

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

Esra ALKIŞ

**ZAMANA BAĞLI ELEKTRİK ALAN İÇERİSİNDE SPİNLİ
PARÇACIK YARATILMASI**

FİZİK ANA BİLİM DALI

ADANA-2020

ÖZ

DOKTORA TEZİ

ZAMANA BAĞLI ELEKTRİK ALAN İÇERİSİNDE SPİNLİ PARÇACIK YARATILMASI

Esra ALKIŞ

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Aysel KAYIŞ TOPAKSU
Yıl: 2020, Sayfa: 99
Jüri : Prof. Dr. Aysel KAYIŞ TOPAKSU
: Prof. Dr. Kenan SÖĞÜT
: Prof.Dr. Ayşe POLATÖZ
: Prof. Dr. İsa DUMANOĞLU
: Dr. Öğr. Üyesi Evrim Ersin KANGAL

Çalışmanın amacı, zamana bağlı elektrik alanı içerisinde hem $\text{spin}-\frac{1}{2}$ parçacıkları betimleyen Dirac denklemini hem de $\text{spin}-0$ ve $\text{spin}-1$ parçacıkları betimleyen Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) denklemini çözerek, böyle bir elektrik alanı içindeki kütleli Dirac ve DKP parçacıklarının yaratılma olasılıklarını incelemektir. Zamana bağlı dış elektrik alanda ve $(1+1)$ boyutlu uzay-zamanda Dirac ve DKP denklemlerinin alacağı diferansiyel biçim göz önüne alınarak tam çözümler bulunmuştur. Bu çözümler doğrultusunda “pozitif” ve “negatif” frekanslı modlar belirlenmiştir. Ardından elde edilen çözümler için Bogoliubov katsayıları hesaplanarak parçacıkların yaratılma olasılık yoğunluğu bulunmuş ve sonuçlar grafiksel inceleme yapılarak karşılaştırılmıştır.

Anahtar kelimeler: Parçacık Yaratma, Dirac Denklemi, Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) Denklemi, Bogoliubov Dönüşüm Tekniği

ABSTRACT

PhD THESIS

CREATION OF PARTICLES WITH SPIN, IN A TIME-DEPENDENT ELECTRIC FIELD

Esra ALKIŞ

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF PHYSICS

Supervisor : Prof. Dr. Aysel KAYIŞ TOPAKSU
Year: 2020, Pages: 99
Jury : Prof. Dr. Aysel KAYIŞ TOPAKSU
: Prof. Dr. Kenan SÖĞÜT
: Prof. Dr. Ayşe POLATÖZ
: Prof. Dr. İsa DUMANOĞLU
: Asst. Prof. Dr. Evrim Ersin KANGAL

The purpose of this study is to solve both the Dirac equation which describes spin1/2 particles and the DKP equation which describes spin-0 and spin-1 particles in a time-dependent electric field and to investigate the probability of the creation of Dirac and DKP particles with mass in such an electric field.. Exact solutions were obtained by considering the differential form Dirac and DKP equations will take, in an external electric field in (1+1) dimensional space-time. “Positive” and “negative” frequency modes were determined using these solutions. By calculating the Bogoliubov coefficients for the obtained solutions, the probability density for particle creation was determined and the results were compared graphically.

Key words: Particle creation, Dirac Equation, DKP Equation, Bogoliubov Transformation Technique

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

Bu çalışmada amaç, zamana bağlı elektrik alanı içerisinde hem $\text{spin}-\frac{1}{2}$ parçacıkları betimleyen Dirac denklemini hem de $\text{spin}-0$ ve $\text{spin}-1$ parçacıkları betimleyen Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) denklemini çözerek, böyle bir elektrik alanı içindeki kütleli Dirac ve DKP parçacıklarının yaratılma olasılıklarını incelemektir. Bunun için zamana bağlı dış elektrik alanda ve $(1+1)$ boyutlu uzay-zamanda Dirac ve DKP denklemlerinin alacağı diferansiyel biçim göz önüne alınarak tam çözümler bulunmuştur. Elde edilen çözümler için Bogoliubov katsayıları hesaplanarak parçacıkların yaratılma olasılık yoğunluğu bulunmuş ve sonuçlar grafiksel inceleme yapılarak karşılaştırılmıştır.

Çalışmanın giriş bölümünde parçacık yaratma süreci ve yöntemleri ile ilgili kısa bir bilgi verilmiştir. Kaynak araştırmaları kısmında tez ile ilgili olarak görelî denklemlerden kütleli ,yarım spinli parçacıkları betimleyen Dirac ve kütleli ve $\text{spin}-0$, $\text{spin}-1$ parçacıkları betimleyen DKP denklemleri ile ilgili kısa bir bilgi verilmiştir. Bu denkleme olan ilgi parçacık ve çekirdek fiziğindeki gelişmelerden dolayı günümüzde önem kazanmıştır. Güçlü, durgun ve homojen dış elektrik alanlarda parçacık oluşturma ile ilgili farklı yöntemlere ve tekniklere başvurulmuştur. Bu tekniklerden bir tanesi de Bogoliubov dönüşüm tekniğidir (Grib, Mamaev, Mostepanenko,1988). Bu tekniğin temelinde, elde edilen çözümleri kullanmak sureti ile pozitif ve negatif frekans çözümlerini türetmek yatmaktadır. Ayrıca kaynak araştırmaları kısmında bu yöntemden bahsedilmiş ve bununla ilgili literatürde yapılan birkaç çalışmaya değinilmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde yer alan materyel ve metod bölümünde tez çalışmasında kullanılan Dirac ve DKP denklemine kaynak oluşturan makalelerden iki tanesi ayrıntılı bir biçimde ele alınmıştır. Bu makalelerden bir tanesi eğri uzay zamanda $(3+1)$ boyutunda bir metrik için çözülen Dirac denklemi diğeri ise $(1+1)$ boyutta çözülen DKP denklemdir.

Tezin dördüncü bölümünde ele alınan bir genel metrik için katsayıların hesabı yapılmıştır. Bu denklemlerin çözümünde karşılaştığımız diferansiyel denklemler, değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Daha sonra eğri uzay-zamanda (1+1) boyutta Dirac ve eğri uzay-zamanda (1+1) boyutta DKP denklemleri için ayrı ayrı genel çözümler elde edilmiştir. Daha sonra bu çözümler kullanılarak $ds^2 = -dt^2 + \cosh^2(Ht) dx^2$ metriği ve $A_1 = -\frac{E}{H} \sinh(Ht)$ potansiyeli için Dirac ve DKP denklemleri çözülmüştür. Bunun sonucunda her iki denklem için parçacık yaratma olasılık yoğunlukları hesaplanmıştır.

Tezin sonuç bölümünde ise hesaplanan parçacık yaratma sayı yoğunluklarının hem termal yapılara uygunluğu incelenmiş hem de MATHEMATICA yazılımı kullanılarak elde edilen grafikler kullanılarak DKP denklemi ile Dirac denkleminin parçacık yaratma sayı yoğunlukları, genişleme parametresi ve elektrik alan değişimleri spin durumlarına göre yorumlanmıştır.

Sonuç olarak zamana bağlı bir elektrik alanda parçacık yaratma sayı yoğunluğunun, spin- $\frac{1}{2}$ parçacıkları temsil eden Dirac ile spin-1 parçacıklarını temsil eden DKP parçacıklarında farklı sonuçlar doğurduğu gözlemlenmiştir. Elektrik alan şiddetinin spin-1 parçacıklarında genişleme sabitine göre daha etkili olduğu sonucuna varılmıştır.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında önerilerinden yararlandığım ilk tez danışmanım Prof. Dr. Gülsen Öngüt'e, tez konusunun belirlenmesinde ve tez çalışmamın belirli aşamalarında önerilerinden ve tartışmalarından yararlandığım Prof. Dr. Kenan Söğüt'e, tez çalışmam süresince benden desteğini hiçbir zaman esirgemeyen Dr. Öğretim Üyesi Evrim Ersin Kangal'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca danışman hocam Prof. Dr. Gülsen Öngüt'ün emekli olmasından dolayı doktora savunma sınavına birkaç hafta kala danışman değişikliğinin gerekliliği ortaya çıktığında beni yalnız bırakmayıp tez danışmanlığımı kabul eden Prof. Dr. Aysel Kayış Topaksu'ya çok teşekkürler ederim.

Aynı zamanda benden hayatım boyunca maddi ve manevi desteğini esirgemeyen anneme, babama ve kardeşime teşekkürü bir borç bilirim.

Bu tez çalışmasına Ç. Ü. BAP FEF2011D30 adlı projeye desteğini sağlayan Çukurova Üniversitesine şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ	I
ABSTRACT.....	II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET	III
TEŞEKKÜR.....	V
İÇİNDEKİLER	VI
ÇİZELGELER DİZİNİ	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ	X
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XII
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	7
2.1. Dirac Denklemi	7
2.2. Duffin-Kemmer- Petiau (DKP) Denklemi	8
2.3. Bogoliubov Dönüşüm Tekniği	10
3. MATERYAL VE METOT	15
3.1. Eğri Uzay-Zamanda (3+1) Boyutta Dirac Denklemine Çözümü (Villalba and Greiner, 2002)	15
3.2. Eğri Uzay-Zamanda (1+1) Boyutta DKP Denklemine Çözümü ve Proca Denklemi (Ünal, 2005)	24
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	35
4.1. Çizgi Elemanının Seçimi	35
4.2. Çizgi Elemanına Ait Katsayıların Hesabı	35
4.2.1. Metrik Tensör ve Metrik Tensörün Tersisi	35
4.3. Eğri Uzay-Zamanda (1+1) Boyutta Dirac Denklemine İndirgenmesi	43
4.3.1. $ds^2 = -dt^2 + \cosh^2(Ht)dx^2$ Metriği İçin Eğri Uzay-Zamanda (1+1) Boyutta Dirac Denklemine Çözümü	45
4.3.2. Spin – $1/2$ Parçacık Yaratılması	53

4.4. Eğri Uzay –Zamanda (1+1) Boyutta DKP Denkleminin İndirgenmesi.....	57
4.4.1. $ds^2 = -dt^2 + \cosh^2(Ht)dx^2$ Metriği İçin Eğri Uzay-Zamanda (1+1) Boyutta DKP Denkleminin Çözümü	63
4.4.2. Spin-1 Parçacık Yaratılması	73
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	79
KAYNAKLAR	91
ÖZGEÇMİŞ	99



ÇİZELGELER DİZİNİ

SAYFA

Çizelge 5.1. Elde edilen sonuçlar.....	82
--	----





ŞEKİLLER DİZİNİ

SAYFA

Şekil 1.1.	Dirac Denizi  parçacıklar  antiparçacıklar	1
Şekil 1.2.	Klein Paradoksu	2
Şekil 5.1.	DKP ve Dirac parçacık yaratma sayı yoğunluklarının elektrik alanın şiddetine göre değişimi ($H = 1,04$)	83
Şekil 5.2.	DKP ve Dirac parçacık yaratma sayı yoğunluklarının elektrik alanının şiddetine göre değişimi $ H = 2,22 $	84
Şekil 5.3.	DKP ve Dirac parçacık yaratma sayı yoğunluklarının elektrik alanının şiddetine göre değişimi $H = 2,84 $	85
Şekil 5.4.	DKP ve Dirac parçacık yaratma sayı yoğunluklarının genişleme sabitine göre değişimi ($E_0 = 1,14$)	86
Şekil 5.5.	DKP ve Dirac parçacık yaratma sayı yoğunluklarının genişleme sabitine göre değişim grafiği $E_0 = 2.22$	87
Şekil 5.6.	DKP ve Dirac parçacık yaratma sayı yoğunluklarının genişleme sabitine göre değişimi $E_0 = 4,46$	88



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

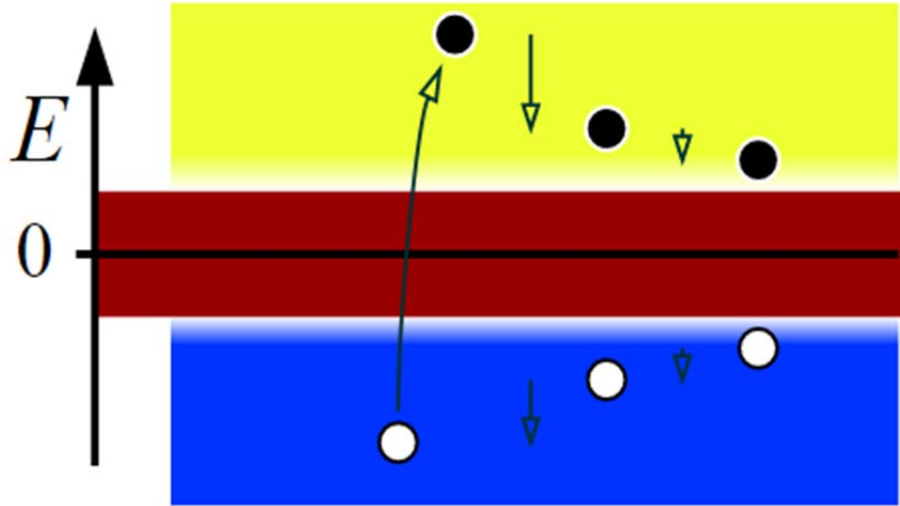
m	: Kütle
ψ	: Dalga fonksiyonu
β^μ	: Kemmer matrisleri
γ^μ	: Dirac matrisleri
$g^{\mu\nu}$	: Metrik tensörü
σ^i	: Pauli spin matrisleri
I	: Birim matris
$e_{(i)}^\mu(x)$	: Bir matrisi düz uzay-zamandan eğri uzay- zamana dönüştüren iki ayak
$e_{\mu}^{(i)}(x)$	: Bir matrisi eğri uzay-zamandan düz uzay- zamana dönüştüren iki ayak
A_μ	: Elektromanyetik alan tensörü
η_{ij}	: Minkowski metriği
$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$	: Christoffel Sembolü
Γ_μ	: Spin - $1/2$ bağlantı katsayısı
Σ_μ	: Spin-1 parçacığının spin bağlantı katsayısı
DKP	: Duffin –Kemmer –Petiau
E	: Elektrik Alanı
e	: Elektron Yüğü
$\otimes$	: Dolaysız Çarpım
δ	: Kroneker Delta
${}_2F_1$	: Hipergeometrik fonksiyonlar
$W_{\lambda,\mu}$	: Whittaker Fonksiyonu
$S^{\mu\nu}$	: Spin Tensörü



1. GİRİŞ

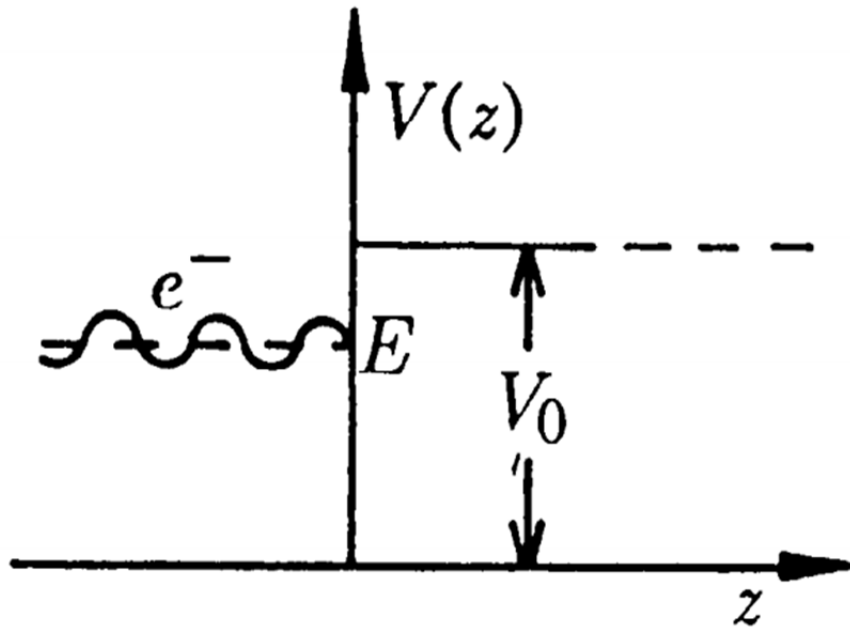
Kuantum alan kuramı temel parçacıkların fiziğini tanımlamak ve anlamak amacı ile geliştirilen fizik ilkelerinin ve modern temel parçacık fiziğinin temelini oluşturan bir kuramdır. Bu kuram, foton, elektron ve mezon gibi parçacıkların yaratılıp yok edilebildiği yüksek enerji çarpışmaları ve buna benzer başka süreçleri betimlemek amacıyla kuantum mekaniği ve görelilik ilkelerinin birleştirilmesi sonucunda ortaya çıkmıştır (Mahon, 2009).

Dirac 1928'de elektronlar için görelilik dalgası denklemini türetmiştir. Dirac denkleminin çözümünde dalgası fonksiyonunun hem pozitif hem de negatif çözümleri elde edilmiştir. Negatif çözümleri varsa Pauli dışlama ilkesine göre tüm negatif durumların doldurulması gerekirdi. Dirac bu problemi Dirac denizini ortaya atarak çözmüştür. Dirac denizi, Dirac denkleminin öngördüğü negatif enerjili kuantum durumlarını açıklamak için ortaya atılmış teorik bir modeldir ve negatif enerjiye sahip sonsuz parçacıklar denizi olarak tanımlanmıştır (Dirac,1928; Dirac,1930; Klein, 1934).



Şekil 1.1. Dirac Denizi • parçacıklar • antiparçacıklar (Dirac,1928).

1929’ da teorik fizikçi Oscar Klein, Dirac’ ın teorisinde negatif enerjilerin kabul edilemez fiziksel sonuçlara yol açabileceğini bir örnekle açıklamıştır. Yüksek engelli bir potansiyelden elektron saçılması problemi için Dirac denklemini kullanarak ilginç bir sonuç elde etmiştir. Bu sonuca göre soldan gelen elektronun sağa iletilme olasılığı sıfır olacaktı. Bu da negatif enerji durumunda ortaya çıkmaktadır. Buna literatürde Klein Paradoksu denir (Klein, 1930; Greiner 2000) (Şekil 1.2). Klein’in paradoksunun arkasındaki fizik, güçlü elektromanyetik ve gravitasyonel alanlarda temel parçacıkların üretimi ile bağlantılı olarak yeniden ilgi kazanmıştır (Bongaarts and Ruijsenaar, 1975).



Şekil 1.2. Klein Paradoksu (Grenier,2000).

Klein Paradoksunun ortaya çıkmasına neden olan bu süreç (Bir dış elektrik alanı tarafından elektron-pozitron çiftinin yaratılması süreci) 1931 yılında Sauter tarafından daha ayrıntılı bir şekilde ele alınmış, buna paralel olarak Heisenberg ve Euler, Sauter’ın çalışmalarını genişletmiştir(Grenier,2000;Bongaarts

and Ruijsenaar, 1975; Sauter 1931). 1951’de Schwinger, Heisenberg ve Euler’in çalışmalarını yeniden değerlendirerek vakumda bir elektrik alanı tarafından parçacık oluşumunun teorik açıklamasını yapmıştır (Sauter 1931; Heisenberg 1936). Bir dış elektrik alanı tarafından bir vakumda parçacık oluşturma, kuantum alanı teorisinde yaygın bir olgudur. Bu olgu, Schwinger mekanizması olarak bilinen uzamsal olarak homojen bir sabit elektrik alanının varlığında incelenmiş ve sonrasında bu olgu zamana bağlı farklı elektrik alanları için genişletilmiştir (Heisenberg and Euler, 1936; Schwinger, 1951; Nussinov, 1975; Kharzev, Tuchin, 2005; Kharzev, Levin 2007; Castorina, Kharzev, Satz, 2007).

Güçlü bir elektromanyetik alanın yaratmış olduğu vakum kararsızlığından kaynaklı parçacık yaratma olasılığını Schwinger öz zaman yöntemini kullanarak yeniden formüle etmiştir (Sauter 1931; Heisenberg and Euler, 1936):

$$\omega = \frac{2(eE)^2}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(\frac{-n\pi m^2}{eE}\right)$$

Yukarıdaki eşitlikte E elektrik alan, m kütle, e ise elektron yüküdür.

Zamana bağlı bir elektromanyetik alanda parçacık oluşumu hem kuantum elektrodinamik (QED) hem de kozmoloji alanı için etkin bir çalışma konusu olmuştur. Son yıllarda güçlü elektromanyetik alanlar tarafından parçacık üretimi ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır (Greiner, Müller and Rafelski 1985; Grib, Mamaev and Mostepanenko, 1988; Fradkin, Gitman and Shvartsman, 1991). Bu çalışmalardan sonra Heisenberg, Euler (Heisenberg and Euler, 1936.) ve Schwinger (Schwinger, 1951.) öncülüğünde geliştirilen güçlü elektromanyetik alanlarda kendiliğinden çift yaratma mekanizması literatürde yaygın olarak tartışılmıştır (Grenier, Müller and Rafelski, 1985; Grib, Mamaev and Mostepanenko, 1988; Nikishov, 1979; Papov, 2002; Hayashinaka, Fujitac and Yokoyama, 2016; Grib, Mostepanenko and Frolov, 1972). Klasik elektromanyetizmanın temelinde

vakum kararsızlığı ve parçacık antiparçacık üretiminin olduğu uzun zamandan beri bilinmektedir. O zamandan bu yana da çeşitli alternatif yaklaşımlarla aynı sonuç elde edilmiştir. Güçlü, durgun ve homojen elektrik alanlarda parçacık oluşturma ile ilgili farklı yöntemlere başvurulmuştur. Öz ve sanal zaman yöntemi (Heisenberg and Euler,1936) ,WKB tekniği (Brezin and Itzykson, 1970; Papov, 1972; Papov and Morinov, 1977; Piazza, 2004; Dumlu and Dunne, 2010) , Schrödinger fonksiyonel yaklaşımı (Hallinand, Liljenberg, 1995) , kuantum kinetik eşitlikler (Smolyansky, et al,1997; Schmidt et al, 1998; Smolyansky ,et al, 1998; Kluger, Mottola and Eisenberg, 1998; Alkofer et al, 2001; Hebenstreit,Alkofer and Gies, 2008), dış elektrik alanlarda çift üretim çalışmalarını genişletmek için türetilmiş yöntemlerdir. Bu teknikler içerisinde yer alan öz zaman yöntemi (Grenier, Müller , Rafelski, 1985; Grib, Mamaev, Mostepanenko,1988) ile hesaplamaların yapılması oldukça zor olduğu için Bogoliubov dönüşüm tekniği (Grib, Mamaev, Mostepanenko,1988) kullanılmaktadır. Bu tekniğin temelinde, elde edilen çözümleri kullanmak sureti ile pozitif ve negatif frekans çözümlerini türetmek yatmaktadır. Birçok araştırmacı bu nedenle zamanla değişen elektrik alanlarda çift oluşturma problemi ile ilgili teorik çalışmalara odaklanmıştır(Brezin and Itzykson,1970; Hebenstreit, Alkofer and Gies, 2008; Papov, 1971; Papov 1973,1974; Narozhny and Nikishov, 1974; Mostepanenko and Frolov, 1974; Hawking, 1975; Grib, Mamaev, Mostepanenko, 1988). Teorik çalışmaların yanısıra lazer ışınları (Brezin and Itzykson, 1970), ağır iyon çarpışmaları (Ringwald, 2001; Papov, 2001; Zeldovich, Papov, 1972) ve astrofizikte güçlü gamma ışını patlamaları gibi deneysel çalışmalarda da ele alınmıştır (Papov and Morinov, 1972; Dunne,Hall,1998; Kim, Page, 2002) .

