



**ZAMANA BAĞLI KONVEKTİF
KATSAYILI KARARSIZ KONVEKSİYON-
DİFÜZYON-REAKSİYON DENKLEMİNİN
SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ**

Sümevra Didem KUZULUGİL

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Harun SELVİTOPI
2022
Her hakkı saklıdır.**



**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**ZAMANA BAĞLI KONVEKTİF KATSAYILI KARARSIZ KONVEKSİYON-
DİFÜZYON-REAKSİYON DENKLEMİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ
İLE ÇÖZÜMÜ**

Sümeýra Didem KUZULUGİL

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Harun SELVİTOPI

Anabilim Dalı: Matematik

Erzurum

2022

Her hakkı saklıdır

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki tüm bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

04 / 02 / 2022

Sümeýra Didem KUZULUGİL

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZAMANA BAĞLI KONVEKTİF KATSAYILI KARARSIZ KONVEKSİYON-DİFÜZYON-REAKSİYON DENKLEMİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Sümeysra Didem KUZULUGİL

Erzurum Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Harun SELVİTOPI

Bilindiği üzere, birçok mühendislik ve fizik problemleri konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemi ile matematiksel olarak modellenmektedir. Literatürde, bahsi geçen problemle ilgili sayısal ve teorik farklı çalışmalar mevcuttur. Bu tez çalışmasında ise zamana bağlı konvektif katsayılı konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemi Crank-Nicolson/sonlu elemanlar hibrit sayısal yöntemi ile çözülmüştür. Sayısal çözüm elde edilirken Fortran programlama dili kullanılmıştır. Sayısal sonuçlar farklı difüzyon ve zamana bağlı konvektif katsayıları için farklı zaman adımlarında elde edilmiş, incelenmiş ve yorumlanmıştır.

2022, 41 sayfa

Anahtar Kelimeler: Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon Denklemi, Sonlu Elemanlar Yöntemi, Crank-Nicolson Şeması

ABSTRACT

MS. Thesis

SOLUTION OF THE UNSTABLE CONVECTION-DIFFUSION-REACTION EQUATION WITH TIME-DEPENDENT CONVECTIVE COEFFICIENT BY FINITE ELEMENT METHOD

Sümeysra Didem KUZULUGİL

Erzurum Technical University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Maths

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Harun SELVİTOPI

It is well known that, many engineering and physic problems are modeled mathematically using the convection-diffusion-reaction equation. In the literature, there are different numerical and theoretical studies about the aforementioned problem. In this thesis, the convection-diffusion-reaction equation with time dependent convective coefficient is solved using Crank-Nicolson/finite element hybrid numerical method. Fortran programming language has been used to obtain the numerical solution. Numerical results for different diffusion and time-dependent convective coefficients at different time steps have been obtained, examined, and interpreted.

2022, 41 page

Keywords: Convection-Diffusion-Reaction Equation, Finite Element Method, Crank-Nicolson Scheme

TEŞEKKÜR

Tez konusunun belirlenmesinde ve çalışmalarım boyunca katkılarıyla beni yönlendiren, bilgisinden ve tecrübesinden faydalandığım, bu süreçte desteğini hiç esirgemeyen yüksek lisans tez danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Harun SELVİTOPI' ye en içten dileklerle teşekkürlerimi sunarım.

Tez jürimde yer alan ve değerli fikirleri ile katkı sunan Prof. Dr. Murat SUBAŞI ve Dr. Öğr. Üyesi Vehpi YILDIRIM hocalarıma ve Yüksek Lisans eğitimim sürecinde bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım Erzurum Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü kıymetli hocalarına teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca bana hep güvenen, destek veren, varlıklarıyla güç bulduğum babam Ömer GÖDEKMERDAN' a ve annem Senem GÖDEKMERDAN' a, kardeşlerim M. Tuğrul GÖDEKMERDAN ve H. Turap GÖDEKMERDAN' a tüm fedakarlıkları için minnetlerimi sunarım. Çalışmalarımda beni hep pozitif yönde motive eden, güvenen ve destekleyen eşim Arş. Gör. Ali Can KUZULUGİL' e tüm katkılarından dolayı en içten teşekkürlerimi sunarım. Bu süreçteki sabır ve anlayışlarından dolayı çocuklarım Alper KUZULUGİL ve M. Sencer KUZULUGİL' e en içten sevgi ve şükranlarımı sunarım.

