{uu}(t, \delta) + q_{n-1}^2 G_{uu}(t, \zeta) \\
& - (q_{n-1})h_{uu}(t, \eta)(\beta_{n-1} - \alpha_{n-1}) \\
& + q_n[-f_u(t, \beta_{n-1}) - g_u(t, u) - h_u(t, \alpha_{n-1})] \\
= & q_{n-1}^2 f_{uu}(t, \delta) + q_{n-1}^2 G_{uu}(t, \zeta) \\
& - (q_{n-1})h_{uu}(t, \eta)(q_{n-1} + p_{n-1}) \\
& + q_n[-f_u(t, \beta_{n-1}) - g_u(t, u) - h_u(t, \alpha_{n-1})] \\
= & q_{n-1}^2 [f_{uu}(t, \delta) + G_{uu}(t, \zeta) - h_{uu}(t, \eta)] \\
& + q_n[-f_u(t, \beta_{n-1}) - g_u(t, u) - h_u(t, \alpha_{n-1})] \\
& - (p_{n-1})(q_{n-1})h_{uu}(t, \eta)
\end{aligned}$$

elde edilir. Kapalı bir kümede sürekli fonksiyonlar sınırlı olduğundan

$$p_n^A \leq q_{n-1}^2 A + q_n B - (p_{n-1})(q_{n-1})C$$

yazılabilir. Burada A, B, C pozitif sabitlerdir. $p_{n-1}q_{n-1} \leq \frac{p_{n-1}^2}{2} + \frac{q_{n-1}^2}{2}$ Cauchy eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} p_n^A &\leq q_{n-1}^2 A + q_n B - \frac{p_{n-1}^2}{2} C - \frac{q_{n-1}^2}{2} C \\ &= -\frac{p_{n-1}^2}{2} C + q_{n-1}^2 \left[A - \frac{C}{2} \right] + q_n B \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$q_n(t) = \beta_n(t) - u(t) \geq 0, q_n(0) = 0$$

ifadesinde her tarafın delta türevi alınır,

$$\begin{aligned} q_n^A &= \beta_n^A - u^A = f(t, \alpha_{n-1}) + f_u(t, \beta_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + g(t, \alpha_{n-1}) \\ &\quad + [g_u(t, \alpha_{n-1}) + \varphi_u(t, \alpha_{n-1})](\alpha_n - \alpha_{n-1}) \\ &\quad - [\varphi(t, \alpha_n) - \varphi(t, \alpha_{n-1})] + h(t, \alpha_{n-1}) \\ &\quad + h_u(t, \alpha_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \\ &\quad - \{f(t, u) + g(t, u) + h(t, u)\} + \varphi(t, u) - \varphi(t, u) \\ &= [f(t, \alpha_{n-1}) - f(t, u)] + f_u(t, \beta_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \\ &\quad + [g(t, \alpha_{n-1}) + \varphi(t, \alpha_{n-1})] - [g(t, u) + \varphi(t, u)] \\ &\quad + [\varphi(t, u) - \varphi(t, \alpha_n)] \\ &\quad + [g_u(t, \alpha_{n-1}) + \varphi_u(t, \alpha_{n-1})](\alpha_n - \alpha_{n-1}) \\ &\quad + [h(t, \alpha_{n-1}) - h(t, u)] + h_u(t, \alpha_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \end{aligned}$$

olur. $g(t, u) + \varphi(t, u) = G(t, u)$ alınıp yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} q_n^A &= [f(t, \alpha_{n-1}) - f(t, u)] + f_u(t, \beta_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \\ &\quad + [G(t, \alpha_{n-1}) - G(t, u)] + [\varphi(t, u) - \varphi(t, \alpha_n)] \\ &\quad + G_u(t, \alpha_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + [h(t, \alpha_{n-1}) - h(t, u)] \\ &\quad + h_u(t, \alpha_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \end{aligned}$$

elde edilir. Ortalama değer teoremi uygulandığında

$$\begin{aligned}
q_n^A = & -f_u(t, a)(u - \alpha_{n-1}) + f_u(t, \beta_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \\
& - G_u(t, b)(u - \alpha_{n-1}) + \varphi_u(t, c)(u - \alpha_n) \\
& + G_u(t, \alpha_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n-1}) - h_u(t, d)(u - \alpha_{n-1}) \\
& + h_u(t, \alpha_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n-1})
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadenin her tarafını $\lambda = e^{-\int_0^t (M+K+A)\Delta s} = e^{-(M+K+A)t}$ ile çarparsak