Kütleli ve spin-0 parçacıkları betimleyen görelî kuantum mekaniğinin temel denklemi Klein-Gordon denklemidir. Kütleli ve yarı spinli parçacıkları betimlemek için yaygın olarak çalışılan denklem ise Dirac denklemidir (Piazza, 2004; Villalba and Grenier, 2002; Villalba,1995) . Bu denklemlere ek olarak çalışılan başka bir görelî denklem de spin-0 ve spin-1 parçacıkları betimleyen

Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) denklemdir. Bu denkleme olan ilgi parçacık ve çekirdek fiziğindeki gelişmelerden dolayı artmıştır(Villalba and Rojas, 2006; Nedjadi, Barrett)

Bu çalışmada zamana bağlı elektrik alan içerisinde hem $\text{spin}-\frac{1}{2}$ parçacıkları betimleyen Dirac denklemi hem de $\text{spin}-0$ ve $\text{spin}-1$ parçacıkları betimleyen DKP denklemi çözülmüştür ve buna bağlı olarak Bogoliubov katsayıları hesaplanarak parçacık yaratılma olasılıkları elde edilmiştir. Daha sonra hem Dirac hem de DKP için elde edilen sonuçlar grafiksel olarak karşılaştırılmıştır.

Tez giriş bölümünün dışında, dört bölümden oluşmaktadır. Kaynak araştırmaları kısmında Dirac denklemi, DKP denklemi ve Bogoliubov dönüşüm tekniği açıklanmış ve daha önce yapılan çalışmalara yer verilmiştir. Materyal ve metod bölümünde tezde kullanılan Dirac ve DKP denkleminin kaynak oluşturan makalelerden iki tanesi ayrıntılı bir biçimde ele alınmıştır. Bulgular ve tartışmalar bölümünde, zamana bağlı bir dış elektrik alanının varlığında eğri uzay-zamanda $(1+1)$ boyutlu DKP ve Dirac denkleminin çözümleri elde edilmiştir. Parçacık yaratma olasılıkları Bogoliubov dönüşüm tekniğiyle hesaplanmıştır. Tezin sonuç bölümünde her iki denklemden elde edilen sonuçlar grafikleri ile değerlendirilerek yorumlanmıştır.



2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Yüksek enerjideki olguların açıklanması görelî dalga denkleminin araştırılmasını gerektirir. Bu bölümde görelî dalga denklemlerinden Dirac Denklemi ve DKP denklemi ile parçacık yaratma sayısının hesaplanmasında kullanılan yöntemlerden biri olan ve tezde kullanılan Bogoliubov dönüşüm yöntemiyle ilgili kısa bilgi verilmektedir.

2.1. Dirac Denklemi

Klein Gordon denklemi Schrödinger denkleminin görelî versiyonudur. Spin-0 parçacıkları temsil etmektedir. Klein Gordon denklemi kuantum teorisinde birkaç soruna yol açmaktadır. Bu sorunlardan bir tanesi negatif enerjili çözümlerin bulunuşu, diğeri ise negatif olasılık yoğunluğudur (Baumali). Bu sorunları ortadan kaldırmak için Paul Dirac 1928’de enerji ve momentum arasında lineer ilişki olan bir denklem yazmıştır. Dirac tarafından türetilen bu denklem görelî bir dalga denklemi olup yarım spinli parçacıkları temsil etmektedir. Matematiksel olarak eğri uzay-zamanda aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır (Dirac, 1925):

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu - \Gamma_\mu + ieA_\mu) + m]\varphi(t, x) = 0 . \quad (2.1)$$

Denklem (2.1)’de A_μ vektör potansiyeli, γ^μ Dirac matrisi, $\Gamma_\mu - \frac{1}{2}$ spin bağlantı katsayısıdır. Dirac matrisleri arasında

$$\gamma^{(a)}\gamma^{(b)} + \gamma^{(a)}\gamma^{(b)} = 2\eta^{(ab)} \quad (2.2)$$

ilişkisi vardır.

μ : Eğri uzay indisleri

a : Düz uzay indisleri

Spin bağlantı katsayısı ise

$$\Gamma_{\lambda} = -\frac{1}{8} g_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır. Denklem (2.3)'te $g_{\mu\alpha}$ metrik tensör, $\Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha}$ ise eğri uzay-zaman geometrisi ile ilgili bilgi içerir ve Christoffel sembolleri diye adlandırılır. Christoffel sembolleri

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_{\mu} g_{\beta\nu} + \partial_{\nu} g_{\beta\mu} - \partial_{\beta} g_{\mu\nu}) \quad (2.4)$$

biçiminde tanımlanır (Dirac, 1925).

2.2. Duffin-Kemmer- Petiau (DKP) Denklemi

DKP denklemi spin 0 ve spin 1 parçacıkları temsil eden, birinci dereceden görelî bir dalga denklemidir (Pollock, 2010; Kemmer, 1938; Duffin, 1938; Petiau, 1936). Son zamanlarda parçacık fiziği ve nükleer fiziğe uygulanabilirliği nedeni ile bu denkleme olan ilgi artmıştır (Kemmer, 1938; Duffin 1938). Literatürde yapılan çalışmaların çoğu DKP denkleminin yapısal biçiminin geliştirilmesi ve bunun ile birlikte elektromanyetik alanın varlığında vektör parçacıkların davranışlarının incelenmesi üzerinedir (Merad, 2007).

Klein-Gordon, Dirac denklemlerine karşın DKP denklemi 16 bileşenden meydana gelir. Son yıllarda Red'kov (Nejdadi, Barrett, 1993), Lunardi ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmalar görelî DKP denklemini eğri uzay-zamanda tanımlamayı amaçlamıştır (Yaşuk, Berkdemir, Berkdemir, Önem ; Söğüt and Havare, 2010).

Dirac denklemindeki gama matrislerine karşılık DKP denkleminde β matrisleri yer almaktadır. Buna göre DKP denklemi aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$[i\beta^\mu(\partial_\mu - \Sigma_\mu + ieA_\mu) - m]\psi(x) = 0 \quad (2.5)$$

(2.5) denklemi elektromanyetik alan içindeki DKP denkleminin yazılımıdır. Burada A_μ elektromanyetik alan tensörüdür. Bu denklemde β^μ , 16×16 bileşenli Kemmer matrisi, m parçacığın kütlesi, ψ ise dalga fonksiyonudur. β^μ ($\mu = 0,1,2,3$) matrisleri aralarında

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\mu = g^{\mu\nu} \beta^\lambda + g^{\nu\lambda} \beta^\mu \quad (2.6)$$

komütasyon ilişkisini sağlayan DKP matrisleridir ve DKP cebirini tanımlarlar. Denklem (2.2) deki $g^{\mu\nu}$ Minkowski uzay-zamandaki metrik tensörü ifade eder: $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Eğri uzay-zaman ile düz uzay- zaman arasındaki ilişki iki ayaklar (diadlar) aracılığı ile sağlanır:

$$g^{\mu\nu} = e_{(i)}^\mu(x) e_{(j)}^\nu(x) \eta^{(i)(j)} \quad (2.7)$$

β matrislerinin düz Minkowski uzay-zaman ilişkisi aşağıdaki gibidir.

$$\beta^\mu(x) = e_{(i)}^\mu \beta^{(i)} \quad , \quad (2.8)$$

$$\beta^\mu = \gamma^\mu \otimes I + I \otimes \gamma^\mu \quad (2.9)$$

Denklem (2.9) Kemmer matrislerinin eğri uzay-zamanda Dirac matrisleri biçiminde yazılımıdır. Burada γ^μ , standart Dirac matrisleridir. Eğri uzay-zamanda

ifade edilen Dirac matrisleri ile düz uzay zaman matrisleri arasındaki ilişki aşağıdaki biçimde gösterilir (Dirceu, Portes, Markos, Pinho and Hilaro, 2013):

$$\gamma^\mu = e_{(i)}^\mu \gamma^{(i)} . \quad (2.10)$$

Eğri uzay için greek indisler eğri uzayı, latin indisler düz uzayı temsil etmektedir. Denklem (2.5)'teki spin-1 parçacıklarını temsil eden Σ_μ ile spin- $\frac{1}{2}$ parçacıklarını temsil eden Γ_μ spin bağlantı katsayısı arasındaki ilişki aşağıdaki biçimde gösterilir:

$$\Sigma_\mu = \Gamma_\mu \otimes I + I \otimes \Gamma_\mu . \quad (2.11)$$

Spin- $\frac{1}{2}$ parçacıkları için spin bağlantı katsayısı

$$\Gamma_\lambda = -\frac{1}{8} g_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (2.12)$$

biçiminde yazılır.

2.3. Bogoliubov Dönüşüm Tekniği

Son zamanlarda bir dış kaynak tarafından parçacık yaratılması problemi teorik açıdan oldukça ilgi çekmektedir. Eğri uzay-zamanda parçacık sayısı farklı yöntemlerle hesaplanır. Bu yöntemlerden biri de Bogoliubov dönüşüm tekniğidir. Bogoliubov dönüşümü, yaratma ve yok etme operatörlerinden oluşan üniter bir dönüşüm tekniğidir. 1947 yılında N.N. Bogoliubov tarafından bozonik parçacıkların yaratma ve yok etme operatörlerinin lineer kanonik dönüşümü ile bağlantılı olarak tanımlanmıştır (Caracciolo,Palumbo,Viola,2008). Daha sonraki yıllarda fermiyonik operatörlerin lineer kanonik dönüşümü kullanılarak

süperiletkenlik teorisinin matematiksel temelini oluşturmuştur (Xiao, 2009; Bogoliubov,1947; Bogoliubov, 1958; Valatin, 1958; Bogoliubov, Tyablikov, 1949; Tyablikov,1967). Benzer bir dönüşüm John George Valentin tarafından da ortaya atılmıştır. Önerilen bu yöntem oldukça etkili olmasından dolayı tüm lineer kanonik dönüşümler literatürde Bogoliubov dönüşümü olarak adlandırılmıştır (Tyablikov,1967; Dadanov, 2007; Bogoliubov, 1958; Bogoliubov,Tolmachev,Schirkov, 1959; Valatin,1958).

Kuantum alan teorisinde alan denkleminin iki ortogonal çözümü vardır:

$$\psi = \sum_i (a_i \varphi_i + a_i^\dagger \varphi_i^*) = \sum_j (b_j \theta_j + b_j^\dagger \theta_j^*) \quad (2.13)$$

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{mn} \quad \text{ve} \quad (\varphi_m^*, \varphi_n^*) = \delta_{mn}, \quad (2.14)$$

$$(\theta_m, \theta_n) = \delta_{mn} \quad \text{ve} \quad (\theta_m^*, \theta_n^*) = \delta_{mn}, \quad (2.15)$$

$$(\varphi_m, \varphi_n^*) = (\theta_m, \theta_n^*) = 0 \quad (2.16)$$

φ ve θ kip çözümleridir.

$$a_i = \sum_j (\alpha_{ji} b_j - \beta_{ji}^* b_j^\dagger) \quad (2.17)$$

$$b_j = \sum_i (\alpha_{ji}^* a_i - \beta_{ji} a_i^\dagger) \quad (2.18)$$

α_{ji} ve β_{ji} Bogoliubov katsayılarıdır ve bu katsayılar aşağıdaki koşulları sağlar:

$$\sum_m (\alpha_{im} \alpha_{jm}^* - \beta_{im} \beta_{jm}^*) = \delta_{ij}, \quad (2.19)$$

$$\sum_m (\alpha_{im} \alpha_{jm} - \beta_{im} \beta_{jm}) = 0. \quad (2.20)$$

Burada

$$\alpha_{ji} = (\theta_m, \varphi_n) \quad \text{ve} \quad \beta_{mn} = -(\theta_m, \varphi_n^*) \quad \text{şeklindedir.} \quad (2.21)$$

Aşağıdaki iki boşluk durumu Fock uzayını betimler:

$$|0_a\rangle: a_i |0_a\rangle = 0, \quad (2.22)$$

$$|0_b\rangle: b_j |0_b\rangle = 0. \quad (2.23)$$

$b_j^\dagger b_j$ işlemcisinin $|0_a\rangle$ durumunda beklenen değeri parçacık sayısını verir (Valatin, 1969; Söğüt ve ark, 2015) :

$$\langle 0_a | b_j^\dagger b_j | 0_a \rangle = \sum_i |\beta_{ji}|^2. \quad (2.24)$$

Litaratürlerde Bogoliubov dönüşüm tekniği ile ilgili birçok çalışma yer almaktadır. Aşağıda bu çalışmalarla ilgili kısa bir özet verilmiştir.

1985 yılında K.H. Lotze (Lotze,1995). Dirac eşitliğini bir dış elektrik alanda çözümleyerek gravitasyonel ve elektromanyetik alandaki çözümlerinden elde ettiği parçacık sayısını Bogoliubov dönüşüm tekniğini kullanarak elde etmiştir.

1994 yılında Jaume Garriga (Garriga,1994). (1+1) boyutlu de Sitter uzayında elektrik alanı tarafında yaratılan parçacıkların oranını Bogoliubov dönüşüm yöntemi ile hesaplamıştır.

1995 yılında Villalba (Villalba,1995). de Sitter uzayında sabit bir elektrik alanında Dirac denklemini çözmüştür. Bogoliubov dönüşüm tekniğini kullanarak elektrik alanı tarafından oluşturulan spin 1/2 parçacıklarının oranını hesaplamış ve bu durumu skaler durumlar ile karşılaştırmıştır.

2001 yılında Carl E. Dolby ve Stephen F. Gull (Dolby and Gull,2001). tarafından, zamanla değişmeyen elektrik alanı ve bir adyabatik elektrik alanı durumları üzerinde yoğunlaşarak, uzamsal düzgün elektrik alanında parçacık oluşturma çalışmaları yapılmıştır. Bu çalışmada parçacık tanımını içeren genel S-Matris elemanı türetilmiş ve Bogoliubov katsayıları ile beklenen değeri bulunmuştur. Düzgün, uzamsal, zamanla değişen elektrik alanı denklemlerinin Bogoliubov katsayıları hesaplanmıştır. Sabit bir elektrik alanda denklemler çözülmüş ve sonuç oluşturulan parçacık çiftlerinin yoğunluğunu bulmak için kullanılmıştır. Aynı zamanda sonlu bir zaman sürecindeki akım yoğunluğu da bulunmuştur.

2006 yılında V.M. Villalba (Villalba, 2006), pozitronların ve elektronların üretim mekanizmasını, genliği büyük zaman değerleri için yok olan uzaysal olarak homojen, zamana bağlı bir elektrik alanında tartışmıştır. Hamilton köşegenleştirme tekniğini kullanarak, zamanın bir fonksiyonu olarak oluşturulan parçacıkların yoğunluğunu hesaplamıştır. Zaman parametresi sonsuza kadar ilerledikçe, elektrik alanı tarafından oluşturulan çiftin dağılımının Bogoliubov katsayıları aracılığıyla hesaplanan sonuca indirgendiğini göstermiştir.

2009 yılında Sang Pyo Kim ve Don N. Page (Kim and Page, 2009), Klein -Gordon denklemini ds_2 ve Ads_2 (de Sitter ve anti de Sitter) uzayında sabit bir elektrik alan için çözmüşlerdir. Bunun sonucunda parçacık oluşum oranını Bogoliubov dönüşüm tekniği ile bulmuşlardır.

2010 yılında Mokhtar Falek ve Mahmoud Merad (Falek ve Merad,2010). Robertson-Walker uzay-zamanında (1 + 1) boyutlu DKP denklemini (spin 0 ve spin 1 için) çözmüşlerdir. Bunun sonucunda parçacık yaratma oranını Bogoliubov dönüşümleri tekniği ile hesaplamışlardır.

2011 yılında S. Haouat ve R. Chekireb (Haouat and Chekireb, 2012). düz bir Robertson-Walker uzayında vakumdan parçacık oluşturma problemini incelenmişlerdir. $a^2(\eta) = a + b \tanh(\lambda\eta) + c \tanh^2(\lambda\eta)$ metriğini kullanarak Klein-Gordon denklemini çözmüşlerdir. Daha sonra Bogoliubov dönüşümüne

dayanan kanonik yöntem ile çift oluşturma olasılığını ve oluşturulan parçacıkların sayı yoğunluğunu hesaplamışlardır.

2012 yılında S. Haouat ve R. Chekireb (Haouat and Chekireb, 2012). elektromanyetik alanların etkisiyle Robertson-Walker uzay-zamanında vakum içindeki skaler parçacıkların yaratılmasıyla ilgili çalışma yapmışlardır. Değişken elektrik alanlı ve sabit manyetik alanda Bogoliubov dönüşüm yöntemi ile Klein-Gordon denklemini çözmüşlerdir. Bogoliubov dönüşüm yöntemi, çift oluşturma olasılığını ve oluşturulan parçacıkların sayı yoğunluğunu hesaplamak için uygulanır. Elektrik alanın skaler parçacıkların oluşumunu arttırdığını, manyetik alanın ise en aza indirdiğini göstermişlerdir.

2014 yılında Kangal ve arkadaşları (Kangal ve ark, 2014). de Sitter uzayında zamana bağımlı bir elektrik alanda DKP denklemini çözerek Bogoliubov dönüşümleri tekniği ile spin 1 bozonlarının yaratılma oranını hesaplamışlardır. Güçlü bir elektrik alanı ile elektrik alanının olmadığı durumlarda parçacık yaratma oranını karşılaştırarak analiz etmişlerdir.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde yapılan araştırmalar sonucunda tez konusuyla bağlantılı olan iki çalışma ele alınmıştır. İlk çalışmada yöntemi tanıtmak amacıyla eğri uzay-zamanda (3+1) Dirac denkleminin çözümünün elde edildiği bir çalışma yer almaktadır (Villalba and Greiner, 2002) . Bu çalışmada ayrıca Bogoliubov yöntemi ile parçacık yaratma olgusu da incelenmiştir. Diğer çalışma da ise eğri uzay-zamanda (1+1) boyutta DKP denklemi ile ilgili bir çalışma yer almaktadır (Ünal, 2005). Bu çalışma tezde DKP denkleminin çözümünde örnek olmaktadır.

3.1. Eğri Uzay-Zamanda (3+1) Boyutta Dirac Denkleminin Çözümü (Villalba and Greiner, 2002)

Bu çalışmada eğri uzay-zamanda Dirac denklemi sabit bir elektrik alanının varlığında çözülerek, parçacıkların yoğunluğu Bogoliubov dönüşümlerinin yardımıyla hesaplanmıştır. Ele alınan Bianchi I evrenini temsil eden çizgi elemanı ve vektör potansiyeli aşağıda yazıldığı gibidir :

$$ds^2 = -dt^2 + t^2(dx^2 + dy^2) + dz^2 , \quad (3.1)$$

$$A_\mu = (0,0,0, -Et) \quad (3.2)$$

Bu metrikler oluşturulurken Einstein alan denklemlerini sağlaması gerekir. Elektromanyetik alanda eğri uzay-zamanda Dirac denklemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\{\gamma^\mu (\partial_\mu - \Gamma_\mu - ieA_\mu) + m\}\psi = 0 \quad (3.3)$$

Burada γ^μ gama fonksiyonları arasında antikomütasyon ilişkisi bulunmaktadır:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (3.4)$$

Spin bağlantı katsayılarının gösterimi aşağıdaki gibi yazılmaktadır:

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{4} g_{\lambda\alpha} \left[\left(\frac{\partial b_\nu^\beta}{\partial x^\mu} \right) \alpha_\beta^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \right] s^{\lambda\nu} \quad (3.5)$$

$$s^{\lambda\nu} = \frac{1}{2} (\gamma^\lambda \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\lambda) \quad (3.6)$$

a_β^α , b_α^β matrisleri eğri γ^μ ve Minkowski $\tilde{\gamma}^\mu$ uzay zaman arasındaki bağlantıyı kuran Dirac matrisleridir:

$$\gamma_\mu = b_\mu^\alpha \tilde{\gamma}_\alpha, \quad \gamma^\mu = a_\beta^\mu \tilde{\gamma}^\beta \quad (3.7)$$

$$(\tilde{\gamma}^\lambda \tilde{\gamma}^\nu + \tilde{\gamma}^\nu \tilde{\gamma}^\lambda) = 2\eta^{\lambda\nu} \quad (3.8)$$

Bu çalışmada denklem (3.1)'deki çizgi elemanı köşegen seçildiğinden, köşegen tetratlarla çalışılmıştır:

$$\gamma^\mu = \sqrt{|g^{\mu\mu}|} \tilde{\gamma}^\mu \quad (3.9)$$

$$\gamma^0 = \tilde{\gamma}^0, \quad (3.10)$$

$$\gamma^1 = t \tilde{\gamma}^1, \quad (3.11)$$

$$\gamma^2 = t \tilde{\gamma}^2, \quad (3.12)$$

$$\gamma^3 = \tilde{\gamma}^3. \quad (3.13)$$

Denklem (3.9), denklem (3.5)'te yerine konulduğunda spin bağlantı katsayıları aşağıdaki biçimde bulunur:

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^1 \quad (3.14)$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^2 \quad (3.15)$$

$$\Gamma_3 = 0 \quad (3.16)$$

$$\Gamma_4 = 0 \quad (3.17)$$

Yukarıda bulunan spin bağlantı katsayıları denklem (3.3)'teki Dirac denklemine yerleştirildiğinde

$$\left\{ \tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{t} \left(\tilde{\gamma}^1 \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{\gamma}^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) + \tilde{\gamma}^3 \left(\frac{\partial}{\partial z} + ieEt \right) + m \right\} \psi_0 = 0 \quad (3.18)$$

elde edilir. Burada $\psi_0 = t\psi$ şeklinde tanımlanmıştır. Spin bağlantılarından gelen katkıyı iptal etmek için t çarpanı tanımlanmıştır. Denklem (3.18) iki tane birinci dereceden diferansiyel işlemcinin toplamı şeklinde

$$(\hat{K}_1 + \hat{K}_2)\Phi = 0, \quad (3.19)$$

$$\hat{K}_2\Phi = k\Phi = -\hat{K}_1\Phi \quad (3.20)$$

yazılabilir. Buradaki k ayırma sabitidir. Φ ile ψ_0 arasındaki ilişki şöyledir:

$$\tilde{\gamma}^3 \tilde{\gamma}^0 \psi_0 = \Phi \quad (3.21)$$

Ara işlemlerden sonra $\hat{K}_1$ ve $\hat{K}_2$ işlemcileri

$$\hat{K}_1 \Phi = t \left[\gamma^3 \frac{\partial}{\partial t} + \gamma^0 \left(\frac{\partial}{\partial z} - ieEt \right) + m\gamma^3 \gamma^0 \right], \quad (3.22)$$

$$\hat{K}_2 \Phi = \left(\tilde{\gamma}^1 \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{\gamma}^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \tilde{\gamma}^3 \tilde{\gamma}^0 \quad (3.23)$$

biçiminde yazılır. Denklem (3.18) $-i\nabla$ ile değiştirilir. Dalga fonksiyonu Φ spinörü aşağıda yazıldığı gibidir:

$$\Phi = \Phi_0 \exp(i\vec{k}) \quad (3.24)$$

$$\Phi = \Phi_0 \exp \left(\frac{i(k_x x + k_y y + k_z z)}{\vec{k}} \right) \quad (3.25)$$

Dirac matrislerinin seçimi aşağıdaki yazıldığı biçimdedir:

$$\tilde{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & i\sigma^1 \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

$$\tilde{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

$$\tilde{\gamma}^2 = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

$$\tilde{\gamma}^3 = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

$$\hat{K}_2 \Phi = k \Phi \quad (3.30)$$

Denklem (3.30) Φ 'nin spinörleri arasındaki ilişkinin belirlenmesine yardımcı olmaktadır.