$$[p_{n+1}e^{-(M+K+A)t}]^A \leq \left[p_n^2 \left(N + L + B + \frac{C}{2} \right) + q_n^2 \frac{C}{2} \right] e^{-(M+K+A)t}$$

olur. bu ifade de 0 dan t ye integre edildiğinde,

$$\begin{aligned}
p_{n+1}e^{-(M+K+A)t} & \leq p_{n+1}(0) \\
& + \int_0^t \left[p_n^2 \left(N + L + B + \frac{C}{2} \right) + q_n^2 \frac{C}{2} \right] e^{-(M+K+A)s} \Delta s \\
p_{n+1} & \leq \int_0^t \left[p_n^2 \left(N + L + B + \frac{C}{2} \right) + q_n^2 \frac{C}{2} \right] e^{(M+K+A)(t-s)} \Delta s.
\end{aligned}$$

J üzerinde maks alınırsa,

$$\begin{aligned}
\max_J |p_{n+1}| & \leq \max_J \left| p_n^2 \left(N + L + B + \frac{C}{2} \right) \right. \\
& \left. + q_n^2 \frac{C}{2} \right| \int_0^t e^{(M+K+A)(t-s)} \Delta s \\
& \leq \max_J \left| p_n^2 \left(N + L + B + \frac{C}{2} \right) + q_n^2 \frac{C}{2} \right| \frac{e^{(M+K+A)t} - 1}{M + K + A} \\
& \leq \max_J \left| p_n^2 \left(N + L + B + \frac{C}{2} \right) + q_n^2 \frac{C}{2} \right| \frac{e^{(M+K+A)t}}{M + K + A}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\max_J |u - \alpha_{n+1}| & \leq \left(N + L + B + \frac{C}{2} \right) \frac{e^{(M+K+A)t}}{M + K + A} \max_J |u - \alpha_n|^2 \\
& + \frac{C}{2} \frac{e^{(M+K+A)t}}{M + K + A} \max_J |\beta_n - u|^2
\end{aligned}$$

olur. Böylece $\{\alpha_n(t)\}$ dizisi $u(t)$ ye kuadratik yakınsar. Benzer şekilde

$$q_{n+1}(t) = \beta_{n+1}(t) - u(t) \geq 0, \quad q_{n+1}(0) = 0$$

tanımlanarak her tarafın delta türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} q_{n+1}^\Delta &= \beta_{n+1}^\Delta - u^\Delta \\ &= f(t, \beta_n) + f_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) + g(t, \beta_n) \\ &\quad + [g_u(t, \alpha_n) + \varphi_u(t, \alpha_n)](\beta_{n+1} - \beta_n) \\ &\quad - [\varphi(t, \beta_{n+1}) - \varphi(t, \beta_n)] + h(t, \beta_n) \\ &\quad + h_u(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) \\ &\quad - \{f(t, u) + g(t, u) + h(t, u)\} \\ &= f(t, \beta_n) + f_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) - f(t, u) \\ &\quad + g(t, \beta_n) + [g_u(t, \alpha_n) + \varphi_u(t, \alpha_n)](\beta_{n+1} - \beta_n) \\ &\quad - [\varphi(t, \beta_{n+1}) - \varphi(t, \beta_n)] - g(t, u) + h(t, \beta_n) \\ &\quad + h_u(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) - h(t, u) \end{aligned}$$

elde edilir. Bazı terimler sadeleştirilip yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned} q_{n+1}^\Delta &= [f(t, \beta_n) - f(t, u)] + f_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) \\ &\quad + [g(t, \beta_n) + \varphi(t, \beta_n)] - [g(t, u) + \varphi(t, u)] \\ &\quad + [g_u(t, \alpha_n) + \varphi_u(t, \alpha_n)](\beta_{n+1} - \beta_n) \\ &\quad - [\varphi(t, \beta_{n+1}) - \varphi(t, u)] + [h(t, \beta_n) - h(t, u)] \\ &\quad + h_u(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n). \end{aligned}$$

Burada kolaylık olması açısından $g(t, u) + \varphi(t, u) = F(t, u)$ alınıp yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned} q_{n+1}^\Delta &= [f(t, \beta_n) - f(t, u)] + f_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) \\ &\quad + [F(t, \beta_n) - F(t, u)] + F_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) \\ &\quad - [\varphi(t, \beta_{n+1}) - \varphi(t, u)] + [h(t, \beta_n) - h(t, u)] \\ &\quad + h_u(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) \end{aligned}$$

elde edilir. α_n ve β_n ın tanımları da dikkate alınıp fonksiyonlara ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
q_{n+1}^A &= f_u(t, a)(\beta_n - u) + f_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) + F_u(t, c)(\beta_n - u) \\
&\quad + F_u(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) - \varphi_u(t, d)(\beta_{n+1} - u) \\
&\quad + h_u(t, f)(\beta_n - u) + h_u(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) \\
&= f_u(t, a)q_n + f_u(t, \alpha_n)(q_{n+1} - q_n) + F_u(t, c)q_n \\
&\quad + F_u(t, \alpha_n)(q_{n+1} - q_n) - \varphi_u(t, d)q_{n+1} + h_u(t, f)q_n \\
&\quad + h_u(t, \beta_n)(q_{n+1} - q_n) \\
&= q_n[f_u(t, a) - f_u(t, \alpha_n)] + q_{n+1}f_u(t, \alpha_n) \\
&\quad + q_n[F_u(t, c) - F_u(t, \alpha_n)] \\
&\quad + q_{n+1}[F_u(t, \alpha_n) - \varphi_u(t, d)] \\
&\quad + q_n[h_u(t, f) - h_u(t, \beta_n)] + q_{n+1}h_u(t, \beta_n) \\
&\leq q_n[f_u(t, \beta_n) - f_u(t, \alpha_n)] + q_{n+1}f_u(t, \alpha_n) \\
&\quad + q_n[F_u(t, \beta_n) - F_u(t, \alpha_n)] \\
&\quad + q_{n+1}[F_u(t, \alpha_n) - \varphi_u(t, \alpha_n)] \\
&\quad + q_n[h_u(t, u) - h_u(t, \beta_n)] + q_{n+1}h_u(t, \beta_n)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $u < a < \beta_n$, $u < c < \beta_n$, $u < d < \beta_{n+1}$, $u < f < \beta_n$ dir.

Fonksiyonlara bir kere daha ortalama değeri teoremi uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
q_{n+1}^A &\leq q_n f_{uu}(t, b)(\beta_n - \alpha_n) + f_u(t, \alpha_n)q_{n+1} \\
&\quad + q_n F_{uu}(t, e)(\beta_n - \alpha_n) \\
&\quad + q_{n+1}[F_u(t, \alpha_n) - \varphi_u(t, \alpha_n)] + q_n h_{uu}(t, h)(u - \beta_n) \\
&\quad + h_u(t, \beta_n)q_{n+1} \\
&= q_n f_{uu}(t, b)(q_n + p_n) + f_u(t, \alpha_n)q_{n+1} \\
&\quad + q_n F_{uu}(t, e)(q_n + p_n) \\
&\quad + q_{n+1}[F_u(t, \alpha_n) - \varphi_u(t, \alpha_n)] + q_n h_{uu}(t, h)(-q_n) \\
&\quad + h_u(t, \beta_n)q_{n+1} \\
&= q_n^2 f_{uu}(t, b) + p_n q_n f_{uu}(t, b) + f_u(t, \alpha_n)q_{n+1} \\
&\quad + q_n^2 F_{uu}(t, e) + p_n q_n F_{uu}(t, e) \\
&\quad + q_{n+1}[F_u(t, \alpha_n) - \varphi_u(t, \alpha_n)] - q_n^2 h_{uu}(t, h) \\
&\quad + h_u(t, \beta_n)q_{n+1}
\end{aligned}$$

olur. Burada $\alpha_n < b < \beta_n$, $\alpha_n < e < \beta_n$, $u < h < \beta_n$ dir. $F(t, u) = g(t, u) + \varphi(t, u)$ olarak yeniden yazılırsa,