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \frac{k_x \sigma^2}{ik_y - k} \Phi_1 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

biçimindedir.

$$k = i \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (3.32)$$

Yukarıda yazılan Dirac matrisleri denklem (3.31)'de yerine konulup $k_z = 0$ alındığında denklem (3.22)

$$\frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{k}{t} \varphi_1 + (m + ieEt) \varphi_2 = 0 \quad (3.33)$$

$$-\frac{d\varphi_2}{dt} + \frac{k}{t} \varphi_2 + (m - ieEt) \varphi_1 = 0 \quad (3.34)$$

biçimine indirgenir. Denklem (3.18)'den denklem (3.33) ve denklem (3.34) elde edilerek , ara işlemler sonucunda ikinci dereceden diferansiyel denklem

$$\frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} + \left(-\frac{k^2 - 2k + 3/4}{t^2} + m^2 + e^2 E^2 t^2 \right) \varphi_2 = 0 \quad (3.35)$$

elde edilir.

$$\varphi_2 = t^{-\frac{1}{2}} \phi_2 \quad (3.36)$$

Denklem (3.36)'daki değişken değiştirme yapıldığında denklem (3.35)'in çözümü Whittaker fonksiyonlarıdır:

$$\varphi_2 = C_1 M_{\lambda, \mu}(ieEt^2) + C_2 W_{\lambda, \mu}(ieEt^2) \quad (3.37)$$

Denklem (3.37)'de λ ve μ aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\lambda = -\frac{im^2}{4eE} \quad (3.38)$$

$$\mu = \frac{k}{2} - \frac{1}{2} \quad (3.39)$$

$$\varphi_1 = t^{-\frac{1}{2}} \phi_1 \quad (3.40)$$

şeklinde yeni bir tanımlama yapıldığında aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + \left(-\frac{k^2 - 2k + 3/4}{t^2} + m^2 + e^2 E^2 t^2 \right) \varphi_1 = 0 \quad (3.41)$$

Bu denklemin çözümü de Whittaker fonksiyonlarıdır:

$$\varphi_1 = C_3 M_{\lambda, \mu+1}(ieEt^2) + C_4 W_{\lambda, \mu+1}(ieEt^2) \quad (3.42)$$

Whittaker fonksiyonlarının $M_{k,\mu}(z)$ ve $W_{k,\mu}(z)$ confluent hipergeometrik fonksiyonları cinsinden yazılımı

$$M_{k,\mu}(z) = e^{-z/2} z^{1/2+\pi} M\left(\frac{1}{2} + \mu - k, 1 + 2\mu, z\right) \quad (3.43)$$

$$W_{k,\mu}(z) = e^{-z/2} z^{1/2+\pi} W\left(\frac{1}{2} + \mu - k, 1 + 2\mu, z\right) \quad (3.44)$$

biçimindedir. Whittaker fonksiyonlarının $z \rightarrow 0$ için asimtotik davranışı;

$$M_{k,\mu}(z) \sim e^{-z/2} z^{1/2+\mu} \quad (3.45)$$

$t \rightarrow 0$ limitinde pozitif ve negatif frekans kipleri aşağıdaki biçimde yazılır:

$$\varphi_0^+ = C_0^+ M_{\lambda,\mu}(ieEt^2) \quad (3.46)$$

$$\varphi_0^- = (C_0^+ M_{\lambda,\mu}(ieEt^2))^* = C_0^+ (-1) M_{\lambda,-\mu}(ieEt^2) \quad (3.47)$$

Whittaker fonksiyonunun $|z| \rightarrow \infty$ iken asimtotik davranışı aşağıdaki biçimde yazılır:

$$W_{k,\mu}(z) \sim e^{-z/2} z^k \quad (3.48)$$

$t \rightarrow +\infty$ için negatif ve pozitif frekans kipleri

$$\varphi_\infty^+ = C_\infty^+ W_{k,\mu}(ieEt^2) \quad , \quad (3.49)$$

$$\varphi_{\infty}^{-} = C_{\infty}^{-} W_{-k,\mu}(-ieEt^2) \quad (3.50)$$

biçimindedir. Burada C_{∞}^{+} ve C_{∞}^{-} normalizasyon sabitleridir. Asimtotik ifadeleri kullanıldığında aşağıdaki gibi yazılır:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} M(a, b, -z/a) \Gamma(b) = z^{\frac{1}{2}-\frac{b}{2}} J_{b-1}(2\sqrt{z}) \quad (3.51)$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} U\left(a, b, \frac{-z}{2}\right) \Gamma(1+a-b) = \mp i\pi e^{\pi i b} z^{\frac{1}{2}-\frac{b}{2}} H_{b-1}^{(1,2)}(2\sqrt{z}) \quad (3.52)$$

$t \rightarrow 0$ 'daki φ_{∞}^{+} ve φ_{∞}^{-} frekans kiplerinin toplamı aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\varphi_0^{+} = \alpha \varphi_{\infty}^{+} + \beta \varphi_{\infty}^{-} . \quad (3.53)$$

Whittaker fonksiyonlarının aşağıdaki özelliği kullanılarak

$$M_{k,\mu}(z) = \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(\mu-k+\frac{1}{2})} e^{-i\pi k} W_{-k,\mu}(-z) + \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(\mu+k+\frac{1}{2})} e^{-i\pi(k-\mu-\frac{1}{2})} W_{k,\mu}(z), \quad (3.54)$$

denklem (3.1.54)'ü kullanarak φ_0^{-}

$$\varphi_0^{-} = \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(\mu-\lambda+\frac{1}{2})} e^{-i\pi k} \varphi_{\infty}^{-} + \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\mu+\lambda)} (-1)^{\frac{-1}{4}} e^{-i\pi(\lambda-\mu-\frac{1}{2})} (\varphi_{\infty}^{-})^{*} \quad (3.55)$$

biçiminde yazılır:

$$W_{-k,\mu}(-z) = \left(W_{k,\mu}(z)\right)^{*} \quad (3.56)$$

$t \rightarrow \infty$ 'daki φ_{∞}^- ve $(\varphi_{\infty}^-)^*$ frekans kiplerinin toplamı aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\varphi_0^- = \alpha \varphi_{\infty}^- + \beta (\varphi_{\infty}^-)^* \quad (3.57)$$

Denklem (3.57)'deki Bogoliubov katsayıları için aşağıdaki ifade yazılır:

$$\frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} = e^{2i\pi\mu} \frac{\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - \lambda\right) \right|^2}{\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu + \lambda\right) \right|^2} \quad (3.58)$$

μ ve λ denklem (3.58)'de yerine yazılıp, Gama fonksiyonlarının aşağıda verilen özelliği kullanıldığında,

$$|\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \sinh \pi y} \quad (3.59)$$

$$\frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} = e^{-\pi k_{\perp}} \frac{\left(\frac{k_{\perp}}{2} - \frac{m^2}{4eE}\right) \sinh\left(\frac{\pi k_{\perp}}{2} - \frac{\pi m^2}{4eE}\right)}{\left(\frac{k_{\perp}}{2} + \frac{m^2}{4eE}\right) \sinh\left(\frac{\pi k_{\perp}}{2} + \frac{\pi m^2}{4eE}\right)} \quad (3.60)$$

elde edilir. Dirac parçacıkları için normalizasyon koşulu uygulandığında parçacık yoğunluğu

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (3.61)$$

$$n = |\beta|^2 = \left[\left(\frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} \right)^{-1} + 1 \right]^{-1} \quad (3.62)$$

bulunur. Elektrik alanı olmadığında denklem (3.62)'nin asimtotik davranışı analiz edildiğinde

$$\sinh z \sim \theta(z) \frac{e^{|z|}}{2}$$

$$n \approx \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} = \exp(-2\pi k_{\perp}) \quad (3.63)$$

Parçacık yoğunluğu elde edilir. Bu da Fermi-Dirac istatistiğine uymaktadır.

3.2. Eğri Uzay-Zamanda (1+1) Boyutta DKP Denkleminin Çözümü ve Proca Denklemi (Ünal, 2005)

DKP denkleminin (3+1) boyutunda çözümü oldukça zordur. Çünkü DKP denkleminde yer alan dalga fonksiyonu 16 bileşenli olduğundan, 16 çiftlenimli denklem elde edilir. Bu boyutta ortaya çıkan karmaşık diferansiyel denklemleri matematiksel olarak kolaylaştırmak için bu denklem (1+1) boyutunda çalışılarak bu zorluk giderilmiştir. Eğri uzay-zamanda (1+1) boyuttaki DKP denklemi

$$(\gamma^{\mu} \otimes I + I \otimes \gamma^{\mu}) \pi_{\mu} \psi(x) = 2m\psi(x) \quad (3.64)$$

biçiminde yazılır. I birim matrisi temsil etmektedir. Denklem (3.64)'deki

$$(\gamma^{\mu} \otimes I + I \otimes \gamma^{\mu}),$$

$$\beta^{\mu} = (\gamma^{\mu} \otimes I + I \otimes \gamma^{\mu})$$

biçiminde tanımlanır. Denklem (3.64)'deki π_{μ} ifadesinin açılımı aşağıdaki biçimde yazılır:

$$\pi_{\mu} = i\nabla_{\mu} = i \left(e_{\mu}^a(x) \frac{\partial}{\partial x^a} - \Gamma_{\mu} \right) \quad (3.65)$$

Denklem (3.65)'teki e_μ^a düz uzay-zaman ile eğri uzay-zaman arasında ilişkiyi kuran matristir ve aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$g_{\mu\nu} = e^{(a)}_\mu e^{(b)}_\nu \eta_{(a)(b)} \quad (3.66)$$

Denklem (3.66)'da $\eta_{(a)(b)}$ Minkowski metriğidir. Denklem (3.64)'te denklem (3.65)'teki eşitlik yazılıp düzenlendiğinde

$$(\gamma^\mu \otimes I + I \otimes \gamma^\mu) i \left(e_\mu^a(x) \frac{\partial}{\partial x^a} - \Gamma_\mu \right) \psi(x) = 2m\psi(x) \quad (3.67)$$

elde edilir. Her iki taraf i ile çarpıldığında aşağıdaki biçimde yazılır:

$$(\gamma^\mu \otimes I + I \otimes \gamma^\mu) \left(e_\mu^a(x) \frac{\partial}{\partial x^a} - \Gamma_\mu \right) \psi(x) = -2im\psi(x) \quad (3.68)$$

Düz uzay-zaman matrisi ile eğri uzay-zaman matrisi arasındaki ilişki aşağıdaki bağıntı ile verilir:

$$\gamma^\mu = e_a^\mu \gamma^a. \quad (3.69)$$

Bu, (3.68)'e yerleştirilirse,

$$e_a^\mu (\gamma^a \otimes I + I \otimes \gamma^a) \left(e_\mu^a(x) \frac{\partial}{\partial x^a} - \Gamma_\mu \right) \psi(x) = -2im\psi(x) \quad (3.70)$$

$$e_0^0 (\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0) \left(e_0^0(x) \frac{\partial}{\partial x^0} - \Gamma_0 \right) + e_1^1 (\gamma^1 \otimes I + I \otimes \gamma^1) \left(e_1^1(x) \frac{\partial}{\partial x^1} - \Gamma_1 \right) \psi(x) = -2im\psi(x) \quad (3.71)$$

bulunur. Denklem (3.64)'deki spin bağlantı katsayıları referans alınan bu çalışmada aşağıdaki biçimde yazılmıştır:

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{4} \Gamma_{\mu ab} (\Sigma^{ab} \otimes I + I \otimes \Sigma^{ab}). \quad (3.72)$$

Denklem (3.72)'deki Σ^{ab}

$$\Sigma^{ab} = \frac{1}{2} (\gamma^a \gamma^b - \gamma^b \gamma^a) \quad (3.73)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Denklem (3.69)'daki denklem (3.72)'de yerine yazıldığında:

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{4} e_\mu^c \Gamma_{cab} (\Sigma^{ab} \otimes I + I \otimes \Sigma^{ab}) \quad (3.74)$$

elde edilir. Denklem (3.74)'de $\mu = 0$ alınırsa:

$$\Gamma_0 = \frac{1}{4} e_0^0 [\Gamma_{001} (\Sigma^{01} \otimes I + I \otimes \Sigma^{01}) + \Gamma_{010} (\Sigma^{10} \otimes I + I \otimes \Sigma^{10})] \quad (3.75)$$

Bu eşitlikte e_0^0 altı çizili indis eğri uzayı temsil etmektedir. I ise birim matristir.

$$\begin{aligned} \Gamma_0 = \frac{1}{4} e_0^0 \Gamma_{001} & \left\{ \left[\frac{1}{2} (\gamma^0 \gamma^1 - \gamma^1 \gamma^0) \otimes I + I \otimes (\gamma^0 \gamma^1 - \gamma^1 \gamma^0) \right] \right. \\ & \left. + \Gamma_{010} \left[\frac{1}{2} (\gamma^1 \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^1) \otimes I + I \otimes (\gamma^1 \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^1) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.76)$$

bulunur. Referans alınan bu çalışma iki ayakları, denklem (3.76)'daki e_0^0 biçiminde tanımlamıştır.

$\Gamma_{001} = -\Gamma_{010}$ antisimetriktir. Buna göre

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2} e_0^0 \Gamma_{001} (\gamma^0 \gamma^1 \otimes I + I \otimes \gamma^0 \gamma^1) \quad (3.77)$$

$\mu = 1$ için yazıldığında ,

$$\Gamma_1 = \frac{1}{4} e_1^1 \Gamma_{1ab} (\Sigma^{ab} \otimes I + I \otimes \Sigma^{ab}) \quad (3.78)$$

$$\Gamma_1 = \frac{1}{4} e_1^1 [\Gamma_{101} (\Sigma^{01} \otimes I + I \otimes \Sigma^{01}) + \Gamma_{110} (\Sigma^{10} \otimes I + I \otimes \Sigma^{10})] \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1 = \frac{1}{4} e_1^1 \Gamma_{101} & \left\{ \left[\frac{1}{2} (\gamma^0 \gamma^1 - \gamma^1 \gamma^0) \otimes I + I \otimes (\gamma^0 \gamma^1 - \gamma^1 \gamma^0) \right. \right. \\ & \left. \left. + \Gamma_{110} \left[\frac{1}{2} (\gamma^1 \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^1) \otimes I + I \otimes (\gamma^1 \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^1) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.80)$$

elde edilir. $\Gamma_{101} = -\Gamma_{110}$ antisimetrik özelliğinden

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2} e_1^1 \Gamma_{101} \left(\underbrace{\gamma^0 \gamma^1}_{\sigma^3} \otimes I + I \otimes \underbrace{\gamma^0 \gamma^1}_{\sigma^3} \right) \quad (3.81)$$

denklem (3.81) elde edilir.

(3+1) boyutundan (1+1) boyutuna geçildiğinde $\lim \gamma^\mu \rightarrow \sigma^\mu$ olur.

$$\gamma^0 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.82)$$

$$\gamma^1 = -i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.83)$$

$$\gamma^0 \gamma^1 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

Kullanılarak denklem (3.64) şöyle yazılır:

$$\begin{aligned} & e_0^0 (\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0) e_0^0(x) \frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{\Gamma_{001}}{2} e_0^0 (\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0) e_0^0 (\gamma^0 \gamma^1 \otimes I + \\ & I \otimes \gamma^0 \gamma^1) + e_1^1 (\gamma^1 \otimes I + I \otimes \gamma^1) e_1^1 \frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{\Gamma_{101}}{2} e_1^1 (\gamma^1 \otimes I + \\ & I \otimes \gamma^1) e_1^1 \Gamma_{101} (\gamma^0 \gamma^1 \otimes I + I \otimes \gamma^0 \gamma^1)] \psi(x) = -2mi\psi(x) \end{aligned} \quad (3.85)$$

Denklem (3.85) düzenlendiğinde son hali şu şekli alır:

$$\begin{aligned} & (\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0) \frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{\Gamma_{001}}{2} (\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0) (\gamma^0 \gamma^1 \otimes I + I \otimes \gamma^0 \gamma^1) + \\ & (\gamma^1 \otimes I + I \otimes \gamma^1) \frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{\Gamma_{101}}{2} (\gamma^1 \otimes I + I \otimes \gamma^1) \Gamma_{101} (\gamma^0 \gamma^1 \otimes I + \\ & I \otimes \gamma^0 \gamma^1)] \psi(x) = -2mi\psi(x) \end{aligned} \quad (3.86)$$

Denklem (3.86)'daki matrisler aşağıdaki biçimde yazılır:

$$\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned}
(\gamma^1 \otimes I + I \otimes \gamma^1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.88}
\end{aligned}$$

$$\gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \sigma^3, \tag{3.89}$$

$$\begin{aligned}
\underbrace{\gamma^0 \gamma^1}_{\sigma_3} \otimes I + I \otimes \underbrace{\gamma^0 \gamma^1}_{\sigma_3} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \tag{3.90}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0)(\gamma^0 \gamma^1 \otimes I + I \otimes \gamma^0 \gamma^1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.91}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\gamma^1 \otimes I + I \otimes \gamma^1)(\gamma^0 \gamma^1 \otimes I + I \otimes \gamma^0 \gamma^1) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.92}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x^0} & \frac{\partial}{\partial x^0} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^0} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x^0} \\ \frac{\partial}{\partial x^0} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x^0} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x^0} & \frac{\partial}{\partial x^0} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Gamma_{001} & 0 & 0 & \Gamma_{001} \\ -\Gamma_{001} & 0 & 0 & \Gamma_{001} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\
&\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial x^1} & -\frac{\partial}{\partial x^1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x^1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^1} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_{101} & 0 & 0 & \Gamma_{101} \\ \Gamma_{101} & 0 & 0 & \Gamma_{101} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_+ \\ \psi_0 \\ \psi_0 \\ \psi_- \end{bmatrix} = 2im \begin{bmatrix} \psi_+ \\ \psi_0 \\ \psi_0 \\ \psi_- \end{bmatrix}. \tag{3.93}
\end{aligned}$$

Denklem (3.93) matris eşitliğinden dört denklem elde edilir:

$$-2mi\psi_+ + 2\left(\frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{\partial}{\partial x^1}\right)\psi_0 = 0, \tag{3.94}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^0} - \Gamma_{001} + \frac{\partial}{\partial x^1} + \Gamma_{101}\right)\psi_+ - 2mi\psi_0 + \left(\frac{\partial}{\partial x^0} + \Gamma_{001} - \frac{\partial}{\partial x^1} + \Gamma_{101}\right)\psi_- = 0, \quad (3.95)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^0} - \Gamma_{001} + \frac{\partial}{\partial x^1} + \Gamma_{101}\right)\psi_+ - 2mi\psi_0 + \left(\frac{\partial}{\partial x^0} + \Gamma_{001} - \frac{\partial}{\partial x^1} + \Gamma_{101}\right)\psi_- = 0, \quad (3.96)$$

$$2\left(\frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{\partial}{\partial x^1}\right)\psi_0 - 2mi\psi_- = 0. \quad (3.97)$$

Denklem (3.95)'ten

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^0} + \Gamma_{101}\right)(\psi_+ + \psi_-) + \left(\frac{\partial}{\partial x^1} + \Gamma_{001}\right)(\psi_+ - \psi_-) - 4mi\psi_0 = 0 \quad (3.98)$$

elde edilir. Denklem (3.94) ve denklem (3.97) toplandığında

$$2\frac{\partial}{\partial x^0} = im(\psi_+ + \psi_-), \quad (3.99)$$

ve denklem (3.94)'den denklem (3.97) çıkartıldığında

$$-2\frac{\partial}{\partial x^0} = 2m(\psi_+ - \psi_-), \quad (3.100)$$

elde edilir.

Denklem (3.98), (3.99) ve (3.100) düzenlendiğinde Proca denklemi elde edilir. DKP denkleminin serbest alanlar için çözümü Proca denkleminin çözümüne eşdeğer olmaktadır:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^0} + \Gamma_{101}\right)\left(\frac{\psi_+ - \psi_-}{-im}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x^1} + \Gamma_{001}\right)\left(\frac{2i\psi_0}{-im}\right) = (\psi_+ + \psi_-), \quad (3.101)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^0} (\psi_+ + \psi_-) = -m^2 i \left(\frac{\psi_+ - \psi_-}{m} \right), \quad (3.102)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^1} (\psi_+ + \psi_-) = -m^2 \left(\frac{2i\psi_0}{-im} \right), \quad (3.103)$$

$$\Gamma_{101} = -\frac{1}{\det e^{-1}} \frac{\partial \det e^{-1}}{\partial x^0}, \quad (3.104)$$

$$\Gamma_{001} = -\frac{1}{\det e^{-1}} \frac{\partial \det e^{-1}}{\partial x^1}. \quad (3.105)$$

Denklem (3.104) ve denklem (3.105) toplanıp, denklem (3.101)'de yerine yazıldığında

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \left[\frac{(\psi_+ - \psi_-)}{-im \det e} \right] - \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{-2\psi_0}{m \det e} \right) = \frac{(\psi_+ + \psi_-)}{\det e} \quad (3.106)$$

elde edilir. Denklem (3.102) ve denklem (3.103) düzenlendiğinde

$$e_0^{\hat{0}} \frac{\partial}{\partial x^0} \det e F^{\hat{0}\hat{1}} = m^2 e_1^{\hat{1}} A^{\hat{1}}, \quad (3.107)$$

$$e_1^{\hat{1}} \frac{\partial}{\partial x^1} (-\det e F^{\hat{0}\hat{1}}) = m^2 e_0^{\hat{0}} A^{\hat{0}} \quad (3.108)$$

elde edilir. Burada kısmi Minkowski koordinatları $(\hat{0}, \hat{1})$ şeklinde gösterilir ve aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \det e \ F^{\hat{0}\hat{1}} = m^2 \det e \ A^{\hat{1}} , \quad (3.109)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^1} (-\det e \ F^{\hat{0}\hat{1}}) = m^2 \det e \ A^{\hat{0}} , \quad (3.110)$$

$$A^{\hat{0}} = \left(\frac{-2\psi_0}{m \det e} \right) , \quad A^{\hat{1}} = \left(\frac{\psi_+ - \psi_-}{i m \det e} \right) , \quad (3.111)$$

$$A_{\hat{0}} = \left(\frac{-2\psi_0}{m \det e} \right) = A^{\hat{0}} , \quad A_{\hat{1}} = \left(\frac{\psi_+ - \psi_-}{-i m \det e} \right) = -A^{\hat{1}} , \quad (3.112)$$

$$F_{\hat{0}\hat{1}} = -F^{\hat{0}\hat{1}} = \frac{\partial A_{\hat{1}}}{\partial x^0} - \frac{\partial A_{\hat{0}}}{\partial x^1} = \frac{(\psi_+ + \psi_-)}{\det e} , \quad (3.113)$$

$$F_{\mu\nu} = F_{01} = e_0^{\hat{0}} e_1^{\hat{1}} F_{\hat{0}\hat{1}} = \frac{(\psi_+ + \psi_-)}{(\det e)^2} , \quad (3.114)$$

$$A_\mu = (e_0^{\hat{0}} A_{\hat{0}}, e_1^{\hat{1}} A_{\hat{1}}) = \left[e_0^{\hat{0}} \left(\frac{-2\psi_0}{m \det e} \right) , e_1^{\hat{1}} \left(\frac{\psi_+ - \psi_-}{-i m \det e} \right) \right] . \quad (3.115)$$

Yöntemin anlaşılması için ele alınan bu çalışmada DKP denklemi (1+1) boyutta ele alınmıştır. Bu çalışmada ayrıca DKP denkleminin Proca denklemine eşdeğerliliği de verilmiştir



4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Çizgi Elemanının Seçimi

Eğri uzay zamanda her evren modeli, o evrenin özelliklerini belirten çizgi elemanları ile betimlenir. Bu çizgi elemanı kullanılarak, bir parçacığın, tanımlanan evrendeki davranışının betimlenmesi için parçacığın dinamiğini veren denklemin çözümleri aranır. Bu çalışmada, DKP denklemi çözülürken

$$ds^2 = -C_1^2 dt^2 + C_2^2 dx^2 \quad (4.1)$$

metriği göz önüne alınmaktadır.