$$\begin{aligned}
q_{n+1}^A &\leq q_n^2 f_{uu}(t, b) + p_n q_n f_{uu}(t, b) + f_u(t, \alpha_n) q_{n+1} \\
&\quad + q_n^2 [g_{uu}(t, e) + \varphi_{uu}(t, e)] \\
&\quad + p_n q_n [g_{uu}(t, e) + \varphi_{uu}(t, e)] \\
&\quad + q_{n+1} [g_u(t, \alpha_n) + \varphi_u(t, \alpha_n) - \varphi_u(t, \alpha_n)] \\
&\quad - q_n^2 h_{uu}(t, h) + h_u(t, \beta_n) q_{n+1} \\
&= q_n^2 f_{uu}(t, b) + p_n q_n f_{uu}(t, b) + f_u(t, \alpha_n) q_{n+1} \\
&\quad + q_n^2 [g_{uu}(t, e) + \varphi_{uu}(t, e)] \\
&\quad + p_n q_n [g_{uu}(t, e) + \varphi_{uu}(t, e)] + q_{n+1} g_u(t, \alpha_n) \\
&\quad - q_n^2 h_{uu}(t, h) + h_u(t, \beta_n) q_{n+1}.
\end{aligned}$$

Kapalı bir kümede sürekli fonksiyonlar sınırlı olduğundan

$$\begin{aligned}
|f_{uu}(t, u)| \leq N, \quad |f_u(t, u)| \leq M, \quad |g_{uu}(t, u)| \leq L, \quad |g_u(t, u)| \leq K, \\
|\varphi_{uu}(t, u)| \leq B, \quad |h_{uu}(t, u)| \leq C, \quad |h_u(t, u)| \leq A
\end{aligned}$$

olarak alınabilir. Burada N, M, L, K, C, B, A pozitif sabitlerdir.

$$\begin{aligned}
q_{n+1}^A &\leq q_n^2 N + p_n q_n N + M q_{n+1} + q_n^2 [L + B] + p_n q_n [L + B] \\
&\quad + q_{n+1} K - q_n^2 C + A q_{n+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. $p_n q_n \leq \frac{p_n^2}{2} + \frac{q_n^2}{2}$ Cauchy eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
q_{n+1}^A &\leq \frac{3N}{2} q_n^2 + \frac{N}{2} p_n^2 + M q_{n+1} + \frac{3}{2} (L + B) q_n^2 + \frac{1}{2} (L + B) p_n^2 \\
&\quad + K q_{n+1} - q_n^2 C + A q_{n+1} \\
&= \left(\frac{3N}{2} + \frac{3}{2} (L + B) - C \right) q_n^2 + \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2} (L + B) \right) p_n^2 \\
&\quad + (M + K + A) q_{n+1}
\end{aligned}$$

olur ki bu ise q_{n+1} e göre lineerdir.

$$\begin{aligned}
q_{n+1}^A - (M + K + A) q_{n+1} \\
\leq \left(\frac{3N}{2} + \frac{3}{2} (L + B) - C \right) q_n^2 + \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2} (L + B) \right) p_n^2
\end{aligned}$$

ifadesinin her tarafı $\lambda = e^{-\int_0^t (M+K+A) \Delta s} = e^{-(M+K+A)t}$ ile çarpıldığı takdirde

$$\begin{aligned}
& [q_{n+1} e^{-(M+K+A)t}]^4 \\
& \leq \left[\left(\frac{3N}{2} + \frac{3}{2}(L+B) - C \right) q_n^2 \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2}(L+B) \right) p_n^2 \right] e^{-(M+K+A)t}
\end{aligned}$$

elde edilir. Ardından 0 dan t ye integre edildiğinde,

$$\begin{aligned}
& q_{n+1} e^{-(M+K+A)t} \\
& \leq q_{n+1}(0) \\
& \quad + \int_0^t \left[\left(\frac{3N}{2} + \frac{3}{2}(L+B) - C \right) q_n^2 \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2}(L+B) \right) p_n^2 \right] e^{-(M+K+A)s} \Delta s \\
q_{n+1} & \leq \int_0^t \left[\left(\frac{3N}{2} + \frac{3}{2}(L+B) - C \right) q_n^2 \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2}(L+B) \right) p_n^2 \right] e^{(M+K+A)(t-s)} \Delta s
\end{aligned}$$