4.2. Çizgi Elemanına Ait Katsayıların Hesabı

4.2.1. Metrik Tensör ve Metrik Tensörün Tersi

(4.1)'de ele alınan bu çizgi elemanı için metrik tensör

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -C_1^2 & 0 \\ 0 & C_2^2 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

biçimindedir. Denklem (4.2)'deki metrik tensörün determinanı

$$\det g_{\mu\nu} = -C_1^2 C_2^2 \quad (4.3)$$

biçimindedir. Metrik tensörün tersi, $g^{\mu\nu}$ ise

$$g^{\mu\nu} = \frac{\text{cofac} g_{\mu\nu}}{\det g_{\mu\nu}} \quad (4.4)$$

ifadesi ile hesaplanır:

$$cofacg_{00} = C_2^2 , \quad (4.5)$$

$$cofacg_{01} = 0 , \quad (4.6)$$

$$cofacg_{10} = 0 , \quad (4.7)$$

$$cofacg_{11} = C_1^2 \quad (4.8)$$

olmak üzere denklem (4.4) kullanılarak metrik tensörün tersi aşağıdaki biçimde hesaplanır:

$$g^{00} = \frac{cofacg_{00}}{detg_{\mu\nu}} = -\frac{1}{C_1^2} , \quad (4.9)$$

$$g^{01} = \frac{cofacg_{01}}{detg_{\mu\nu}} = -\frac{0}{-C_1^2 C_2^2} = 0 , \quad (4.10)$$

$$g^{10} = \frac{cofacg_{10}}{detg_{\mu\nu}} = -\frac{0}{-C_1^2 C_2^2} = 0 , \quad (4.11)$$

$$g^{11} = \frac{cofacg_{11}}{detg_{\mu\nu}} = -\frac{1}{C_2^2} . \quad (4.12)$$

Buna göre metrik tensörün tersinin matris gösterimi aşağıdaki biçimde yazılır:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2^2} \end{pmatrix} . \quad (4.13)$$

Eğri uzay-zaman ile düz uzay- zaman arasındaki ilişki iki ayaklar (diadlar) aracılığı ile sağlanır. Bu iki ayaklar ile eğri uzay- zamanda yazılan denklemler düz-uzay zamana taşınır:

$$g^{\mu\nu} = e_{(i)}^{\mu}(x)e_{(j)}^{\nu}(x)\eta^{(i)(j)}. \quad (4.14)$$

Burda parantez içindeki ifadeler düz uzayı temsil etmektedir. η düz uzay metriğinin seçimi aşağıdaki gibi alınır:

$$\eta^{(i)(j)} = (-1,1), \quad (4.15)$$

Denklem (4.14)'te $\mu = \nu = 0$ seçimi yapıldığında

$$g^{00} = (e_{(0)}^0)^2(-1), \quad (4.16)$$

$$e_{(0)}^0 = \frac{1}{C_1}. \quad (4.17)$$

$\mu = 0$, $\nu = 1$ ve $\mu = 1$, $\nu = 0$ durumları için

$$g^{01} = g^{10} = 0, \quad (4.18)$$

aynı biçimde

$\mu = 1$, $\nu = 1$ için

$$g^{11} = (e_{(1)}^1)^2, \quad (4.19)$$

$$e_{(1)}^1 = \frac{1}{C_2} \quad (4.20)$$

elde edilir. Elde edilen iki ayakların matris gösterimi

$$e_{(i)}^\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

biçimindedir. Denklem (4.21)'deki matrisin tersi

$$e_\mu^{(i)} = \frac{\text{cofac}_{(i)}^\mu}{\det_{(i)}^\mu} \quad (4.22)$$

denklem (4.22) ile hesaplanır. Daha önce $g_{\mu\nu}$ metrik tensörün tersi hesaplanırken yapılan işlemler sonucunda iki ayakların tersinin matris biçimindeki gösterimi aşağıdaki gibi yazılır:

$$e_\mu^{(i)} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Eğri uzay-zaman geometrisi ile ilgili bilgi içeren Christoffel sembolleri

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) \quad (4.24)$$

ile ifade edilir. İlk önce α, β 'ya sıfır verildiğinde denklem (4.24)

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_\mu g_{0\nu} + \partial_\nu g_{0\mu} - \partial_0 g_{\mu\nu}) \quad (4.25)$$

biçiminde yazılır. Denklem (4.25)'te $\mu = 0$ ve $\nu = 0$ durumları için

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}) \quad (4.26)$$

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{\dot{C}_1}{C_1} \quad (4.27)$$

bulunur. Denklem (4.27)'de $\dot{C}_1$ zamana göre türev olarak tanımlanmıştır. Aynı şekilde $\mu = 0$, $\nu = 1$ durumları için

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_0 g_{01} + \partial_1 g_{00} - \partial_0 g_{01}) \quad (4.28)$$

elde edilir. Christoffel sembolleri simetrik olma özelliğinden dolayı

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{\dot{C}_1}{C_1} \quad (4.29)$$

biçiminde gösterilir. Burda $\dot{C}_1$ konuma göre türev olarak tanımlanmıştır. $\mu = 1$, $\nu = 1$ durumları için Christoffel sembolleri

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_0 g_{01} + \partial_1 g_{01} - \partial_0 g_{11}) , \quad (4.30)$$

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{C_2 \dot{C}_2}{C_1^2} \quad (4.31)$$

biçiminde yazılır. Bulunan değerlerin matris biçiminde yazılımı aşağıdaki gibidir.

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \begin{pmatrix} \frac{\dot{C}_1}{C_1} & \frac{\dot{C}_1}{C_1} \\ \frac{\dot{C}_1}{C_1} & \frac{C_2 \dot{C}_2}{C_1^2} \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

İkinci olarak $\alpha, \beta = 1$ durumları için

$$\Gamma_{\mu\nu}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_\mu g_{1\nu} + \partial_\nu g_{1\mu} - \partial_1 g_{\mu\nu}) \quad (4.33)$$

biçiminde yazılır. Aynı işlemler uygulanır ve $\mu = 0, \nu = 0$ alındığında

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_0 g_{10} + \partial_0 g_{10} - \partial_1 g_{00}) \quad (4.34)$$

bulunur. Denklem (4.34)'de metrik tensörler yerine konulduğunda

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{C_1 \dot{C}_1}{C_2^2} \quad (4.35)$$

elde edilir.

$\mu = 0, \nu = 1$ alındığında

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_0 g_{11} + \partial_1 g_{10} - \partial_1 g_{01}), \quad (4.36)$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{C}_2}{C_2}, \quad (4.37)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}), \quad (4.38)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\dot{C}_2}{C_2} \quad (4.39)$$

şeklinde bulunan Christoffel sembolleri matris biçiminde yazıldığında

$$\Gamma_{\mu\nu}^1 = \begin{pmatrix} \frac{C_1 \dot{C}_2}{C_2^2} & \frac{\dot{C}_2}{C_2} \\ \frac{\dot{C}_2}{C_2} & \frac{\dot{C}_2}{C_2} \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

elde edilir. Christoffel sembolleri ile spin bağlantı katsayıları arasındaki bağıntı

$$\Gamma_\lambda = -\frac{1}{8} g_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (4.41)$$

biçimindedir. Spin bağlantı katsayıları aşağıdaki gibi hesaplanır. Denklem (4.41)'de $\lambda=0$ değeri verildiğinde

$$\Gamma_0 = -\frac{1}{8} g_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu 0}^\alpha [\gamma^\mu, \gamma^\nu] , \quad (4.42)$$

$$\Gamma_0 = -\frac{1}{8} (g_{\mu 0} \Gamma_{\nu 0}^0 [\gamma^\mu, \gamma^\nu] + g_{\mu 1} \Gamma_{\nu 0}^1 [\gamma^\mu, \gamma^\nu]) \quad (4.43)$$

bulunur. $\mu = 0, \nu = 0$ alındığında

$$\Gamma_0 = \frac{C_1 \dot{C}_2}{2} \gamma^0 \gamma^1 \quad (4.44)$$

elde edilir. Denklem (4.41)'de $\lambda = 1$ durumu için

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{8}g_{\mu\alpha}\Gamma_{\nu 1}^\alpha[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad (4.45)$$

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{8}(g_{\mu 0}\Gamma_{\nu 1}^0[\gamma^\mu, \gamma^\nu] + g_{\mu 1}\Gamma_{\nu 1}^1[\gamma^\mu, \gamma^\nu]) \quad (4.46)$$

elde edilir. Denklem (4.46), $\mu = 0, \nu = 0$ değeri için

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{8}(g_{00}\Gamma_{11}^0[\gamma^0, \gamma^1] + g_{11}\Gamma_{\nu 0}^1[\gamma^1, \gamma^0]) \quad (4.47)$$

biçimindedir. Bu işlem sonucunda Γ_1 aşağıdaki gibi yazılır:

$$\Gamma_1 = \frac{C_2 \dot{C}_2}{2} \gamma^0 \gamma^1. \quad (4.48)$$

Eğri uzay-zamanda ifade edilen Dirac matrisleri ile düz uzay zaman matrisleri arasındaki ilişki aşağıdaki biçimde gösterilir:

$$\gamma^\mu = e_{(i)}^\mu \gamma^{(i)}. \quad (4.49)$$

$e_{(i)}^\mu$ daha önce bahsedildiği gibi düz uzay-zaman ile eğri uzay-zaman arasındaki ilişki sağlayan matristir. İki ayaklar yardımıyla eğri uzay-zamandaki Dirac matrisleri

$$\gamma^0 = e_{(0)}^0 \gamma^{(0)}, \quad (4.50)$$

$$\gamma^0 = \frac{1}{c_1} \gamma^{(0)}, \quad (4.51)$$

$$\gamma^1 = e_{(1)}^1 \gamma^{(1)}, \quad (4.52)$$

$$\gamma^1 = \frac{1}{c_2} \gamma^{(1)} \quad (4.53)$$

biçimindedir. Buna göre spin bağlantı katsayılarını düz-uzay zamanda Dirac matrisleri cinsinden aşağıdaki biçimde yazılır:

$$\Gamma_0 = \frac{\dot{C}_1}{2C_2} \gamma^{(0)} \gamma^{(1)}, \quad (4.54)$$

$$\Gamma_1 = \frac{\dot{C}_2}{2C_1} \gamma^{(0)} \gamma^{(1)}. \quad (4.55)$$

4.3. Eğri Uzay-Zamanda (1+1) Boyutta Dirac Denkleminin İndirgenmesi

Spin 1 / 2' li parçacıkları betimleyen Dirac denklemi eğri uzay-zamanda aşağıdaki gibi yazılır:

$$[i\gamma^\mu (\partial_\mu - \Gamma_\mu + ieA_\mu) + m]\varphi(t, x) = 0. \quad (4.56)$$

Denklem (4.56)'nın her iki tarafı $(-i)$ ile çarpıldığında

$$[\gamma^\mu (\partial_\mu - \Gamma_\mu + ieA_\mu) - im]\varphi(t, x) = 0 \quad (4.57)$$

elde edilir. Denklem (4.49)'daki düz Minkowski uzay-zaman ilişkisi denklem (4.57)'de yerine yazıldığında

$$[e_{(i)}^\mu \gamma^{(i)} (\partial_\mu - \Gamma_\mu + ieA_\mu) - im]\varphi(t, x) = 0 \quad (4.58)$$

elde edilir. (1+1) boyutlu Dirac denkleminin açık hali aşağıdaki gibi yazılır:

$$[e_{(0)}^0 \gamma^{(0)} (\partial_0 - \Gamma_0 + ieA_0) + e_{(1)}^1 \gamma^{(1)} (\partial_1 - \Gamma_1 + ieA_1) - im] \varphi(t, x) = 0. \quad (4.59)$$

Dirac denkleminin denklem (4.1)'deki çizgi elemanına göre çözümü için denklem (4.21)'de yazılan iki ayaklar, denklem (4.59)'da yazıldığında

$$\left(\frac{1}{C_1} \gamma^{(0)} \partial_0 - \frac{1}{C_1} \gamma^{(0)} \Gamma_0 + \frac{1}{C_1} \gamma^{(0)} ieA_0 + \frac{1}{C_2} \gamma^{(1)} \partial_1 - \frac{1}{C_2} \gamma^{(1)} \Gamma_1 + \frac{1}{C_2} \gamma^{(1)} ieA_1 - im \right) \varphi(t, x) = 0 \quad (4.60)$$

elde edilir. Dirac matrislerinin Pauli matrisleri cinsinden seçimi aşağıdaki biçimdedir:

$$\gamma^{(0)} = i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.61)$$

$$\gamma^{(1)} = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.62)$$

Bölüm 4.2'de hesaplanan spin bağlantı katsayıları denklem (4.60)'da yerine yazılıp aynı zamanda $\gamma^{(0)}$ ile çarpılıp düzenlendiğinde

$$\left[\frac{1}{C_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_0 - \frac{C_1}{2C_1 C_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{C_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ieA_0 + \frac{1}{C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_x - \frac{C_2}{2C_1 C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ieA_1 - im \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

elde edilir. Gerekli ara işlemlerden sonra Dirac denklemi bağlaşımlı iki denkleme indirgenir:

$$\left(-\frac{\partial_t}{C_1} + \frac{\dot{C}_1}{2C_1C_2} - \frac{ieA_0}{C_1} + \frac{\partial_x}{C_2} - \frac{\dot{C}_2}{2C_1C_2} + \frac{ieA_1}{C_2}\right)\psi_1 - im\psi_2 = 0, \quad (4.64)$$

$$im\psi_1 + \left(-\frac{\partial_t}{C_1} + \frac{\dot{C}_1}{2C_1C_2} - \frac{ieA_0}{C_1} + \frac{\partial_x}{C_2} - \frac{\dot{C}_2}{2C_1C_2} + \frac{ieA_1}{C_2}\right)\psi_2 = 0. \quad (4.65)$$

Denklem (4.64)'ten ψ_2 , ψ_1 cinsinden yazılır:

$$\psi_2 = \frac{1}{im} \left(-\frac{\partial_t}{C_1} + \frac{\dot{C}_1}{2C_1C_2} - \frac{ieA_0}{C_1} + \frac{\partial_x}{C_2} - \frac{\dot{C}_2}{2C_1C_2} + \frac{ieA_1}{C_2}\right)\psi_1. \quad (4.66)$$

Denklem (4.66), denklem (4.65)'te yerine yazıldığında elde edilen denklem genel bir denklemdir. Bu denklem bundan sonra yapılan tüm işlemlerde kullanılabilir.

$$m^2\psi_1 + \left(-\frac{\partial_t}{C_1} - \frac{\dot{C}_1}{2C_1C_2} - \frac{ieA_0}{C_1} - \frac{\partial_x}{C_2} - \frac{\dot{C}_2}{2C_1C_2} - \frac{ieA_1}{C_2}\right) \left(-\frac{\partial_t}{C_1} + \frac{\dot{C}_1}{2C_1C_2} - \frac{ieA_0}{C_1} + \frac{\partial_x}{C_2} - \frac{\dot{C}_2}{2C_1C_2} + \frac{ieA_1}{C_2}\right)\psi_1 = 0. \quad (4.67)$$

4.3.1. $ds^2 = -dt^2 + \cosh^2(Ht)dx^2$ Metriği İçin Eğri Uzay-Zamanda (1+1) Boyutta Dirac Denkleminin Çözümü

Denklem (4.67)'de bulunan genel eşitlikte çizgi elemanları ve vektör potansiyel aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} C_1 &= 1, & C_2 &= \cosh(Ht), \\ A_0 &= 0, \\ A_1 &= -\frac{E}{H} \sinh(Ht). \end{aligned} \quad (4.68)$$

$R = 2H^2$ Eğrilik yarıçapı Hubble (genişleme) sabiti ilişkisi,

Dalga fonksiyonu ψ_1

$$\psi_1(t, x) = e^{ikx} \varphi(t) \quad (4.69)$$

biçiminde yazılır. Denklem (4.68) ve denklem (4.69) denklem (4.67)'deki genel denklemde yerine yazıldığında

$$\left[-\partial_t - ik \operatorname{sech}(Ht) - \frac{H}{2} \tanh(Ht) + \frac{ieE}{h} \tanh(Ht) \right] \left[-\partial_t + ik \operatorname{sech}(Ht) - \frac{H}{2} \tanh(Ht) - \frac{ieE}{h} \tanh(Ht) \right] \varphi(t) = 0 \quad (4.70)$$

elde edilir. Denklem (4.70) düzenlenip aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + H \tanh(Ht) \frac{d\varphi}{dt} + \left[\left(\frac{H^2}{4} + \frac{e^2 E^2}{H^2} - m^2 \right) + \left(\frac{H^2}{4} + ieE + k^2 - \frac{e^2 E^2}{H^2} \right) \operatorname{sech}^2(Ht) + \left(-\frac{2keE}{H} + ikH \right) \operatorname{sech}(Ht) \tanh(Ht) \right] \varphi(t) = 0. \quad (4.71)$$

Bu denklemde (Kim and Page, 2009)

$$\varphi(t) = \frac{\phi(t)}{\sqrt{\cosh(Ht)}} \quad (4.72)$$

dönüşümü yapılır ve bu dönüşümün birinci ve ikinci türevleri alınır. Denklem (4.72)'deki dönüşümün birinci ve ikinci türevleri aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\phi}(t) \cosh^{-\frac{1}{2}}(Ht) - \frac{H}{2} \cosh^{-\frac{3}{2}}(Ht) \sinh(Ht) \phi(t), \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dt^2} = & \ddot{\phi}(t)\cosh^{-\frac{1}{2}}(Ht) - H\cosh^{-\frac{3}{2}}(Ht)\sinh(Ht)\dot{\phi}(t) \\ & + \frac{3H^2}{4}\cosh^{-\frac{5}{2}}(Ht)\sinh^2(Ht)\phi(t) - \frac{H^2}{2}\cosh^{-\frac{1}{2}}(Ht)\phi(t). \end{aligned} \quad (4.74)$$

Denklem (4.73) ve denklem (4.74)'de bulunan birinci ve ikinci türevler denklem (4.71)'de yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}(t) + \left[\frac{H^4}{4}\tanh^2(Ht) - \frac{H^2}{2} + k^2\text{sech}^2(Ht) + k^2\text{sech}^2(Ht) \right. \\ \left. + \frac{2keE}{H}\text{sech}(Ht)\tanh(Ht) + \frac{e^2E^2}{H^2}\tanh(Ht) + \frac{m^2}{4} \right] \phi(t) = 0 \end{aligned} \quad (4.75)$$

elde edilir.

$\tanh^2(Ht) = 1 - \text{sech}^2(Ht)$ eşitliği denklem (4.75)'te yerine yazılıp düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}(t) + \left[\left(\frac{e^2E^2}{H^2} - m^2 \right) + \left(ieE + k^2 - \frac{e^2E^2}{H^2} \right) \text{sech}^2(Ht) + \left(-\frac{2keE}{H} \right. \right. \\ \left. \left. + ikH \right) \text{sech}(Ht)\tanh(Ht) \right] \phi(t) = 0 \end{aligned} \quad (4.76)$$

elde edilir. Bu denklemde

$$\alpha^2 = \left(\frac{e^2E^2}{H^2} - m^2 \right), \quad (4.77)$$

$$\beta^2 = \left(ieE + k^2 - \frac{e^2E^2}{H^2} \right), \quad (4.78)$$

$$\gamma^2 = \left(-\frac{2keE}{H} + ikH \right) \quad (4.79)$$

biçiminde tanımlandığında denklem (4.76) aşağıdaki gibi yazılır:

$$\ddot{\phi} + [(\alpha^2 + \beta^2 \text{sech}^2(Ht) + \gamma^2 \text{sech}(Ht) \tanh(Ht))] \phi(t) = 0. \quad (4.80)$$

Bu denklemde (Kim and Page, 2009)

$$z = \frac{1 + i \sinh(Ht)}{2} \quad (4.81)$$

değişken değişirmesi yapıldığında

$$\frac{d}{dt} = \frac{dz}{dt} \frac{d}{dz},$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{iH}{2} (4z - 4z^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dz}, \quad (4.82)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{H^2}{8} (4 - 8z) \frac{d}{dz} - \frac{H^2}{4} (4z - 4z^2) \frac{d^2}{dz^2} \quad (4.83)$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadeler denklem (4.80)'de yerine yerleştirildiğinde aşağıdaki denklem elde edilir:

$$z(1-z) \frac{d^2 \phi}{dz^2} + \frac{(1-2z)}{2} \frac{d}{dz} + \left[-\frac{\alpha^2}{H^2} - \frac{\beta^2}{4H^2 z(1-z)} - \frac{i\gamma^2(1-2z)}{4H^2 z(1-z)} \right] \phi(t) = 0. \quad (4.84)$$

Denklem (4.84)'deki dalga fonksiyonu

$$\phi(t) = z^\rho (1 - z)^\lambda f(z) \quad (4.85)$$

olarak yeniden tanımlanır. Dalga fonksiyonunun birinci türevi ve ikinci türevi

$$\frac{d\phi}{dt} = z^\rho (1 - z)^\lambda \left[\frac{\rho}{z} f(z) - \frac{\lambda}{1 - z} f(z) + \frac{df}{dz} \right] \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dz^2} = z^\rho (1 - z)^\lambda & \left[\frac{d^2f}{dz^2} + \left(\frac{2\rho}{z} - \frac{2\lambda}{1 - z} \right) \frac{df}{dz} + \left(\frac{\rho^2}{z^2} - \frac{2\rho\lambda}{z(1 - z)} + \frac{\lambda^2}{(1 - z)^2} f(z) \right) \right. \\ & \left. \frac{\rho}{z^2} f(z) - \frac{\lambda}{(1 - z)^2} f(z) \right] \end{aligned} \quad (4.87)$$

biçiminde hesaplanır. Denklem (4.86) ve (4.87) denklem (4.84)'te yerine yazıldığında aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \left\{ z(1 - z) \frac{d^2f}{dz^2} + \left[\left(2\rho + \frac{1}{2} \right) - z(2\rho + 2\lambda + 1) \right] \frac{df}{dz} + \left[\left(\overbrace{\rho^2 - \frac{\rho}{2} - \frac{\beta^2}{4H^2} - \frac{i\gamma^2}{4H^2}}^{I_1} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left(\overbrace{-2\rho^2 - 2\lambda\rho + \frac{\rho}{2} - \frac{\lambda}{2} - \frac{\alpha^2}{H^2} + \frac{i\alpha^2}{2H^2}}^{I_2} \right) z - \left(\overbrace{\rho^2 + 2\lambda\rho + \lambda^2 + \frac{\alpha^2}{H^2}}^{I_3} \right) \right] z^2 \left\{ \frac{f(z)}{z(1 - z)} = 0. \right. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Bu denklem aşağıdaki hipergeometrik denkleme benzemektedir (Abramowitz and stegun, 1974) :

$$z(1 - z) \frac{d^2f(z)}{dz^2} + [\gamma - (\mu + \nu + 1)z] \frac{df(z)}{dz} - \mu\nu f(z) = 0 \quad (4.89)$$

Denklem (4.88)'in denklem (4.89)'daki hipergeometrik diferansiyel denkleme benzemesi için $I_1 = 0$, $I_2 = -I_3$ ve $a.b = I_3$ olmalıdır. Denklem (4.88) denklem (4.89)'daki hipergeometrik diferansiyel denklem ile karşılaştırıldığında

$$\gamma = \left(2\rho + \frac{1}{2}\right) \quad (4.90)$$

bulunur. Diğer eşitlikler kullanılarak

$I_1 = 0$ 'dan

$$\rho^2 - \frac{\rho}{2} = \frac{\beta^2}{4H^2} + \frac{\gamma^2}{4H^2}, \quad (4.91)$$

ve

$I_2 = -I_3$ 'den

$$\lambda^2 - \frac{\lambda}{2} = \frac{i\gamma^2}{4H^2} \quad (4.92)$$

elde edilir.

$\mu\nu = I_3$ 'ten de

$$\left(\rho^2 + 2\lambda\rho + \lambda^2 + \frac{\alpha^2}{H^2}\right) = (\rho + \lambda + \varepsilon)(\rho + \lambda - \varepsilon)$$

bulunur. Yukarıda yapılan çarpımda

$$\varepsilon = i \frac{\alpha}{H} \quad (4.93)$$

olduğu görülmektedir. (4.77)'de tanımlanan α , (4.93)'te yerine yazıldığında

$$\varepsilon = \frac{i}{H} \underbrace{\left(\frac{e^2 E^2}{H^2} - m^2 \right)}_{\omega_0}^{\frac{1}{2}} \quad (4.94)$$

elde edilir. Daha önce denklem (4.78) ve denklem (4.79)'da tanımlanan β ve γ denklem (4.91)'de yerine yazıldığında

$$\rho^2 - \frac{\rho}{2} = \frac{1}{4H^2} \left[ieE + k^2 - \frac{e^2 E^2}{H^2} + \left(-\frac{2keE}{H} - kH \right) \right] \quad (4.95)$$

elde edilir. (4.95) denkleminin son hali aşağıdaki biçimde yazılır.

$$\rho^2 - \frac{\rho}{2} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{k}{H} - \frac{ieE}{H^2} \right)^2 + \left(\frac{ieE}{H^2} - \frac{k}{H} \right) \right]. \quad (4.96)$$

Denklem (4.96)'da

$$\left(\frac{k}{H} - \frac{ieE}{H^2} \right) = \delta \quad (4.97)$$

Tanımlanırsa

$$\rho^2 - \frac{\rho}{2} = \frac{1}{4} \left[\underbrace{\left(\frac{k}{H} - \frac{ieE}{H^2} \right)^2}_{\delta^2} + \underbrace{\left(\frac{ieE}{H^2} - \frac{k}{H} \right)}_{-\delta} \right] \quad (4.98)$$

biçiminde yazılır. $\rho = \frac{n}{2}$ alınıp denklem (4.98)'de yerine yazıldığında ikinci dereceden bir denklem elde edilir.

$$n^2 - n - \delta(\delta - 1) = 0 \quad (4.99)$$

Bu denklemin çarpanlarından biri aşağıda yazıldığı gibidir:

$$n = \frac{k}{H} - \frac{ieE}{H^2} . \quad (4.100)$$

$\mu, \nu = I_3$ çarpımında çarpanlar

$$\mu = \rho + \lambda - \varepsilon , \quad (4.101)$$

$$\nu = \rho + \lambda + \varepsilon \quad (4.102)$$

biçimindedir. Yapılan işlemler sonucunda λ 'nın ρ 'nun eşleniği olduğu görülür. Buna göre denklem (4.101)'de λ ve ρ yerine yazıldığında

$$\mu = \frac{n}{2} + \frac{n^*}{2} - \frac{i}{H} \underbrace{\left(\frac{e^2 E^2}{H^2} - m^2 \right)}_{\omega_0^2}^{\frac{1}{2}} \quad (4.103)$$

elde edilir. n ve n^* 'nin eşleniği yerine yerleştirilip ara işlemler sonucunda

$$\mu = \frac{k}{H} - \frac{i\omega_0}{H} , \quad (4.104)$$

$$\nu = \frac{k}{H} + \frac{i\omega_0}{H} , \quad (4.105)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} + \frac{k}{H} - \frac{ieE}{H^2} \quad (4.106)$$

biçiminde bulunur. (4.88) denkleminin genel çözümü aşağıda yazıldığı gibidir:

$$\phi(t) = z^{\frac{n}{2}}(1-z)^{\frac{n^*}{2}} \left[C_1 {}_2F_1(\mu, \nu, \gamma; z) + C_2 z^{1-\gamma} {}_2F_1(\mu - \gamma + 1, \nu - \gamma + 1; 2 - \gamma; z) \right]. \quad (4.107)$$

Burada C_1 ve C_2 boylandırma sabitleridir. Hipergeometrik fonksiyon açısından iki lineer bağımsız çözüm ifade edilebilir.

4.3.2. Spin $-\frac{1}{2}$ Parçacık Yaratılması

Denklem (4.107) zamana bağımlı olduğundan parçacık oluşumuna neden olmaktadır:

$$\phi_k^{(1)}(t) = z^{\frac{n}{2}}(1-z)^{\frac{n^*}{2}} C_1 {}_2F_1(\mu, \nu, \gamma; z), \quad (4.108)$$

$$\phi_k^{(2)}(t) = z^{\frac{n}{2}}(1-z)^{\frac{n^*}{2}} C_2 z^{1-\gamma} {}_2F_1(\mu - \gamma + 1, \nu - \gamma + 1; 2 - \gamma; z) \quad (4.109)$$

Hipergeometrik fonksiyon dönüşüm özelliklerinden (Abramowitz and Stegun, 1974) $z \rightarrow \infty$ iken asimtotik davranışı

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b, c; z) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} {}_2F_1(a, a+1-c, a+1-b; \frac{1}{z}) \\ &+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-z)^{-b} {}_2F_1(b, b+1-c, b+1-a; \frac{1}{z}) \end{aligned} \quad (4.110)$$

biçiminde verilir. (4.108) denkleminin (4.110) denklemine göre açılımı yapıldığında

$$\begin{aligned} \phi_k^{(1)}(t) = z^{\frac{n}{2}}(1-z)^{\frac{n^*}{2}} C_1 \left[\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\nu-\mu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\gamma-\mu)} (-z)^{-\mu} {}_2F_1\left(\mu, \mu+1-\gamma, \mu+1-\nu; \frac{1}{z}\right) \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\mu-\nu)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\gamma-\nu)} (-z)^{-\nu} {}_2F_1\left(\nu, \nu+1-\gamma, \nu+1-\mu; \frac{1}{z}\right) \right] \quad (4.111) \end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Denklem (4.109) denklem (4.110)'a göre açıldığında

$$\begin{aligned} \phi_k^{(2)}(t) = z^{\frac{n}{2}}(1-z)^{\frac{n^*}{2}} C_2 \left[\underbrace{\frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\nu-\mu)}{\Gamma(\nu-\gamma+1)\Gamma(1-\mu)}}_{\alpha_K} (-z)^{-\mu} {}_2F_1\left(\mu-\gamma+1, \mu, \mu+1-\nu; \frac{1}{z}\right) \right. \\ \left. + \underbrace{\frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\mu-\nu)}{\Gamma(\mu-\gamma+1)\Gamma(1-\nu)}}_{\beta_K} (-z)^{-\nu} {}_2F_1\left(\nu-\gamma+1, \nu, \nu+1-\mu; \frac{1}{z}\right) \right] \quad (4.112) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemde α_K ve β_K Bogoliubov katsayılarıdır.

$$\alpha_K = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\nu-\mu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\gamma-\mu)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{H} - \frac{ieE}{H^2}\right) \Gamma\left(\frac{2i\omega_0}{H}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{H} + \frac{i\omega_0}{H}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{ieE}{H^2} + \frac{i\omega_0}{H}\right)}, \quad (4.113)$$

$$\beta_K = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\mu-\nu)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\gamma-\nu)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{H} - \frac{ieE}{H^2}\right) \Gamma\left(-\frac{2i\omega_0}{H}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{H} - \frac{i\omega_0}{H}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{ieE}{H^2} - \frac{i\omega_0}{H}\right)}, \quad (4.114)$$

Denklem (4.113) ve denklem (4.114)'ü oranladığımızda

$$\frac{\alpha_K}{\beta_K} = \frac{\Gamma\left(\frac{2i\omega_0}{H}\right) \Gamma\left(\frac{k}{H} - \frac{i\omega_0}{H}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{ieE}{H^2} - \frac{i\omega_0}{H}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{H} + \frac{i\omega_0}{H}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{ieE}{H^2} + \frac{i\omega_0}{H}\right) \Gamma\left(-\frac{2i\omega_0}{H}\right)} \quad (4.115)$$

elde edilir. Gama fonksiyonlarının dönüşüm özellikleri aşağıda yazıldığı gibidir (Abramowitz, Stegun, 1974):

$$|\Gamma(i\sigma)|^2 = \frac{\pi}{\sigma \sinh(\pi\sigma)}, \quad (4.116)$$

$$|\Gamma(1 + i\sigma)|^2 = \frac{\pi\sigma}{\sinh(\pi\sigma)}, \quad (4.117)$$

$$\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\sigma\right) \right|^2 = \frac{\pi}{\cosh(\pi\sigma)}. \quad (4.118)$$

Denklem (4.113) ve denklem (4.114)'ten elde edilen denklem (4.115), gama fonksiyonlarının dönüşüm özelliğine göre düzenlendiğinde

$$\frac{|\alpha_K|^2}{|\beta_K|^2} = \frac{\left| \Gamma\left(\frac{2i\omega_0}{H}\right) \right|^2 \left| \Gamma\left(\frac{ik_x}{H} - \frac{i\omega_0}{H}\right) \right|^2 \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{ieE}{H^2} - \frac{i\omega_0}{H}\right) \right|^2}{\left| \Gamma\left(\frac{ik_x}{H} + \frac{i\omega_0}{H}\right) \right|^2 \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{ieE}{H^2} + \frac{i\omega_0}{H}\right) \right|^2 \left| \Gamma\left(-\frac{2i\omega_0}{H}\right) \right|^2} \quad (4.119)$$

biçiminde yazılır. Denklem (4.119)'da denklem (4.116) ve denklem (4.118)'deki gama fonksiyonları kullanıldığında $|\alpha_K|^2$ ve $|\beta_K|^2$ oranı aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{|\alpha_K|^2}{|\beta_K|^2} = \frac{\sinh\pi\left(\frac{k_x}{H} + \frac{\omega_0}{H}\right) \cosh\pi\left(-\frac{eE}{H^2} + \frac{\omega_0}{H}\right)}{\left(\frac{k_x}{H} - \frac{\omega_0}{H}\right) \sinh\pi\left(\frac{k_x}{H} + \frac{\omega_0}{H}\right) \cosh\pi\left(\frac{eE}{H^2} + \frac{\omega_0}{H}\right)} \quad (4.120)$$

Denklem (4.120)'nin daha sade bir ifade ile yazılımı için

$$\begin{cases} X = \frac{\pi\omega_0}{H} \\ Y = \frac{\pi eE}{H^2} \end{cases} \quad (4.121)$$

tanımlanması yapılır ve

$$\cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)$$

$$\sinh(a+b) = \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b)$$

özdeşlikleri ve denklem (4.121)'deki tanımlamalar denklem (4.120)'de kullanıldığında

$$\frac{|\alpha_K|^2}{|\beta_K|^2} = \frac{\left(\frac{k_x}{H} + \frac{\omega_0}{H}\right) \sinh\left(\frac{\pi k_x}{H} + X\right) \cosh(X-Y)}{\left(\frac{k_x}{H} - \frac{\omega_0}{H}\right) \sinh\left(\frac{\pi k_x}{H} + \frac{\omega_0}{H}\right) \cosh(X+Y)} \quad (4.122)$$

bulunur. Dirac denklemi Fermi-Dirac istatistiğine uyar ve aşağıda yazılan normalizasyon koşulunu sağlar:

$$|\alpha_K|^2 + |\beta_K|^2 = 1. \quad (4.123)$$

Bogoliubov katsayıları için denklem (4.123)'teki normalizasyon koşulu kullanılarak aşağıdaki oran bulunur:

$$\left[\frac{|\alpha_K|^2}{|\beta_K|^2} + 1 \right]^{-1} = \left[\frac{\left(-\frac{k_x}{H} - \frac{\omega_0}{H}\right) \cosh(X-Y) + \left(\frac{k_x}{H} - \frac{\omega_0}{H}\right) \cosh(X+Y)}{\left(\frac{k_x}{H} - \frac{\omega_0}{H}\right) \cosh(X+Y)} \right] \quad (4.124)$$

$$|\beta_K|^2 = \frac{\left(\frac{k_x}{H} - \frac{\omega_0}{H}\right) \cosh(X+Y)}{\left(-\frac{k_x}{H} - \frac{\omega_0}{H}\right) \cosh(X-Y) + \left(\frac{k_x}{H} - \frac{\omega_0}{H}\right) \cosh(X-Y)} \quad (4.125)$$

Denklem (4.125)'deki $|\beta_K|^2 \sim n$ yaratılan parçacıkların sayı yoğunluğunu gösterir.

4.4. Eğri Uzay –Zamanda (1+1) Boyutta DKP Denkleminin İndirgenmesi

Eğri uzay–zamanda elektromanyetik alan içindeki spin-0 ve spin-1 parçacığını betimleyen DKP denklemi aşağıdaki biçimde verilir:

$$[i\beta^\mu(\partial_\mu - \Sigma_\mu + ieA_\mu) - m]\psi(t, x) = 0. \quad (4.126)$$

Denklemin her iki tarafı (i) ile bölüldüğünde denklem

$$[\beta^\mu(\partial_\mu - \Sigma_\mu + ieA_\mu) + im]\psi(t, x) = 0 \quad (4.127)$$

biçiminde yazılır. Burada β_μ Kemmer matrisleri, A_μ vektör potansiyeli, Σ_μ ise spin-1 bağlantı katsayısıdır. β_μ Kemmer matrisleri ve Σ_μ ise spin-1 bağlantı katsayısı

$$\beta^\mu = \gamma^\mu \otimes I + I \otimes \gamma^\mu, \quad (4.128)$$

$$\Sigma_\mu = \Gamma_\mu \otimes I + I \otimes \Gamma_\mu \quad (4.129)$$

biçiminde gösterilir. Denklem (4.127)'nin (1+1) boyutta açılımı

$$[\beta^0(\partial_0 - \Sigma_0 + ieA_0) + \beta^1(\partial_1 - \Sigma_1 + ieA_1) + im]\psi(t, x) = 0 \quad (4.130)$$

biçiminde yazılır. Düz Minkowski uzay-zaman ilişkisi aşağıdaki gibidir:

$$\beta^\mu(x) = e_{(i)}^\mu \beta^{(i)}. \quad (4.131)$$

(4.130) nolu denklem düzenlenip aşağıdaki biçimde yazılır:

$$[e_{(0)}^0 \beta^{(0)} (\partial_0 - \Sigma_0 + ieA_0) + e_{(1)}^1 \beta^{(1)} (\partial_1 - \Sigma_1 + ieA_1) + im] \psi(t, x) = 0 \quad (4.132)$$

Denklem (4.132)'deki Σ_μ , spin -1 parçacıkları için spin bağlantı katsayısıdır ve Γ_μ spin- $1/2$ parçacıkları cinsinden aşağıdaki gibi yazılır:

$$\Sigma_0 = \Gamma_0 \otimes I + I \otimes \Gamma_0, \quad (4.133)$$

$$\Sigma_0 = \frac{\dot{C}_1}{2C_2} (\gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)} \gamma^{(1)}) , \quad (4.134)$$

$$\Sigma_1 = \Gamma_1 \otimes I + I \otimes \Gamma_1 , \quad (4.135)$$

$$\Sigma_1 = \frac{\dot{C}_2}{2C_1} (\gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)} \gamma^{(1)}) . \quad (4.136)$$

İki ayaklar, spin bağlantı katsayıları kullanılarak denklem (4.132)'deki DKP denkleminin açık ifadesi

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{C_1} (\gamma^{(0)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)}) \partial_0 - \frac{\dot{C}_1}{2C_1 C_2} (\gamma^{(0)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)}) (\gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \otimes I + \right. \\ & \left. I \otimes \gamma^{(0)} \gamma^{(1)}) + \frac{1}{C_1} (\gamma^{(0)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)}) ieA_0 + \frac{1}{C_2} (\gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(1)}) \partial_1 \right. \\ & \left. - \frac{\dot{C}_2}{2C_1 C_2} (\gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(1)}) (\gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)} \gamma^{(1)}) + \frac{1}{C_2} (\gamma^{(1)} \otimes I + \right. \\ & \left. I \otimes \gamma^{(1)}) ieA_1 + im \right] \psi(t, x) = 0 \end{aligned} \quad (4.137)$$

biçiminde yazılır. Denklemin her iki tarafı $\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)}$ ile çarpıldığında

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{C_1} (\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)}) (\gamma^{(0)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)}) \partial_0 - \frac{C_1}{2C_1C_2} (\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)}) (\gamma^{(0)} \otimes I + \right. \\
& \quad I \otimes \gamma^{(0)}) (\gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)} \gamma^{(1)}) + \frac{1}{C_1} (\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)}) (\gamma^{(0)} \otimes I + \\
& \quad I \otimes \gamma^{(0)}) ieA_0 + \frac{1}{C_2} (\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)}) (\gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(1)}) \partial_1 - \\
& \quad \frac{C_2}{2C_1C_2} (\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)}) (\gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(1)}) (\gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)} \gamma^{(1)}) + \\
& \quad \left. \frac{1}{C_2} (\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)}) (\gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(1)}) ieA_1 + im (\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)}) \right] \psi(x, t) = 0
\end{aligned} \tag{4.138}$$

denklem (4.138) elde edilir. (1+1) boyutta Dirac matrisleri Pauli spin matrisleri cinsinden yazılır:

$$\gamma^{(0)} = i\sigma_z, \quad \gamma^{(1)} = \sigma_x, \tag{4.139}$$

$$\gamma^{(0)} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \gamma^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.140}$$

Bu seçim yapıldığında denklem (4.138)'te yer alan matrislerin açık biçimleri aşağıdaki yazıldığı gibidir:

$$\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{4.141}$$

$$\gamma^{(0)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)} = \begin{bmatrix} 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i \end{bmatrix}, \quad (4.142)$$

$$(\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)})(\gamma^{(0)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)}) = \begin{bmatrix} -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{bmatrix}, \quad (4.143)$$

$$\gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.144)$$

$$(\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)})(\gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.145)$$

$$\gamma^{(0)}\gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)}\gamma^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & i & i & 0 \\ -i & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & i \\ 0 & -i & -i & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.146)$$

$$(\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)})(\gamma^{(0)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)})(\gamma^{(0)}\gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)}\gamma^{(1)})$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.147)$$

$$\begin{aligned} & (\gamma^{(0)} \otimes \gamma^{(0)}) (\gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(1)}) (\gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \otimes I + I \otimes \gamma^{(0)} \gamma^{(1)}) \\ &= \begin{bmatrix} 2i & 0 & 0 & -2i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 0 & -2i \end{bmatrix}, \quad (4.148) \end{aligned}$$

Bulunan matrisler denklem (4.138)'e yerleştirildiğinde,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{C_1} \begin{bmatrix} -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{bmatrix} \partial_t - \frac{\dot{C}_1}{2C_1 C_2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. \frac{1}{C_1} \begin{bmatrix} -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{bmatrix} ieA_0 + \frac{1}{C_2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \partial_1 - \right. \\ & \left. \frac{\dot{C}_2}{2C_1 C_2} \begin{bmatrix} 2i & 0 & 0 & -2i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 0 & -2i \end{bmatrix} + \frac{1}{C_2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} ieA_1 + \right. \\ & \left. im \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.149) \end{aligned}$$

elde edilir. Denklem (4.149)'da dalga fonksiyonunun bileşenleri

$$\psi(t, x) = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} \quad (4.150)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra aşağıda yazılan dört denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{2i\partial_t}{C_1} + \frac{2eA_0}{C_1} - \frac{i\dot{C}_2}{C_1 C_2} - im \right) \psi_1 + \left(-\frac{\dot{C}_1}{C_1 C_2} - \frac{\partial_x}{C_2} - \frac{ieA_1}{C_2} \right) \psi_2 \\ & + \left(-\frac{\dot{C}_1}{C_1 C_2} - \frac{\partial_x}{C_2} - \frac{ieA_1}{C_2} \right) \psi_3 + i \frac{\dot{C}_2}{C_1 C_2} \psi_4 = 0 \quad , \end{aligned} \quad (4.151)$$

$$\left(\frac{\partial_x}{C_2} + \frac{ieA_1}{C_2} \right) \psi_1 + im\psi_2 + \left(\frac{\partial_x}{C_2} + \frac{ieA_1}{C_2} \right) \psi_4 = 0 \quad , \quad (4.152)$$

$$\left(\frac{\partial_x}{C_2} + \frac{ieA_1}{C_2} \right) \psi_1 + im\psi_3 + \left(\frac{\partial_x}{C_2} + \frac{ieA_1}{C_2} \right) \psi_4 = 0 \quad , \quad (4.153)$$

$$\begin{aligned} & -i \frac{\dot{C}_2}{C_1 C_2} \psi_1 + \left(-\frac{\dot{C}_1}{C_1 C_2} - \frac{\partial_x}{C_2} - \frac{ieA_1}{C_2} \right) \psi_2 + \left(-\frac{\dot{C}_1}{C_1 C_2} - \frac{\partial_x}{C_2} - \frac{ieA_1}{C_2} \right) \psi_3 + \\ & \left(2 \frac{i\partial_t}{C_1} - 2 \frac{eA_0}{C_1} + i \frac{\dot{C}_2}{C_1 C_2} - im \right) \psi_4 = 0 \quad . \end{aligned} \quad (4.154)$$

Denklem (4.152) ve denklem (4.153)'ten $\psi_2 = \psi_3$ olduğu görülmektedir.

Bu eşitlikten

$$-\frac{1}{im}\left(\frac{\partial_x}{C_2} + \frac{ieA_1}{C_2}\right)(\psi_1 + \psi_4) = \psi_2 \quad (4.155)$$

elde edilir. Denklem (4.151) ve denklem (4.154) kendi aralarında önce toplanır sonra çıkartılır. Elde edilen denklemler ara işlemlerden sonra aşağıdaki biçimde yazılır:

$$\begin{aligned} & \left\{ -\frac{2i}{C_1} \partial_t \left[\frac{1}{im} \left(-\frac{2i}{C_1} \partial_t + \frac{2eA_0}{C_1} \right) \right] + \frac{2eA_0}{C_1} \left[\frac{1}{im} \left(-\frac{2i}{C_1} \partial_t + \frac{2eA_0}{C_1} \right) \right] \right. \\ & - \frac{2i\dot{C}_2}{C_1 C_2} \left[\frac{1}{im} \left(-\frac{2i}{C_1} \partial_t + \frac{2eA_0}{C_1} \right) \right] - im + 4 \left(-\frac{\dot{C}_1}{C_1 C_2} - \frac{\partial_1}{C_2} \right. \\ & \left. \left. - \frac{ieA_1}{C_2} \right) \left[-\frac{1}{im} \left(\frac{\partial_1}{C_2} + \frac{ieA_1}{C_2} \right) \right] \right\} (\psi_1 + \psi_4) = 0 . \end{aligned} \quad (4.156)$$

Denklem (4.156) genel bir denklemdir. Bu denklem bundan sonra yapılan tüm işlemlerde kullanılabilir.