olur. J üzerinde maks alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \max_J |q_{n+1}| \leq \max_J \left| q_n^2 \left(\frac{3N}{2} + \frac{3}{2}(L+B) - C \right) \right. \\
& \quad \left. + p_n^2 \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2}(L+B) \right) \right| \int_0^t e^{(M+K+A)(t-s)} \Delta s \\
& \leq \max_J \left| q_n^2 \left(\frac{3N}{2} + \frac{3}{2}(L+B) - C \right) \right. \\
& \quad \left. + p_n^2 \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2}(L+B) \right) \right| \frac{e^{(M+K+A)t} - 1}{M+K+A} \\
& \leq \max_J \left| q_n^2 \left(\frac{3N}{2} + \frac{3}{2}(L+B) - C \right) \right. \\
& \quad \left. + p_n^2 \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2}(L+B) \right) \right| \frac{e^{(M+K+A)t}}{M+K+A}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
& \max_j |\beta_{n+1} - u| \\
& \leq \left(\frac{3N}{2} + \frac{3}{2}(L+B) - C \right) \frac{e^{(M+K+A)t}}{M+K+A} \max_j |\beta_n - u|^2 \\
& \quad + \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2}(L+B) \right) \frac{e^{(M+K+A)t}}{M+K+A} \max_j |u - \alpha_n|^2
\end{aligned}$$

olur ve bu sonuç ise $\{\beta_n(t)\}$ dizisinin $u(t)$ ye kuadratik yakınsadığını gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.





6. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Dördüncü bölümde zaman skalasında III. tip alt-üst çözüm çiftini kullanarak dinamik bir başlangıç değeri problemine monoton iteratif tekniği uyguladık. İlgili fonksiyonlar monoton azalmayan alındığında, problemin III. tip ekstremal (minimal ve maksimal) çözüm çiftine monoton ve düzgün yakınsayan diziler elde edildi. Alt-üst çözüm çiftleri başka tipten alındığında da farklı tipten ekstremal çözüm çiftine yakınsayan diziler de elde edilebilir. Sonuç olarak dinamik BDP için incelenen teoremin şartlarını sağlayan MIT e dayalı nümerik bir çözüm verdik.

Beşinci bölümde ise zaman skalasında karşılaştırma teoremleri ile alt-üst çözüm çiftleri kullanılarak lineer olmayan bir BDP ne kuasilineerizasyon yöntemini uyguladık. Bu yöntemin uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar, literatürde klasik türev ile verilen lineer olmayan bir diferansiyel denklem için elde edilen sonuçlara paralel olarak benzer sonuçların elde edildiği görüldü. Uygun şartlar altında ana problemin tek çözümüne monoton ve düzgün yakınsayan monoton diziler elde edildi. Orijinal problemdeki fonksiyonlara farklı şartlar ve özellikler getirilerek ve alt-üst çözüm çiftlerinin farklı tipleri ele alınarak bu yakınsamaların hızı incelendi. Yakınsamanın şartlara göre bazı durumlarda kuadratik, yarı kuadratik, veya zayıf kuadratik olduğu görüldü.