4.4.1. $ds^2 = -dt^2 + \cosh^2(Ht)dx^2$ Metriği İçin Eğri Uzay-Zamanda (1+1) Boyutta DKP Denkleminin Çözümü

$$C_1 = 1 , C_2 = \cosh(Ht) \quad (4.157)$$

$$A_1 = -\frac{E}{H} \sinh(Ht) \quad (4.158)$$

$$A_0 = 0 \text{ alındığında } \dot{C}_1 = 0 \text{ olur.} \quad (4.159)$$

Daha önceki bölümlerde bahsedildiği gibi $\dot{\mathcal{C}}$ = Zamana göre türevi , $\hat{\mathcal{C}}$ = Konuma göre türevi ifade etmektedir.

Gerekli işlemler yapıldığında denklem (4.156) aşağıdaki biçimde yazılmaktadır:

$$\left[\partial_t^2 + \frac{c_2}{c_2} \partial_t - 4 \left(\frac{\partial_x^2}{c_2^2} + 2 \frac{ieA_1 \partial_x}{c_2^2} - \frac{e^2 A_1^2}{c_2^2} \right) + \frac{m^2}{4} \right] (\psi_1 + \psi_4) = 0 \quad (4.160)$$

(4.160) denkleminde dalga fonksiyonu

$$(\psi_1 + \psi_4) = e^{ikx} \varphi(t) \quad (4.161)$$

olarak alınıp

$$C_2 = \cosh(Ht) .$$

$$A(t) = -\frac{E}{H} \sinh(Ht)$$

seçimleri denklem (4.160)'ta yerine yerleştirdiğinde

$$\left[\partial_t^2 + H \tanh(Ht) \partial_t - \left(-k^2 \operatorname{sech}^2(Ht) - \frac{2keE}{H} \tanh(Ht) \operatorname{sech}(Ht) - \frac{e^2 E^2}{H^2} \tanh^2(Ht) \right) + \frac{m^2}{4} \right] \varphi(t) = 0 \quad (4.162)$$

elde edilir. Daha düzenli şekilde aşağıdaki gibi yazılır:

$$\left[\partial_t^2 + H \tanh(Ht) \partial_t - \frac{1}{\cosh^2(Ht)} \left(ik - \frac{ieE}{H} \sinh(Ht) \right)^2 + \frac{m^2}{4} \right] \varphi(t) = 0. \quad (4.163)$$

(4.163) denkleminde aşağıdaki dönüşüm uygulanır:

$$\varphi(t) = \frac{\phi'(t)}{\sqrt{\cosh(Ht)}} . \quad (4.164)$$

Denklem (4.164)'deki dönüşümünün birinci ve ikinci türevleri aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}'(t) \cosh^{-\frac{1}{2}}(Ht) - \frac{H}{2} \cosh^{-\frac{3}{2}}(Ht) \sinh(Ht) \phi'(t), \quad (4.165)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dt^2} &= \ddot{\phi}'(t) \cosh^{-\frac{1}{2}}(Ht) - H \cosh^{-\frac{3}{2}}(Ht) \sinh(Ht) \dot{\phi}'(t) \\ &+ \frac{3H^2}{4} \cosh^{-\frac{5}{2}}(Ht) \sinh^2(Ht) \phi'(t) - \frac{H^2}{2} \cosh^{-\frac{1}{2}}(Ht) \phi'(t). \end{aligned} \quad (4.166)$$

Denklem (4.165) ile denklem (4.166) denklem (4.163)'e yerleştirildiğinde

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}'(t) + \left[\left(-\frac{H^2}{4} + \frac{e^2 E^2}{H^2} + \frac{m^2}{4} \right) + \left(-\frac{H^2}{4} + k^2 - \frac{e^2 E^2}{H^2} \right) \text{sech}^2(Ht) \right. \\ \left. + \frac{2keE}{H} \text{sech}(Ht) \tanh(Ht) \right] \phi'(t) = 0 \end{aligned} \quad (4.167)$$

elde edilir ve aşağıdaki tanımlamalar yapılır:

$$\tilde{\alpha}^2 = \left(-\frac{H^2}{4} + \frac{e^2 E^2}{H^2} + \frac{m^2}{4} \right), \quad (4.168)$$

$$\tilde{\beta}^2 = \left(-\frac{H^2}{4} + k^2 - \frac{e^2 E^2}{H^2} \right), \quad (4.169)$$

$$\tilde{\gamma}^2 = \frac{2keE}{H}. \quad (4.170)$$

Denklem (4.81)'deki değişken değiştirmesi bu hesaplamalar için tekrar kullanıldığında

$$z = \frac{1 + i \sinh(Ht)}{2} \quad (4.171)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{dz}{dt} \frac{d}{dz},$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{iH}{2} (4z - 4z^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dz}, \quad (4.172)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{H^2}{8} (4 - 8z) \frac{d}{dz} - \frac{H^2}{4} (4z - 4z^2) \frac{d^2}{dz^2}, \quad (4.173)$$

$$z(1-z) \frac{d^2 \phi}{dz^2} + \frac{(1-2z)}{2} \frac{d}{dz} + \left[\frac{\alpha^2}{H^2} - \frac{\beta^2}{4H^2 z(1-z)} - \frac{\gamma^2(1-2z)}{4H^2 z(1-z)} \right] \phi'(t) = 0 \quad (4.174)$$

denklemini elde edilir. Dalga fonksiyonu

$$\phi'(t) = z^{\tilde{\rho}} (1-z)^{\tilde{\lambda}} f(z) \quad (4.175)$$

biçiminde tanımlanır. Dalga fonksiyonunun birinci türevi ve ikinci türevi

$$\frac{d\phi'}{dt} = z^{\tilde{\rho}} (1-z)^{\tilde{\lambda}} \left[\frac{\tilde{\rho}}{z} f(z) - \frac{\tilde{\lambda}}{1-z} f(z) + \frac{df}{dz} \right] \quad (4.176)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi'}{dz^2} = z^{\tilde{\rho}}(1-z)^{\tilde{\lambda}} & \left[\frac{d^2 f}{dz^2} + \left(\frac{2\tilde{\rho}}{z} - \frac{2\tilde{\lambda}}{1-z} \right) \frac{df}{dz} + \left(\frac{\tilde{\rho}^2}{z^2} - \frac{2\tilde{\rho}\tilde{\lambda}}{z(1-z)} + \frac{\tilde{\lambda}^2}{(1-z)^2} f(z) \right) \right. \\ & \left. \frac{\tilde{\rho}}{z^2} f(z) - \frac{\tilde{\lambda}}{(1-z)^2} f(z) \right] \end{aligned} \quad (4.177)$$

biçiminde yazılır. Denklem (4.176) ve (4.177) denklem (4.174)' te yerine yazıldığında aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \left\{ z(1-z) \frac{d^2 f}{dz^2} + \left[\left(2\tilde{\rho} + \frac{1}{2} \right) - z(2\tilde{\rho} + 2\tilde{\lambda} + 1) \right] \frac{df}{dz} + \left[\left(\frac{I_0}{\tilde{\rho}^2 - \frac{\tilde{\rho}}{2} - \frac{\tilde{\beta}^2}{4H^2} - \frac{i\tilde{\gamma}^2}{4H^2}} \right) \right. \right. \\ & + \left. \left(\frac{I_1}{-2\tilde{\rho}^2 - 2\tilde{\lambda}\tilde{\rho} + \frac{\tilde{\rho}}{2} - \frac{\tilde{\lambda}}{2} - \frac{\tilde{\alpha}^2}{H^2} + \frac{i\tilde{\alpha}^2}{2H^2}} \right) z - \left(\frac{I_2}{\tilde{\rho}^2 + 2\tilde{\lambda}\tilde{\rho} + \tilde{\lambda}^2 + \frac{\tilde{\alpha}^2}{H^2}} \right) \right] z^2 \left\{ \frac{f(z)}{z(1-z)} = 0. \right. \end{aligned} \quad (4.178)$$

Denklem (4.178) aşağıdaki hipergeometrik denkleme benzemektedir:

$$z(1-z) \frac{d^2 f(z)}{dz^2} + [c - (a+b+1)z] \frac{df(z)}{dz} - abcf(z) = 0 \quad . \quad (4.179)$$

Denklem (4.178), denklem (4.179)'daki hipergeometrik diferansiyel denklem ile karşılaştırıldığında

$$c = 2\tilde{\rho} + \frac{1}{2} \quad \text{olduğu görülür.}$$

$$I_0 = 0 \text{ 'dan}$$

$$\tilde{\rho}^2 - \frac{\tilde{\rho}}{2} = \frac{\tilde{\beta}^2}{4H^2} + \frac{i\tilde{\gamma}^2}{4H^2}, \quad (4.180)$$

$I_1 = -I_2$ ’ den

$$\tilde{\lambda}^2 - \frac{\tilde{\lambda}}{2} = \frac{\tilde{\beta}^2}{4H^2} - \frac{i\tilde{\gamma}^2}{4H^2} \quad (4.181)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$z(1-z) \frac{d^2f}{dz^2} + \left[\left(\frac{1}{2} + 2\tilde{\rho} \right) - (2\tilde{\rho} + 2\tilde{\lambda} + 1)z \right] \frac{df(z)}{dz} - (\tilde{\rho} + \tilde{\lambda} + \tilde{\varepsilon})(\tilde{\rho} + \tilde{\lambda} - \tilde{\varepsilon})f(z) = 0 \quad (4.182)$$

bulunur. I_2 ve $a.b = -I_2$ ’ den

$$\left(\tilde{\rho}^2 + 2\tilde{\lambda}\tilde{\rho} + \tilde{\lambda}^2 + \frac{\tilde{\alpha}^2}{H^2} \right) = (\tilde{\rho} + \tilde{\lambda} + \tilde{\varepsilon})(\tilde{\rho} + \tilde{\lambda} - \tilde{\varepsilon}),$$

$$\frac{\tilde{\alpha}^2}{H^2} = -\tilde{\varepsilon}^2,$$

$$\tilde{\varepsilon} = i \frac{\tilde{\alpha}}{H}$$

elde edilir. Daha önce denklem (4.168)’de tanımlanan $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\varepsilon}$ ’da yerine yazıldığında aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{i}{H} \underbrace{\left(-\frac{H^2}{4} + \frac{m^2}{4} + \frac{e^2 E^2}{H^2} \right)^{\frac{1}{2}}}_{\tilde{\omega}_0} \quad (4.183)$$

Denklem (4.169) ve denklem (4.170)’te tanımlanan $\tilde{\beta}^2$ ve $\tilde{\gamma}^2$ denklem (4.180)’de yerine yazıldığında

$$\tilde{\rho}^2 - \frac{\tilde{\rho}}{2} = \frac{1}{4H^2} \left[\left(-\frac{H^2}{4} + k^2 - \frac{e^2 E^2}{H^2} \right) + \frac{2iekE}{H} \right] \quad (4.184)$$

elde edilir. Denklem (4.184)'te $\tilde{\rho} = \frac{\tilde{n}}{2}$ alındığında ara işlemlerden sonra

$$\frac{n^2}{4} - \frac{n}{4} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{k}{H} + \frac{ieE}{H^2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] \quad (4.185)$$

bulunur. Denklem (4.185)'te denklem (4.98) ve denklem (4.99)'dakine benzer işlemler sonucunda

$$n = \frac{1}{2} - \frac{k}{H} + \frac{ieE}{H^2}, \quad (4.186)$$

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{2} - \frac{k}{H} - \frac{i\tilde{\omega}_0}{H}, \quad (4.187)$$

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{2} - \frac{k}{H} + \frac{i\tilde{\omega}_0}{H}, \quad (4.188)$$

$$\tilde{\gamma} = 1 - \frac{k}{H} + \frac{ieE}{H^2} \quad (4.189)$$

bulunur. Bulunan denklemin genel çözümü

$$\emptyset'(t) = z^{\frac{\tilde{n}}{2}} (1-z)^{\frac{\tilde{n}^*}{2}} \left[D_1 {}_2F_1(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\gamma}; z) + D_2 z^{1-\tilde{\gamma}} {}_2F_1(\tilde{\mu} - \tilde{\gamma} + 1, \tilde{\nu} - \tilde{\gamma} + 1; 2 - \tilde{\gamma}; z) \right] \quad (4.190)$$

biçiminde yazılır. Burada D_1 ve D_2 boylandırma sabitleridir.

Elde edilen bu çözümler denklem (4.150)'deki dalga fonksiyonunun ilk ve son bileşenlerinin toplamıdır. Diğer bileşenler aşağıda anlatıldığı gibi bulunur:

Denklem (4.152) ve denklem (4.153)'ten

$$\psi_2 = -\frac{1}{im} \left(\frac{\partial_x}{C_2} + \frac{ieA_1}{C_2} \right) (\psi_1 + \psi_4) \quad (4.191)$$

elde edilmişti. $\psi_2 = \psi_3$ 'den dalga fonksiyonunun üçüncü bileşeni de bulunur. Diğer birinci ve dördüncü bileşenler denklem (4.151) ve denklem (4.154)'ten elde edilir. Denklem (4.151) ve denklem (4.154) farkından

$$\psi_1 - \psi_4 = \frac{1}{im} \left(-2i \frac{\partial_t}{C_1} + 2 \frac{eA_0}{C_1} \right) (\psi_1 + \psi_4) \quad (4.192)$$

elde edilir. Denklem (4.161)'de yazdığımız dalga fonksiyonu

$$(\psi_1 + \psi_4) = e^{ikx} \varphi(t) \quad (4.193)$$

biçimindedir. Bu dalğa fonksiyonunda denklem (4.164)

$$\varphi(t) = \frac{\phi'(t)}{\sqrt{\cosh(Ht)}} \quad (4.194)$$

dönüşümü yapılmıştı. Denklem (4.174) çözümü için denklem (4.164)'deki

$$\phi'(t) = z^{\tilde{p}} (1-z)^{\tilde{\lambda}} f(z) \quad (4.195)$$

tanımlanmıştı. Buna göre denklem (4.161)'de tanımlanan dalga fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır:

$$(\psi_1 + \psi_4) = z^{\tilde{\rho}}(1-z)^{\tilde{\lambda}}f(z)\frac{e^{ikx}}{\sqrt{\cosh(Ht)}} \quad (4.196)$$

Denklem (4.196)'da $f(z)$

$$f(z) = D_1 {}_2F_1(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\gamma}; z) + D_2 z^{1-\tilde{\gamma}} {}_2F_1(\tilde{\mu} - \tilde{\gamma} + 1, \tilde{\nu} - \tilde{\gamma} + 1; 2 - \tilde{\gamma}; z) \quad (4.197)$$

biçiminde yazılır. Bu denklemdeki z denklem (4.81)'de tanımlandığı gibidir:

$$z = \frac{1 + i\sinh(Ht)}{2} \quad (4.81)$$

Denklem (4.157)'de tanımlanan

$$C_1 = 1 \quad C_2 = \cosh(Ht)$$

denklem (4.155)'te yazıldığında

$$\psi_2 = -\frac{1}{im\cosh(Ht)} \left(\partial_x - \frac{ieE}{H} \sinh(Ht) \right) (\psi_1 + \psi_4) \quad (4.198)$$

elde edilir. Denklem (4.196)'da z ler de yerine yerleştğinde karmaşık görünümü daha sade bir hale getirmek için

$$(\psi_1 + \psi_4) = A e^{ikx} f(z) \quad (4.199)$$

biçiminde yazılabilir. Denklem (4.199)'da

$$f(z) = {}_2F_1(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\gamma}; z)$$

denklem (4.197)'de tanımlandığı biçimdedir. Bu durumda

$$\psi_2 = -\frac{1}{im \cosh(Ht)} \left(\partial_x - \frac{ieE}{H} \sinh(Ht) \right) A e^{ikx} {}_2F_1(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\gamma}; z) \quad (4.200)$$

biçiminde yazılır. Türev alındığında

$$\psi_2 = -\frac{1}{im \cosh(Ht)} \left[\left(\partial_x - \frac{ieE}{H} \sinh(Ht) \right) A e^{ikx} {}_2F_1(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\gamma}; z) \right] \quad (4.201)$$

$$\psi_2 = -\frac{A e^{ikx}}{im \cosh(Ht)} \left(ik - \frac{ieE}{H} \sinh(Ht) \right) {}_2F_1(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\gamma}; z) \quad (4.202)$$

elde edilir. Denklem (4.202)'deki ifade ψ_3 'e de eşittir. Denklem (4.192)'deki denklemde $C_1 = 1$, $A_0 = 0$ ve denklem (4.199)'daki $(\psi_1 + \psi_4)$ yazıldığında

$$\psi_1 - \psi_4 = \frac{1}{im} (-2i\partial_t) A e^{ikx} {}_2F_1(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\gamma}; z) \quad (4.203)$$

elde edilir. ψ_1 ve ψ_4 bileşenlerini bulmak için denklem (4.192) ve denklem (4.199) kendi aralarında toplanıp çıkartıldığında aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\psi_1 = \frac{e^{ikx}}{2} \left[\frac{1}{im} (-2i\partial_t) A {}_2F_1(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\gamma}; z) + A {}_2F_1(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\gamma}; z) \right] \quad (4.204)$$

$$\psi_4 = \frac{e^{ikx}}{2} \left[-\frac{1}{im} (-2i\partial_t) A {}_2F_1(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\gamma}; z) + A {}_2F_1(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\gamma}; z) \right] \quad (4.205)$$

Denklem (4.150)'deki dalga fonksiyonunun bileşenleri aşağıdaki gibi yazılır:

$$\psi(t, x) = e^{ikx} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{im} (-2i\partial_t) A {}_2F_1(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\gamma}; z) + A {}_2F_1(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\gamma}; z) \right] \\ - \frac{A}{im \cosh(Ht)} \left(ik - \frac{ieE}{H} \sinh(Ht) \right) {}_2F_1(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\gamma}; z) \\ - \frac{A}{im \cosh(Ht)} \left(ik - \frac{ieE}{H} \sinh(Ht) \right) {}_2F_1(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\gamma}; z) \\ \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{im} (-2i\partial_t) A {}_2F_1(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\gamma}; z) + A {}_2F_1(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\gamma}; z) \right] \end{bmatrix} \quad (4.206)$$

Denklem (4.206)'da yazılan dalga fonksiyonunun birinci ve dördüncü bileşenleri toplandığında

$$\psi_1 + \psi_4 = Ae^{ikx} {}_2F_1(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\gamma}; z) , \quad (4.207)$$

elde edilir.

4.4.2. Spin-1 Parçacık Yaratılması

Hipergeometrik fonksiyon açısından iki lineer bağımsız çözüm ifade edilebilir.

$$\phi_k^{(1)}(t) = z^{\frac{\tilde{n}}{2}} (1-z)^{\frac{\tilde{n}^*}{2}} D_1 {}_2F_1(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\gamma}; z) \quad (4.208)$$

$$\phi_k^{(2)}(t) = z^{\frac{\tilde{n}}{2}} (1-z)^{\frac{\tilde{n}^*}{2}} D_2 z^{1-\tilde{\gamma}} {}_2F_1(\tilde{\mu} - \tilde{\gamma} + 1, \tilde{\nu} - \tilde{\gamma} + 1; 2 - \tilde{\gamma}; z) \quad (4.209)$$

Hipergeometrik fonksiyon dönüşüm özelliklerinden $z \rightarrow \infty$ iken asimtotik davranışı (Abramowitz, Stegun, 1974)

$$\begin{aligned}
{}_2F_1(a, b, c; z) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} (a, a+1-c, a+1-b; \frac{1}{z}) \\
&+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-z)^{-b} F\left(b, b+1-c, b+1-a; \frac{1}{z}\right) \quad (4.210)
\end{aligned}$$

(4.208) denklemi (4.210) denklemine göre açılırsa

$$\begin{aligned}
\emptyset'_k(1)(t) &= z^{\frac{\tilde{n}}{2}}(1-z)^{\frac{\tilde{n}^*}{2}} D_1 \left[\frac{\Gamma(\tilde{\gamma})\Gamma(\tilde{\nu}-\tilde{\mu})}{\Gamma(\tilde{\nu})\Gamma(\tilde{\gamma}-\tilde{\mu})} (-z)^{-\tilde{\mu}} {}_2F_1(\tilde{\mu}, \tilde{\mu}+1-\tilde{\gamma}, \tilde{\mu}+1-\tilde{\nu}; \frac{1}{z}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Gamma(\tilde{\gamma})\Gamma(\tilde{\mu}-\tilde{\nu})}{\Gamma(\tilde{\mu})\Gamma(\tilde{\gamma}-\tilde{\nu})} (-z)^{-\tilde{\nu}} {}_2F_1(\tilde{\nu}, \tilde{\nu}+1-\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}+1-\tilde{\mu}; \frac{1}{z}) \right] \quad (4.211)
\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. (4.209) denklemi (4.210) denklemine göre açılırsa

$$\begin{aligned}
\emptyset'_k(2)(t) &= z^{\frac{\tilde{n}}{2}}(1-z)^{\frac{\tilde{n}^*}{2}} C_2 \left[\underbrace{\frac{\Gamma(2-\tilde{\gamma})\Gamma(\tilde{\nu}-\tilde{\mu})}{\Gamma(\tilde{\nu}-\tilde{\gamma}+1)\Gamma(1-\tilde{\mu})}}_{\tilde{\alpha}_K} (-z)^{-\tilde{\mu}} {}_2F_1(\tilde{\mu}-\tilde{\gamma}+1, \tilde{\mu}, \tilde{\mu}+1-\tilde{\nu}; \frac{1}{z}) \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\frac{\Gamma(2-\tilde{\gamma})\Gamma(\tilde{\mu}-\tilde{\nu})}{\Gamma(\tilde{\mu}-\tilde{\gamma}+1)\Gamma(1-\tilde{\nu})}}_{\tilde{\beta}_K} (-z)^{-\tilde{\nu}} {}_2F_1\left(\tilde{\nu}-\tilde{\gamma}+1, \tilde{\nu}, \tilde{\nu}+1-\tilde{\mu}; \frac{1}{z}\right) \right] \quad (4.212)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu denklemde $\tilde{\alpha}_K$ ve $\tilde{\beta}_K$ Bogoliubov katsayılarıdır.

$$\tilde{\alpha}_K = \frac{\Gamma(\tilde{\gamma})\Gamma(\tilde{\nu}-\tilde{\mu})}{\Gamma(\tilde{\nu})\Gamma(\tilde{\gamma}-\tilde{\mu})} = \frac{\Gamma\left(1-\frac{k}{H}+\frac{ieE}{H^2}\right)\Gamma\left(\frac{2i\omega_0}{H}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{k}{H}+\frac{i\omega_0}{H}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{iqE}{H^2}+\frac{i\omega_0}{H}\right)} \quad (4.213)$$

$$\tilde{\beta}_K = \frac{\Gamma(\tilde{\gamma})\Gamma(\tilde{\mu}-\tilde{\nu})}{\Gamma(\tilde{\mu})\Gamma(\tilde{\gamma}-\tilde{\nu})} = \frac{\Gamma\left(1-\frac{k}{H}+\frac{iqE}{H^2}\right)\Gamma\left(-\frac{2i\omega_0}{H}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{k}{H}-\frac{i\omega_0}{H}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{iqE}{H^2}-\frac{i\omega_0}{H}\right)} \quad (4.214)$$

Denklem (4.213) ve denklem (4.214) oranlandığında

$$\frac{\tilde{\alpha}_K}{\tilde{\beta}_K} = \frac{\Gamma\left(\frac{2i\omega_0}{H}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{H} - \frac{i\omega_0}{H}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{ieE}{H^2} - \frac{i\omega_0}{H}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{H} + \frac{i\omega_0}{H}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{ieE}{H^2} + \frac{i\omega_0}{H}\right) \Gamma\left(-\frac{2i\omega_0}{H}\right)} \quad (4.215)$$

elde edilir.

Gama fonksiyonunun dönüşüm özellikleri

$$|\Gamma(i\sigma)|^2 = \frac{\pi}{\sigma \sinh(\pi\sigma)} \quad (4.216)$$

$$|\Gamma(1+i\sigma)|^2 = \frac{\pi\sigma}{\sinh(\pi\sigma)} \quad (4.217)$$

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\sigma\right)\right|^2 = \frac{\pi}{\cosh(\pi\sigma)} \quad (4.218)$$

kullanılarak $|\tilde{\alpha}_K|^2$ ve $|\tilde{\beta}_K|^2$ oranı aşağıdaki biçimde yazılır:

$$\frac{|\tilde{\alpha}_K|^2}{|\tilde{\beta}_K|^2} = \frac{\left|\Gamma\left(\frac{2i\omega_0}{H}\right)\right|^2 \left|\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{H} - \frac{i\omega_0}{H}\right)\right|^2 \left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{ieE}{H^2} - \frac{i\omega_0}{H}\right)\right|^2}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{H} + \frac{i\omega_0}{H}\right)\right|^2 \left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{ieE}{H^2} + \frac{i\omega_0}{H}\right)\right|^2 \left|\Gamma\left(-\frac{2i\omega_0}{H}\right)\right|^2} \quad (4.219)$$

Denklem (4.219)'da denklem (4.216) ve denklem (4.218)'deki özellikler kullanıldığında

$$\frac{|\tilde{\alpha}_K|^2}{|\tilde{\beta}_K|^2} = \frac{\cosh\pi\left(\frac{k}{H} + \frac{\omega_0}{H}\right) \cosh\pi\left(\frac{eE}{H^2} + \frac{\omega_0}{H}\right)}{\cosh\pi\left(\frac{k}{H} - \frac{\omega_0}{H}\right) \cosh\pi\left(\frac{eE}{H^2} - \frac{\omega_0}{H}\right)} \quad (4.220)$$

elde edilir. Aşağıdaki tanımlamalar yapıldığında

$$\begin{cases} \tilde{X} = \frac{\pi \tilde{\omega}_0}{H} \\ \tilde{Y} = \frac{\pi q E}{H^2} \end{cases} \quad (4.221)$$

denklem (4.220) aşağıdaki biçimde yazılır:

$$\frac{|\tilde{\alpha}_K|^2}{|\tilde{\beta}_K|^2} = \frac{\cosh\left(\frac{\pi k}{H} + \tilde{X}\right) \cosh(\tilde{X} + \tilde{Y})}{\cosh\left(\frac{\pi k}{H} - \tilde{X}\right) \cosh(\tilde{X} - \tilde{Y})} \quad (4.222)$$

$\cosh(a + b) = \cosh(a) \cosh(b) + \sinh(a) \sinh(b)$ eşitliği denklem (4.222)'de kullanıldığında $\frac{|\tilde{\alpha}_K|^2}{|\tilde{\beta}_K|^2}$ nin son hali aşağıdaki gibidir:

$$\frac{|\tilde{\alpha}_K|^2}{|\tilde{\beta}_K|^2} = \frac{\cosh(\tilde{X} + \tilde{Y})}{\cosh(\tilde{X} - \tilde{Y})} \quad (4.223)$$

DKP denklemi spin-0 ve spin-1 gibi tamsayı spinleri temsil etmektedir. Bu parçacıklar simetrik dalga fonksiyonları ile tanımlanır ve bu parçacıklar Bose – Einstein istatistiğine uyarlar. Bu parçacıklara bozon denilmektedir

$$|\tilde{\alpha}_K|^2 - |\tilde{\beta}_K|^2 = 1 \quad (4.224)$$

ve denklem (4.224)'deki normalizasyon koşulunu sağlar (Petiau, 1936).

Bogoliubov katsayıları için denklem (4.224)'deki normalizasyon koşulu kullanılarak aşağıdaki oran bulunur:

$$\left[\frac{|\tilde{\alpha}_K|^2}{|\tilde{\beta}_K|^2} - 1 \right]^{-1} = \left[\frac{\cosh(\tilde{X} + \tilde{Y})}{\cosh(\tilde{X} - \tilde{Y})} - 1 \right]^{-1}, \quad (4.225)$$

$$\left[\frac{|\tilde{\alpha}_K|^2}{|\tilde{\beta}_K|^2} - 1 \right]^{-1} = \left[\frac{\cosh(\tilde{X} + \tilde{Y}) - \cosh(\tilde{X} - \tilde{Y})}{\cosh(\tilde{X} - \tilde{Y})} \right]^{-1}. \quad (4.226)$$

$$\left[\frac{|\tilde{\alpha}_K|^2}{|\tilde{\beta}_K|^2} - 1 \right]^{-1} = |\tilde{\beta}_K|^2 = \frac{\cosh(\tilde{X} - \tilde{Y})}{2\sinh\tilde{X}\sinh\tilde{Y}}. \quad (4.227)$$

bulunur. Denklem (4.227)'deki $|\tilde{\beta}_K|^2 \sim n$ yaratılan parçacıkların sayı yoğunluğunu gösterir.



5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında zamana bağlı bir dış elektrik alan için eğri uzayda Dirac denklemi ve DKP denklemi çözülmüştür. Bu denklemlerin çözümünde karşılaştığımız diferansiyel denklemlerden, değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak genel bir denklem elde edilmiştir. Bu genel denklem $ds^2 = -dt^2 + \cosh^2(Ht)dx^2$ metriği için çözülmüştür. Elde edilen çözümlerden yararlanılarak eğri uzay-zamanda Dirac ve DKP denklemleri için Bogoliubov katsayıları bulunarak parçacık yaratma olasılık yoğunlukları hesaplanmıştır.

Dirac ve DKP denklemlerinin çözümleri kullanılarak elde edilen parçacık yaratma sayı yoğunlukları çizelge 5.1’de gösterildiği gibi $f = \frac{1}{e^{(e-\mu)/kT} \pm 1}$ biçiminde termal bir dağılım göstermemektedir (Parker, 1968). Bu genel gösterimde (+) fermiyon, (-) bozonları temsil etmektedir. Elektrik alan arttırıldıkça Dirac ve DKP denklemlerinin parçacık yaratma sayı yoğunlukları termal biçime dönüşmektedir. Denklem (4.124)’te yazılan Dirac parçacık sayı yoğunluğu aşağıda gösterilmiştir:

$$\left[\frac{\alpha^2}{\beta^2} + 1 \right]^{-1} = \left[\frac{\left(-\frac{k_x}{H} - \frac{\omega_0}{H} \right) \cosh(X - Y) + \left(\frac{k_x}{H} - \frac{\omega_0}{H} \right) \cosh(X + Y)}{\left(\frac{k_x}{H} - \frac{\omega_0}{H} \right) \cosh(X + Y)} \right]^{-1}.$$

Denklem tekrar düzenlenip aşağıda yazılan dönüşümler kullanıldığında

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (5.1)$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad (5.2)$$

$$\left[\frac{\alpha^2}{\beta^2} + 1 \right]^{-1} = \frac{(e^{2X-2Y} + 1)e^{X+Y} + e^{X-Y}(e^{2X+2Y} + 1)e^{X+Y}}{e^{2X}(e^{2X+2Y} + 1)} \quad (5.3)$$

ve

$$\frac{E^2}{H^2} \gg 1 \quad (5.4)$$

limit durumunda denklem (5.3)

$$\left[\frac{\alpha^2}{\beta^2} + 1 \right]^{-1} = \frac{(e^{3X-Y} + e^{3X+Y})e^{X+Y}}{e^{4X+2Y}} \quad , \quad (5.5)$$

$$\left[\frac{\alpha^2}{\beta^2} + 1 \right]^{-1} = \frac{(e^{4X} + e^{4X+2Y})}{e^{4X+2Y}} \quad , \quad (5.6)$$

$$\beta^2 = \frac{1}{e^{-2Y} + 1} \quad (5.7)$$

biçiminde yazılır. $-2Y = a$ tanımlanması yapıldığında

$$\beta^2 = \frac{1}{e^a + 1}$$

bulunur ki bu da Fermi–Dirac istatistiği ile uyumludur. Aynı işlemler DKP denklemi için yapıldığında DKP parçacık yaratma sayı yoğunluğunun yazılımı aşağıdaki gibi bulunur:

$$\left[\frac{\tilde{\alpha}_K^2}{\tilde{\beta}_K^2} - 1 \right]^{-1} = \left[\frac{\cosh(\tilde{X} + \tilde{Y})}{\cosh(\tilde{X} - \tilde{Y})} - 1 \right]^{-1}, \quad (5.8)$$

$$\left[\frac{\tilde{\alpha}_K^2}{\tilde{\beta}_K^2} - 1 \right]^{-1} = \left[\frac{\cosh(\tilde{X} + \tilde{Y}) - \cosh(\tilde{X} - \tilde{Y})}{\cosh(\tilde{X} + \tilde{Y})} \right]^{-1}, \quad (5.9)$$

$$\left[\frac{\tilde{\alpha}_K^2}{\tilde{\beta}_K^2} - 1 \right]^{-1} = \frac{\frac{e^{(\tilde{X}+\tilde{Y})}+e^{(\tilde{X}-\tilde{Y})}}{2} - \frac{e^{(\tilde{X}+\tilde{Y})}+e^{(\tilde{X}-\tilde{Y})}}{2}}{\frac{e^{(\tilde{X}+\tilde{Y})}+e^{(\tilde{X}-\tilde{Y})}}{2}}, \quad (5.10)$$

$$\left[\frac{\tilde{\alpha}_K^2}{\tilde{\beta}_K^2} - 1 \right]^{-1} = \frac{(e^{2\tilde{X}+2\tilde{Y}} + 1)e^{\tilde{X}-\tilde{Y}} - e^{\tilde{X}+\tilde{Y}}(e^{2\tilde{X}-2\tilde{Y}} + 1)e^{\tilde{X}-\tilde{Y}}}{e^{2\tilde{X}}(e^{2\tilde{X}-2\tilde{Y}} + 1)}. \quad (5.11)$$

Denklem (5.3)' teki limit durumundan

$$\left[\frac{\tilde{\alpha}_K^2}{\tilde{\beta}_K^2} - 1 \right]^{-1} = \frac{(e^{3\tilde{X}+\tilde{Y}} - e^{3\tilde{X}-\tilde{Y}})e^{\tilde{X}-\tilde{Y}}}{e^{4\tilde{X}-2\tilde{Y}}} = \frac{e^{4\tilde{X}} - e^{4\tilde{X}-2\tilde{Y}}}{e^{4\tilde{X}-2\tilde{Y}}} = \frac{e^{2\tilde{Y}} - 1}{1} \quad (5.12)$$

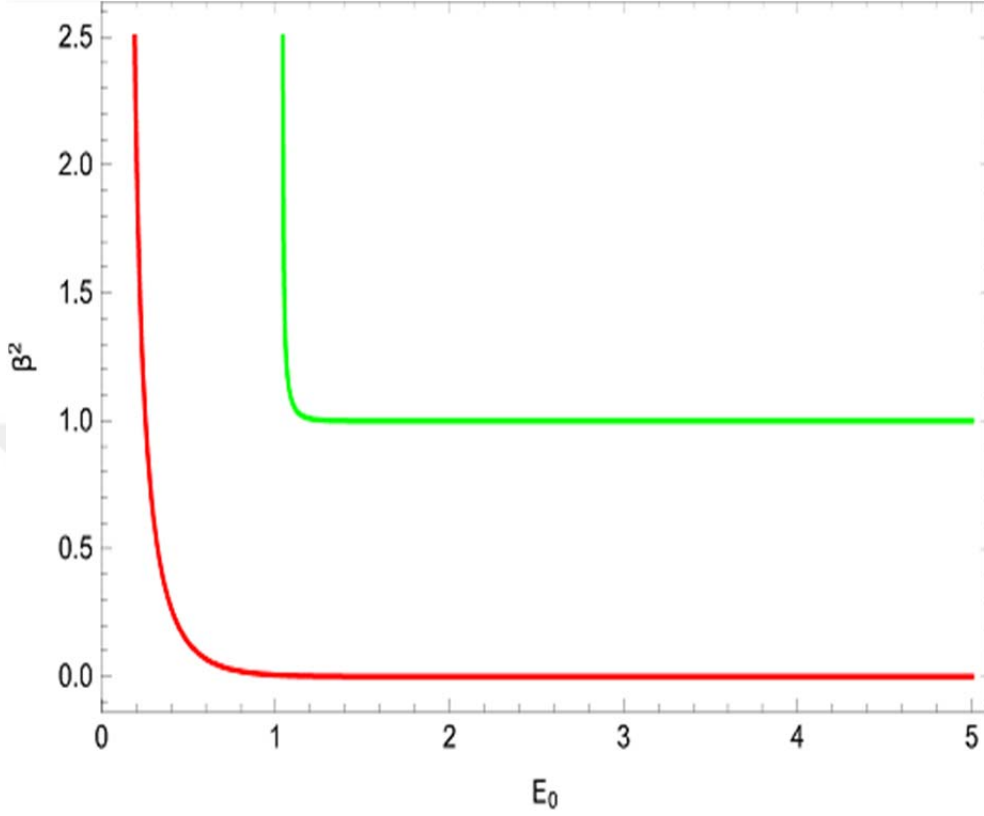
$$\beta^2 = \frac{1}{e^{2Y} - 1}$$

elde edilir. Bu da Bose –Einstein istatistiği ile uyumludur.

Çizelge 5.1.Elde edilen sonuçlar

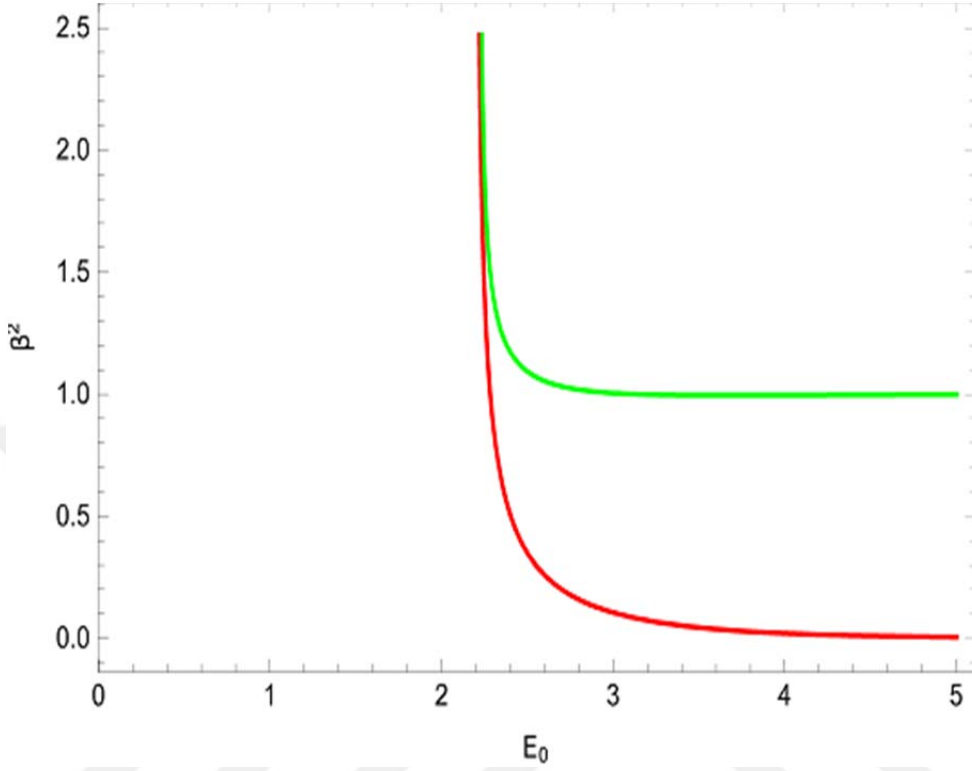
DIRAC DENKLEMİ İÇİN PARÇACIK YARATMA SAYI YOĞUNLUĞU	$ \beta_K ^2 = \frac{\left(\frac{k_x}{H} - \frac{\omega_0}{H}\right) \cosh(X+Y)}{\left(-\frac{k_x}{H} - \frac{\omega_0}{H}\right) \cosh(X-Y) + \left(\frac{k_x}{H} - \frac{\omega_0}{H}\right) \cosh(X-Y)}$
DIRAC X ve Y	$X = \frac{\pi}{H} \left(\frac{e^2 E^2}{\omega_0} - m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad Y = \frac{\pi e E}{H^2}$
DKP DENKLEMİ İÇİN PARÇACIK YARATMA SAYI YOĞUNLUĞU	$ \tilde{\beta}_K ^2 = \frac{\cosh(\tilde{X} - \tilde{Y})}{2 \sinh \tilde{X} \sinh \tilde{Y}}$
DKP $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$	$\tilde{X} = \frac{\pi}{H} \left(-\frac{H^2}{4} + \frac{e^2 E^2}{\tilde{\omega}_0} + \frac{m^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \tilde{Y} = \frac{\pi e E}{H^2}$

Önceki bölümlerde elde edilen sonuçlar Çizelge 5.1’de gösterilmiştir. Bu sonuçların grafikleri aşağıda yorumlanmıştır. Hesaplanan parçacık yaratma sayı yoğunlukları MATHEMATICA yazılımı kullanılarak çizimler yapılmış ve bu çizimler karşılaştırılmıştır. Çizimler sonucunda DKP denklemi ile Dirac denkleminin parçacık yaratma sayı yoğunlukları, genişleme parametresi ve elektrik alan değişimleri karşılaştırılarak yorumlanmıştır. Grafikler elde edilirken $(k, m, e = 1)$ alınmıştır.



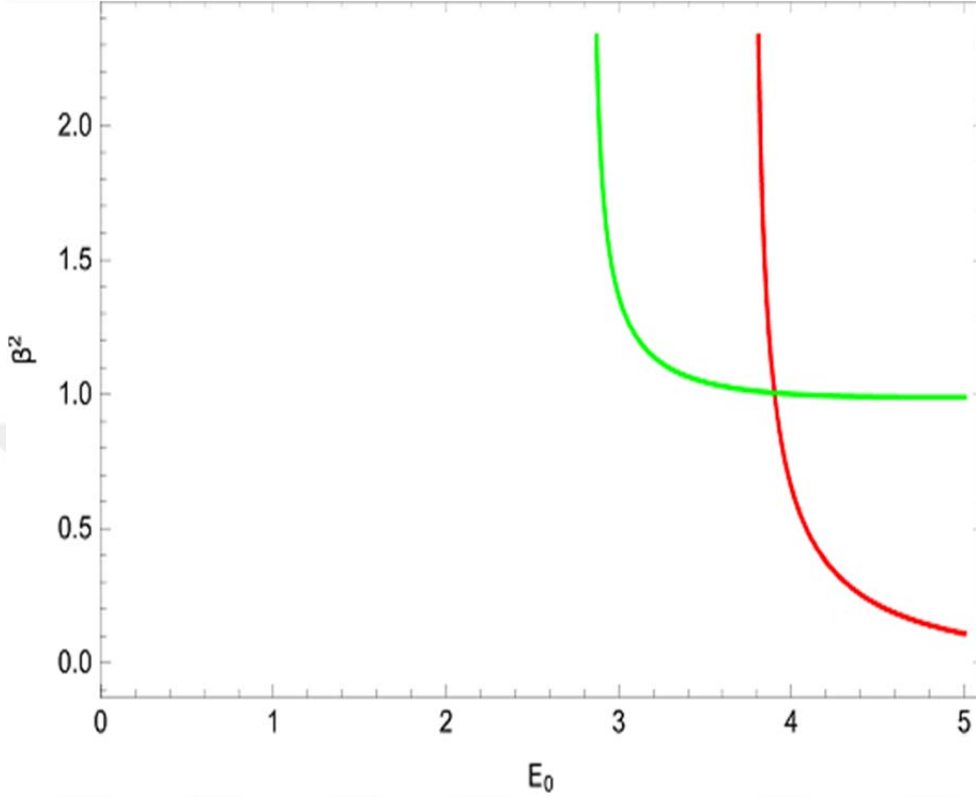
Şekil 5.1. DKP ve Dirac parçacık yaratma sayı yoğunluklarının elektrik alanın şiddetine göre değişimi ($|H| = 1,04$)

Şekil 5.1.'deki kırmızı renk DKP parçacığını, yeşil renk ise Dirac parçacığını temsil etmektedir. Grafik, genişleme sabitinin $|H| = 1,04$ değerindeki DKP ve Dirac parçacık yaratma sayı yoğunluklarının elektrik alanının şiddetine göre değişimini göstermektedir. Bu grafikte Dirac'ın parçacık yaratma sayı yoğunluğunun DKP parçacık yaratma sayı yoğunluğundan daha fazla olduğu görülmektedir.



Şekil 5.2. DKP ve Dirac parçacık yaratma sayı yoğunluklarının elektrik alanının şiddetine göre değişimi ($|H = 2,22|$)

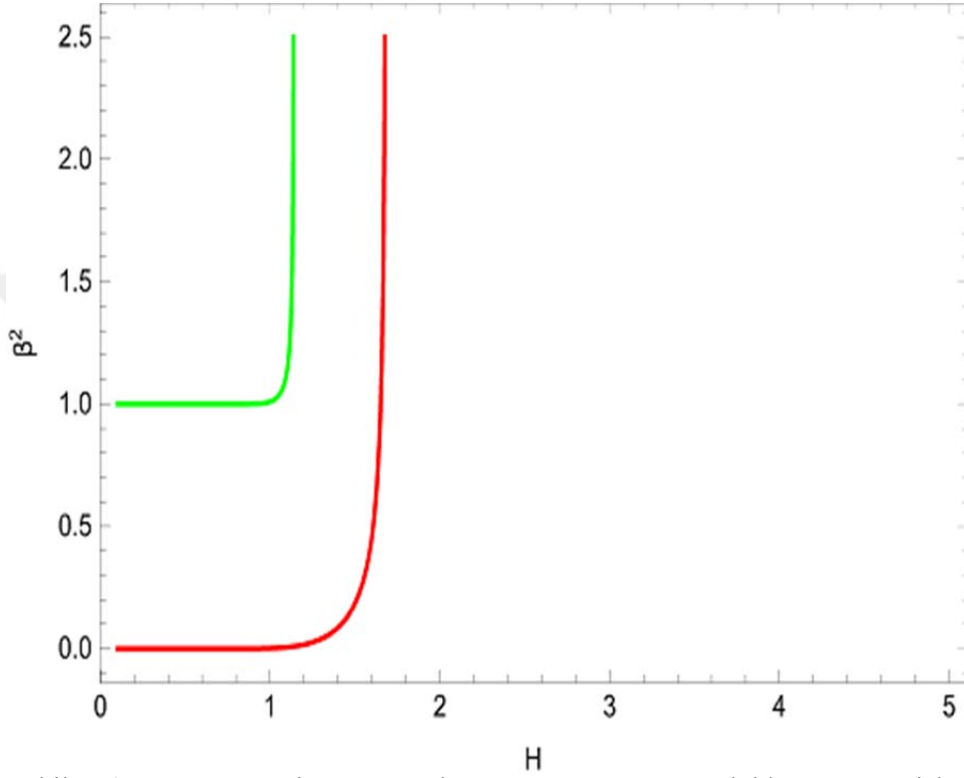
Şekil 5.2.'deki grafik $|H = 2,22|$ değerindeki parçacık yaratma durumunu göstermektedir. Burada DKP ve Dirac parçacık yaratma sayı yoğunluklarının $|E_0 \sim 2.3|$ değerinde bir değerde kesiştiği görülmektedir.