KAYNAKLAR

- Alsharif, H.N. (2019), *The Method of Monotone Iterative Techniques and Quasilinearization in Time Scale* [Yüksek Lisans tezi]. Gebze Teknik Üniversitesi.
- Bellman, R. E., Kalaba, R. E. (1965). *Quasilinearization and nonlinear boundary-value problems*.
- Bellman R., (1973), *Methods of Nonlinear Analysis*, Academic press, New York.
- Bhaskar, T. G., McRae, F. A. (2002). Monotone iterative techniques for nonlinear problems involving the difference of two monotone functions. *Applied Mathematics and Computation*, 133(1), 187-192.
- Bohner, M., Peterson, A. (2003). *Advances in Dynamic Equations on Time Scales, 1st.Edition*, Birkhauser Boston, Inc.
- Çetin, Ş., Yılmaz, Y., Yakar, C. (2024). New Results on the Quasilinearization Method for Time Scales. *Mathematics*, 12(14), 2207.
- Çetin, Ş., Yılmaz, Y., Yakar, C. (2024). Qualitative Outcomes on Monotone Iterative Technique and Quasilinearization Method on Time Scale. *Axioms*, 13(9), 640.
- Çetin, Ş., Yılmaz, Y., Yakar, C. (2023). Generalized Quasilinearization Method for a Initial Value Problem on Time Scales. *Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM)*, 18(2), 9.
- Denton, Z., Vatsala, A. S. (2011). Monotone iterative technique for finite systems of nonlinear Riemann-Liouville fractional differential equations. *Opuscula Mathematica*, 31(3), 327-339.
- Green, J. W., Valentine, F. A. (1961). On the arzela-ascoli theorem. *Mathematics Magazine*, 34(4), 199-202.
- Hilger, S. (1990). Analysis on measure chains—a unified approach to continuous and discrete calculus. *Results in mathematics*, 18(1), 18-56.
- Kaymakçalan, B. (1993). Existence and comparison results for dynamic systems on a time scale. *Journal of mathematical analysis and applications*, 172(1), 243-255.
- Kaymakçalan, B. (1993). Monotone iterative method for dynamic systems on time scales. *Dynam. Systems Appl*, 2(2), 213-220.
- Kaymakçalan, B., Leela, S. (1994). A survey of dynamic systems on time scales. *Nonlinear Times Digest*, 1, 37-60.
- Khavanin, M., Lakshmikantham, V. (1986). The method of mixed monotony and first order differential systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 10(9), 873-877.
- Ladde, G. S., Lakshmikantham, V., Vatsala, A. S. (1985). *Monotone iterative techniques for nonlinear differential equations*, Pitman, Boston.

- Lakshmikantham, V., Vatsala, A. S. (2013). *Generalized quasilinearization for nonlinear problems* (Vol. 440). Springer Science & Business Media.
- Lakshmikantham V., Sivasundaram S., Kaymakçalan B., (1996), *Dynamic Systems on Measure Chains*, 1st. Edition, Kluwer Academic Publishers.
- Lakshmikantham V., Vatsala A. S. (2008), General Uniqueness and Monotone Iterative Technique for Fractional Differential Equations, *Applied Mathematics Letters*, 21, 828-834.
- Leela, S., Sivasundaram, S. (1994). Dynamic Systems on Time Scale and Super linear Convergence of Iterative Process, *Inequalities and Applications*, 431-436.
- McRae F.A. (2009). Monotone Iterative Technique and Existence Results for Fractional Differential Equations, *Nonlinear Analysis* 71, 6093-6096.
- Ramírez, J. D., Vatsala, A. S. (2012). Generalized monotone iterative technique for Caputo fractional differential equation with periodic boundary condition via initial value problem. *International Journal of Differential Equations*, 2012(1), 842813.
- Sivasundaram, S. (1995). Method of mixed monotony for dynamic systems on time scales. *J. Nonlinear Differential Equations Theory Method and Applications*, 1(1-2), 93-102.
- Wang, W. L., Tian, J. F. (2014). Generalized monotone iterative method for nonlinear boundary value problems with causal operators. *Boundary Value Problems*, 2014, 1-12.
- West, I. H., Vatsala, A. S. (2004). Generalized monotone iterative method for initial value problems. *Applied Mathematics Letters*, 17(11), 1231-1237.
- Yakar, C., Arslan, I., Çiçek, M. (2015). Monotone iterative technique by upper and lower solutions with initial time difference. *Miskolc Mathematical Notes*, 16(1), 575-586.
- Yakar, C., Yakar, A. (2011). Monotone iterative techniques for fractional order differential equations with initial time difference. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 40(2), 331-340.
- Zaidi, A.H. (2009). Existence of Solutions and Convergence Results for Dynamic Initial Value Problems Using Lower and Upper Solutions, *Electronic Journal Differential Equations* 161, 1-13.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Şahap ÇETİN

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2013, Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik (ing)
- **Yüksek lisans** : 2019, Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik

TEZDEN TÜRETİLEN ESERLER:

- Çetin, Ş., Yılmaz, Y. and Yakar, C. (2023). (R2030) Generalized Quasilinearization Method for a Initial Value Problem on Time Scales. *Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM)*, 18(2), 9.
- Çetin, Ş., Yılmaz, Y. and Yakar, C. (2024). New Results on the Quasilinearization Method for Time Scales. *Mathematics*, 12(14), 2207.
- Çetin, Ş., Yılmaz, Y. and Yakar, C. (2024). Qualitative Outcomes on Monotone Iterative Technique and Quasilinearization Method on Time Scale. *Axioms*, 13(9), 640.