Şekil 5.3. DKP ve Dirac parçacık yaratma sayı yoğunluklarının elektrik alanının şiddetine göre değişimi ($H = |2,84|$)

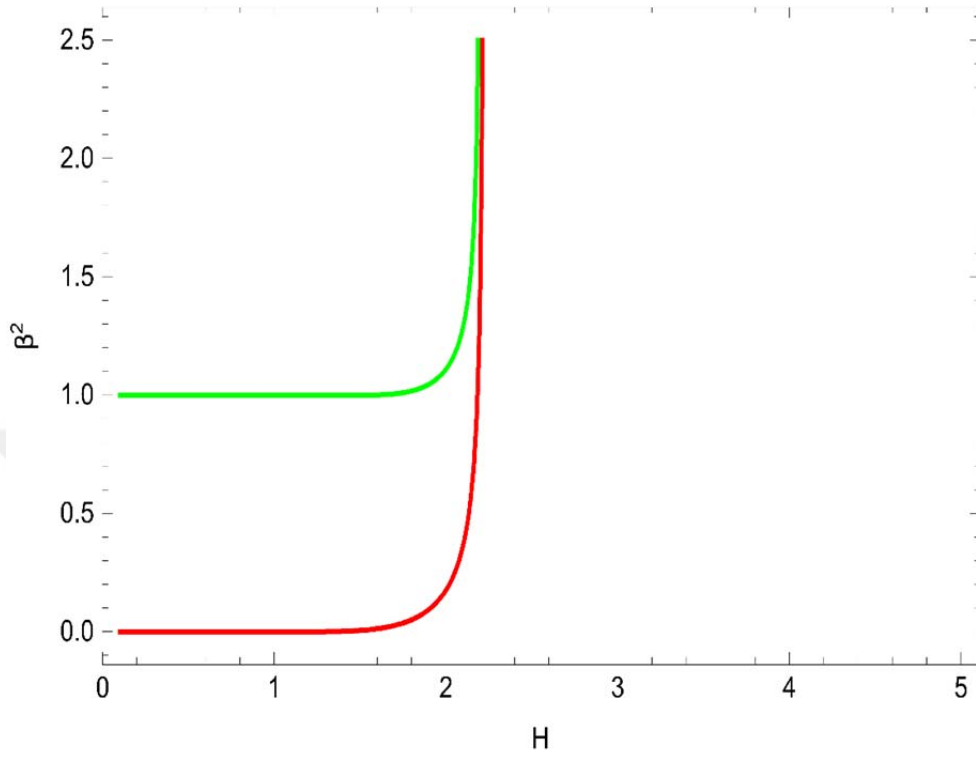
Şekil 5.3.'teki grafik $H = |2,84|$ değerindeki parçacık yaratma durumunu göstermektedir. Bu üç grafiğin karşılaştırılması sonucunda genişleme sabiti arttıkça, Dirac'ın daha düşük elektrik alanlarda parçacık yaratmaya devam ettiği, buna karşın DKP parçacık yaratma sayı yoğunluğunun düşük alanlarda sıfır olduğu görülmektedir. Bu da bize DKP'nin parçacık yaratması için daha şiddetli elektrik alanına ihtiyacı olduğunu göstermektedir. DKP denklemi kütleli spin 1 parçacığı olan bozonları temsil etmektedir. Yani bu parçacıklar Dirac parçacıklarından daha ağır parçacıklardır. Sonuç olarak, DKP'de parçacık yaratma sayı yoğunluğunun genişleme sabitinden çok elektrik alanının şiddetine bağlı olduğu söylenebilir. Dirac parçacık sayı yoğunluğunun ise genişleme sabiti arttıkça daha az parçacık yarattığı görülmektedir. Aşağıda verilen üç grafikte ise, Dirac ve

DKP parçacık yaratma sayı yoğunluklarının farklı elektrik alanlarında, genişleme sabitine göre değişimleri görülmektedir.



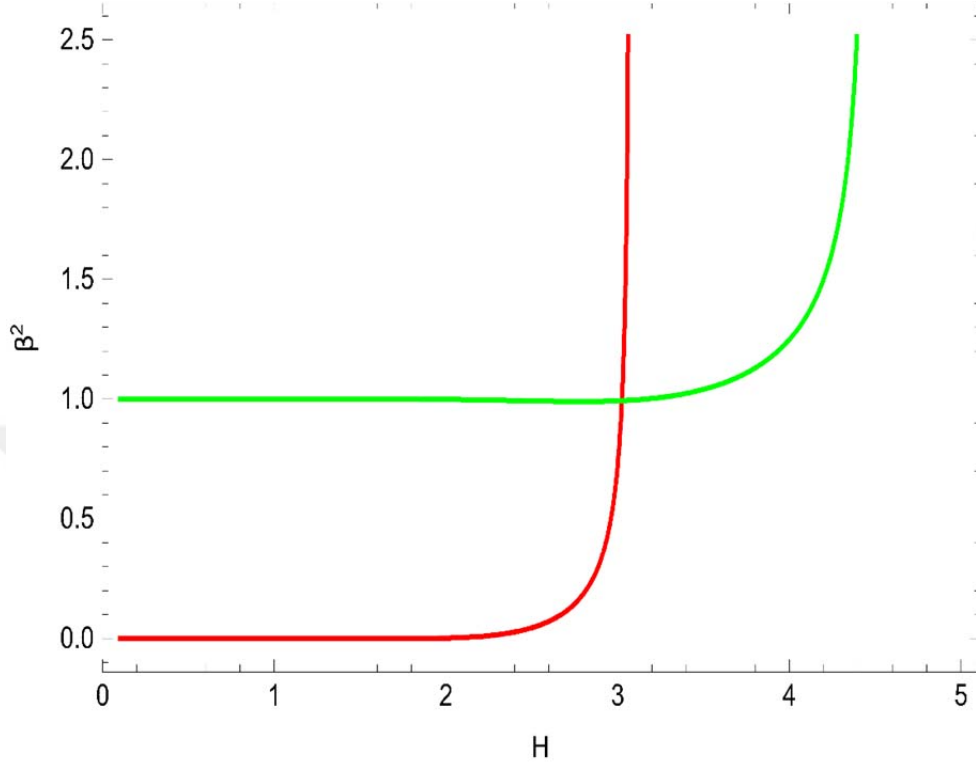
Şekil 5.4. DKP ve Dirac parçacık yaratma sayı yoğunluklarının genişleme sabitine göre değişimi ($E_0 = |1,14|$)

Şekil 5.4.'deki grafikte Dirac parçacık yaratma sayı yoğunluğun $E_0 = |1,14|$ değerinde DKP parçacık yaratma sayı yoğunluğuna göre daha baskın olduğu görülmektedir.



Şekil 5.5. DKP ve Dirac parçacık yaratma sayı yoğunluklarının genişleme sabitine göre değişim grafiği ($E_0 = |2.22|$)

Şekil 5.5.'deki grafikte $E_0 = |2.22|$ değerinde Dirac ve DKP parçacık yaratma sayı yoğunluklarının $H = 2$ değerinde kesiştiği görülmektedir.



Şekil 5.6. DKP ve Dirac parçacık yaratma sayı yoğunluklarının genişleme sabitine göre değişimi ($E_0 = |4,46|$)

Şekil 5.6.'daki grafik $E_0 = |4,46|$ değerindeki parçacık yaratma durumunu göstermektedir. Bu üç grafiğin karşılaştırılması sonucunda şiddetli elektrik alanlarda DKP daha düşük genişleme sabiti ile parçacık yaratmaktadır. Yani DKP'de parçacık yaratma sayı yoğunluğunun genişleme sabitinden çok elektrik alanın şiddetine bağlı olduğu burada da görülmektedir. Bu karşılaştırma sonucunda,

DKP parçacık yaratma sayı yoğunluğunun genişleme sabiti ile hızla azalmasına karşılık Dirac parçacıkları için bu azalma miktarı daha azdır. Dirac parçacıkları daha hafif olduğundan (elektron gibi) daha zayıf alanlarda parçacık yaratılmaktadır.

Sonuç olarak zamana bağılı bir elektrik alanda parçacık yaratma sayı yoğunluğunun, spin- $\frac{1}{2}$ parçacıkları temsil eden Dirac ile spin-1 parçacıklarını temsil eden DKP parçacıklarında farklı sonuçlar doğurduğu gözlemlenmiştir. Elektrik alan şiddetinin spin-1 parçacıklarında genişleme sabitine göre daha etkili olduğu görülmektedir.





KAYNAKLAR

- Abramowitz, M., Stegun, I. 1974. Handbook of Mathematical Functions, Newyork:Dover Publications.
- Alkofe, R., et. Al., 2001. Pair Creation and an X-ray Free Electron Laser, Phys. Rev. Lett. 87, 193902.
- Birrell, N. D., Davies, P.C.W., 1982. Quantum fields in curved space. Cambridge University Press,
- Bogoliubov, N. N. , Tolmachev, V. V., Schirkov, D. V., 1959. A New Method in the Theory of Superconductivity , Consultants Bureau, New York,
- Bogoliubov, N.,N., 1958. Nuovo Cimento Comments on the Theory of Superconductivity. 7, 794 .
- Bogoliubov, N.,N., Tyablikov, SV., 1949. An approximate method of finding the lowest energy levels of electrons in a metal , Zhurn. Eksp. Teor. Fiz. 19, 256-268.
- Bogoliubov, N.N., 1947. On the theory of superfluidity, Izv. Akad. Nauk SSSR, ser. fiz. 11, 77 (1947) p. 292-301 .
- Bogoliubov, N.N., 1958. A new method in the theory of superconductivity 1, J.Eksptl. Teoret. Phys.U.S.S.R. 34, 58-65.
- Bogoliubov, N.N., 1958. On a new method in the theory of superconductivity, Nuovo Cim. 7, 794-805.
- Bongaarts P. J. M., and Ruijsenaar S. N. M. , 1975. The Klein Paradox as a Many Particle Problem. Instituut Lorentz, University of Leiden, Netherlands,
- Boumali,A., On the eigensolutions of one-dimensional Duffin-Kemmer-Petiau oscillator ,J. Math. Phys. 49, 022302.
- Brezin, E., and Itzykson C., 1970. Pair Production in Vacuum by an Alternating Field, Phys. Rev. D, Vol. 2 ,1191.
- Caracciolo, S., Palumbo, F., Viola, G., 2008. Bogoliubov transformations and fermion condensates in lattice field theories, Annals Phys.324,584-599.

- Castorina, P., Kharzeev, D., Satz, H., 2007. Thermal Hadronization and Hawking-Unruh Radiation in QCD ,Eur. Phys. J. 187.
- Dadanov,V.V., 2007.Bogoliubov transformations for Fermi-Bose systems and squeezed states generation in cavities with oscillating walls, Instituto de Fisica, Universidade de Brasilia, 70910-900.
- Dirac, P. A. M., 1928 . The Quantum theory of electron. Proc. Roy. Soc. Lond, A 117 610.
- Dirac, P., 1930. A Theory of Electrons and Photons, Proc. Roy. Soc. Lond. A 126, 801.
- Dirac, P.A.M., 1925. The Fundamental Equations of Quantum Mechanics, *Proc.R.Soc.Lond.* **A109** 642-653.
- Dirceu, Portes Jr, Marcos, O., Pinho and Hilario Rodrigues, 2013. Recursive Construction of the Bosonic Bogoliubov Vacuum State, Quant.Phys. Lett. 2, NO.1, 11-15.
- Dolby, Carl, E., Gull, S. F., 2001. State-Space Based Approach to Particle Creation in Spatially Uniform Electric Field, Astrophysics Group, Cavendish Laboratory, Madingley Road, Cambridge CB3 0HE,
- Duffin, R. J., 1938. On the characteristic matrices of covariant systems, Physical Review, Vol. 54, No. 12, p. 1114.
- Dumlu C.K. and Dunne G.V., 2010. The Stokes Phenomenon and Schwinger Vacuum Pair Production in Time-Dependent Laser Pulses Phys. Rev. Lett. 104 , 250402
- Dunne, D.N., Hall, T., 1998. QED Effective Action in Time Dependent Electric Backgrounds, Phys. Rev. **D58**, 105022.
- Falek, M. and Merad, M., 2010. Duffin–Kemmer–Petiau equation in Robertson-Walker space-time. Cent. Eur. J. Phys. 8(3) 408-414.
- Fitzpatrick, R., Thermodynamics and Statistical Mechanics, The University of Texas at Austin,

- Fradkin, E.S., Gitman, D. M., and Shvartsman Sh.,M. 1991. Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum, Germany, 288.
- Fukushima K., Gelis F., Lappi T., 2009. Multiparticle Correlations in the Schwinger Mechanism Nucl. Phys. A831 184.
- Garriga, J., 1994. Pair production by an electric field in (1+1)-dimensional de Sitter space. Phys. Rev. D, 49, 6343.
- Greiner, W., Müller, B., Rafelski, J., 1985. Quantum Electrodynamics of Strong Fields, Springer-Verlag, Berlin,
- Grenier, W., 2000. Relativistic Quantum Mechanics Wave Equations. New York, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Grib A.A., Mamaev S.G., Mostepanenko V.M., 1988. Quantum Vacuum Effects in Strong Fields, Moscow. Energotimizdat.
- Grib, A.A., Mostepanenko, V.M. and Frolov, V.M., 1972. Vacuum Quantum Effects in Strong Fields, St. Petersburg: Fridmann Lab., 377.
- Grib, A.A., Mamaev, S.G., Mostepanenko, V.M., 1988. Vacuum Quantum Effects in Strong Fields, Moscow, Energoatomizdat, 288.
- Hallin and J., Liljenberg P., 1995. Fermionic and Bosonic Pair Creation in an External Electric Field at Finite Temperature Using the Functional Schrodinger representation Phys. Rev. D **52**, 1150
- Haouat, S. and Chekireb, R., 2011. On the Creation of Scalar Particles in a Flat Robertson–Walker Spacetime. Modern Physics Letters A 26 (35), 2639-2651.
- Haouat, S. and Chekireb, R., 2012. Effect of electromagnetic fields on the creation of scalar particles in a flat Robertson-Walker space-time, Eur. Phys. J. C, 72 p. 2034.
- Havare, A., Yetkin, T., Sogut, K., 2003. On the Equivalence of the Massless DKP Equation and Maxwell Equations in Robertson-Walker Spacetime. Chinese Journal of Physics, 41 (5), 465.
- Hawking, S.V., Particle Creation by Black Holes, 1975. Phys. 43, England, 199--220

- Hayashinaka, T., Fujitac, T. and Yokoyama, J. 2016. Fermionic Schwinger effect and induced current in de Sitter space, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* 010.
- Hebenstreit, F., Alkofer, R., and Gies, H., 2008. Pair Production Beyond the Schwinger Formula in Time-Dependent Electric Fields, *Phys. Rev. D* **78**, 061701.
- Heisenberg, W., and Euler, H., 1936. Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons, *Zeitschrift für Physik*, Vol. 98, No. 11-12, 714-732.
- J. G. Valatin, 1958. On The Collective Properties Of Boson System, *Nuovo Cimento* 7, 843 .
- Kangal, E.E., Yanar, H., Havare, A., Sogut, K., 2014. Creation Of Vector Bosons By An Electric Field In Curved Spacetime, *Annals of Physics*, 343, 40-48.
- Kemmer, N., 1938. Quantum theory of Einstein-Bose particles and nuclear interaction, *Proceedings of the Royal Society A*, vol. 166, pp. 127–153.
- Kharzeev, D., Levin, E., Tuchin, K., 2007. Multi-Particle Production and Thermalization in High-Energy QCD *Phys. Rev. C* 75 044903.
- Kharzeev, D., Tuchin K., 2005. From Color Glass Condensate to Quark Gluon Plasma through the event horizon *Nucl. Phys. A* 753 316.
- Kim, S.P. and Page, D.N., 2009. Schwinger Pair Production in dS2 and AdS2 . 98.80.Cq, 04.62.
- Kim, S.P., Page, D.N., 2002. Schwinger Pair Production Via Instantons In Strong Electric Fields, *Phys. Rev. D* **65**, 105002.
- Klein, O., 1934. Die reflexion von elektronen an einem potential sprung nach der relativistischen dynamic von Dirac. *Zeitschrift für Physik*, 53, 34.
- Kluger, Y., Mottola, E., and Eisenberg, J.M., 1998. The Quantum Vlasov Equation and its Markov Limit, *Phys. Rev. D* 58, 125015.
- Levai, P., Skokov, V., Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research, 2009. Enhanced Heavy Quark-Pair Production in Strong SU(2) Color Field, Dubna, Russia , 141980.

- Lotze, K. H., 1985. Production of massive spin - 1/2 particles in Robertson-Walker universes with external electromagnetic fields, *Astrophysics and Space Science* volume 120, pages191–204.
- McMahon, D, 2009. *Quantum Field Theory Demystified*, Newyork, 299s.
- Merad, M., 2007. DKP Equation with Smooth Potential and Position – Dependent Mass, *International Journal of Theoretical Physics* 46,2105-2118.
- Mostepanenko, V.M., and Frolov, V.M., 1974. Particle Creation From Vacuum by Homogeneous Electric Field With a Periodical Time Dependence, *Yad.Fiz*, 885-896.
- Narozhny, N.B., and Nikishov, A.I., 1974. Pair Production by a Periodic Electric Field, Russian, p-862.
- Nedjadi, Y., Barrett, R.C., On the properties of the Duffin –Kemmer- Petiau equation. *J. Physics G*,**19** ,87.
- Nejdadi, Y., Barrett, R.C., 1993. On The Propertiesof The Duffin-Kemmer-Petiau Equation. *J. Phys. G*.19 , 87-98.
- Nikishov, A.I., 1979. Momentum-transfer dependence of the cross section for $e^+ - e^-$ pair production by muons on nuclei, *Nakua* ,Moskow, 405.
- Nussinov S.,1975. Colored-Quark versiyon of some Hadronic Puzzless. *Phys. Rev. Lett* . 34, 1286.
- Papov , V.S., and Morinov, M.S., 1977. Electron-Positron Pair Creation FromVacuum Induced By Variable Electric Field, *Fortsch, Physics*, 25,373.
- Parker, L., 1968 . Particle Creation In Expanding Universes.*Physical Rewiew Letters*, 21 (8), 562-564.
- Petiau, G., 1936. University of Thesis. Published in Acad. R. Belg. Cl. Sci. Mem. Collect. 8 16 (2)
- Petiau, P., 1936., Thesis, University of Paris,
- Piazza A.D., 2004 . Pair Production At The Focus Of Two And OppositelyDirected Laser Beams The Effect Of The Pulsa Shape .*Phys. Rev. D* 70 , 053013

- Piazza, A.D., 2004. Pair Production at the focus of two equal and oppositely directed laser beams. The Effect of the pulse shape, Phys. Rev. D **70**, 053013.
- Pollock, M.D., 2010. On The Dirac Equation In Curved Space-Time, Russia, V.A. Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences Ulitsa Gubkina 8, Moscow 119991, Vol.41
- Popov, V.S., 1972. Pair Production in a Variable and Homogeneous Electric Field as an Oscillator Problem, Institute of Theoretical and Experimental Physics Submitted. Teor. Fiz. **62**, 1248-1269.
- Popov, V.S., 2002. On Schwinger Mechanism of $e^+ e^-$ Pair Production From Vacuum by The Field of Optical and X-Ray Lasers, Physics Letters A. **303**, 83-90.
- Popov, V.S., 1971. Production of $e^+ e^-$ Pairs in an Alternating External Field, JETP Lett. **13**, 185-187.
- Popov, V.S., 2001. Critical Charge in Quantum Electrodynamics, Vacuum, Physics of Atomic Nuclei **64**, 367-392.
- Popov, V.S., 1973. JETP Lett. **18**, 255; Sov. J., 1974. Nucl. Phys. **19**, 584.
- Ringwald, A., 2001. Pair Production from Vacuum at the Focus of an X-Ray Free Electron Laser, Phys. Lett. B **510**, Germany, 107.
- Sauter, F., 1931. On the behavior of an electron in a homogeneous electric field in Dirac's relativistic theory, Phys. **69**.
- Schmidt, S., et al., 1998. A Quantum Kinetic Equation for Particle Production in the Schwinger Mechanism, Int. J. Mod. Phys. E **7**, 709-722.
- Schwinger, J., 1951. On Gauge Invariance and Vacuum Polarization. Phys. Rev., **82**, 664.
- Smolyansky, S.A., et al., 1998. Relativistic Quantum Kinetic Equation of the Vlasov Type For Systems With internal Degrees Of Freedom., Int. J. Mod. Phys. E **7**, 515-526.

- Smolyansky, S.A., et al., 1997. Dynamical Derivation of a Quantum Kinetic Equation for Particle Production in the Schwinger Mechanism, 97-72.
- Sogut K., Yanar ,H., Havare.A., 2017. Production of Dirac Particles in External Electromagnetic Fields, Mersin University Department of Physics,33343, Mersin,TURKEY
- Sogut, K. and Havare, A., 2010. Transmission resonances in the Duffin-Kemmer-Petiau equation in (1+1) dimensions for an asymmetric cusp potential. Phys. Scr., 82, 045013.
- Tanji, N., 2009. Dynamical View Of Pair Creation in Uniform Electric and Magnetic Fields, Institute Of Physics, University of Tokyo, 153-8902.
- Tyablikov, S.V. 1967. Methods in the Quantum Theory of Magnetism, Plenum, New York, p. 105-113.
- Unal, N., 2005. Duffin-Kemmer-Petiau equation, proca equation and maxwells equation in 1+1 d. Concepts Phys., 2, 273.
- V.S. Popov and M.S. Morinov,Yad. Fiz. **16** ,809 (1972).
- Valatin, J.G., 1958. Comments on the theory of superconductivity , Nuovo Cim. 7, 843-857.
- Valatin, J. G. 1969. Mathematical Methods in Solid State and Super fluid Theory, edited by Clark, R. C. and Derrick, G. H. Oliver and Boyd, Edinburgh, sec. 5.
- Villalba, V. M., and Greiner, W., 2002. Creation of Dirac Particles in The Presence of a Constant Electric Field in an Anisotropic Bianchi I Universe. Mod. Phys. Lett. A, 17,1883.
- Villalba, V. M., and Rojas, C., 2006. Scattering of a Relativistic Scalar Particle by a Cusp Potential, Phys.Lett.A 362, 21–25.
- Villalba, V. M., 1995. Creation Of Spin-1/2 Particles By An Electric Field in De Sitter Space. Phys. Rev. D., 52, 6, 3742-3745.
- Villalba, V.M., 2006. Particle production by a spatially homogeneous time–dependent electric field, Revista Mexicana De Physica S 52 ,98–101.

- Xiao, M., 2009. Theory of transformation for the diagonalization of quadratic Hamiltonians, Department of Physics, Nanjing University, Nanjing 210093, People's Republic of China
- Yaşuk, F., Berkdemir, C., Berkdemir, A., Önem, C. Exact Solution of the Duffin-Kemmer-Petiau Equation for the Deformed Hulthen Potential, a Department of Physics, Faculty of Arts and Sciences, Erciyes University, Kayseri, Turkey.
- Zeldovich, Y.B., Popov, V.S., 1972. Electronic Structure of Superheavy Atoms, Phys. JETP **34**, 709.

ÖZGEÇMİŞ

Lise eğitimimi Hacı Sabancı Lisesinde tamamladım. Üniversite eğitimini Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümünde ,Yüksek lisansımı Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalında tamamladım.