Sümevra Didem KUZULUGİL

Şubat 2022

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
1.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi	2
1.2. Sonlu Elemanlar Yönteminin Tarihsel Gelişim	3
1.3. Sonlu Elemanlar Yönteminin Avantajları	5
1.4. Sonlu Elemanlar Yönteminin Dezavantajları	5
1.5. Sonlu Elemanlar Yönteminin Diferansiyel Denklemlere Uygulanması	6
1.5.1. Ayırıklaştırma.....	6
1.5.2. Elemanlar	7
1.5.3. 2-D Elemanlar	8
1.5.4. Şekil Fonksiyonları	9
1.5.5. Üçgen eleman şekil fonksiyonları	9
1.6. Üçgen Eleman İçin Sayısal İntegral	10
1.7. Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon Olayı	15
1.7.1. Konveksiyon difüzyon reaksiyon denklemi	16
2. KAYNAK ÖZETLERİ	19
3. MATERYAL ve YÖNTEM	22
3.1. Konveksiyon Difüzyon Reaksiyon Problemi	22
3.1.1. Güçlü hal	22
3.1.2. Zayıf hal	23
3.1.3. Varyasyonel hal.....	24
3.2. Cranck Nicolson Şeması	26
3.3. Sonlu Elemanlar Yönteminin Konveksiyon Difüzyon Reaksiyon Denklemine Uygulanması	28
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA	32

5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	37
KAYNAKLAR	388



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

Açıklama

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
Ω	Tanım bölgesi
$\partial\Omega$	Ω bölgesinin sınırı
$L^2(\Omega)$	Ω bölgesinde ikinci dereceden integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$H^1(\Omega)$	$L^2(\Omega)$ uzayının alt uzayı
ε	Difüzyon katsayısı
u_h^e	Bilinmeyen fonksiyonun eleman üzerinde ayrıklaştırılmış çözümü
∇u	Gradyan
$\nabla^2 u$	Laplace operatörü
$\vec{g}$	Konveksiyon katsayısı
σ	Reaksiyon katsayısı
J	Jacobian
Γ	Bölge sınırı
I	Bölge üzerindeki integral
w	Ağırlık fonksiyonu
ts	Tölerans sayısı
N_i^e	Eleman için şekil fonksiyonu
δ_{ij}	Kronocker delta
1D	Bir boyutlu uzay
2D	İki boyutlu uzay
$[K^e]$	Eleman Matris

Kısaltmalar

CDR	Konveksiyon Difüzyon Reaksiyon
FCT	Flux Corrected Transport
FEM	Finite Element Method

GLS	Galerkin Least Square
LPS	Local Projection Stabilization
PCG	Preconditioned Conjugate Gradient
SEY	Sonlu Elemanlar Yöntemi
SOLD	Spurious Oscillations at Layers Diminishing



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Ayırıklaştırma noktalarının numaralandırılması.....	7
Şekil 1.2. Sonlu elemanlar modelinde elemanlar ve ayırıklaştırma noktaları	7
Şekil 1.3. İki boyutlu elemanlar	8
Şekil 1.4. Sayısal İntegral Bölge Dönüşümü	10
Şekil 4.1. Çözüm bölgesinin ayırıklaştırılması	32
Şekil 4.2. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1, \theta = 0,5, t = 0,1$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).....	33
Şekil 4.3. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1, \theta = 0,5, t = 0,3$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).....	33
Şekil 4.4. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1, \theta = 0,5, t = 0,5$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).....	34
Şekil 4.5. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1, \theta = 0,5, t = 1$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).....	34
Şekil 4.6. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1, \theta = 0,5, t = 1,5$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).....	34
Şekil 4.7. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1, \theta = 0,5, t = 2$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ)	35
Şekil 4.8. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,01, \theta = 0,5, t = 0,1$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).....	35
Şekil 4.9. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,01, \theta = 0,5, t = 0,3$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).....	36
Şekil 4.10. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,01, \theta = 0,5, t = 0,5$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).....	36
Şekil 4.11. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,01, \theta = 0,5, t = 0,81$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).....	36

1. GİRİŞ

Mühendislik ve fizik biliminin birçok dalında, gerçek hayat problemlerini modellemek için kullanılan kısmi diferansiyel denklemler 18. Yüzyıldan itibaren çalışılmaya başlanmıştır. Bunun yanı sıra biyoloji, bilgisayar, ekonomi ve kimya gibi farklı bilim dallarında da kullanıldığı görülmektedir. Bu durum, bağımsız değişkenler arasındaki etkileşimin yer aldığı her alanda kısmi diferansiyel denklemlerin ortaya çıktığını göstermektedir.

Bir $u(x_1; x_2; \dots x_n)$ fonksiyonu için kısmi diferansiyel denklemlerin genel formu,

$$F(x_1, x_2, \dots x_n, u; ux_1, ux_2, \dots ux_n) = 0; \quad (1.1)$$

şeklindeir. Burada $x_1, x_2, \dots x_n$ bağımsız değişkenleri, u bilinmeyen fonksiyonu ve ux_i kısmi türev $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ 'yi belirtir. Kısmi diferansiyel denklemlerin analizinin birçok yönü vardır. 19. yüzyılda hâkim olan klasik yaklaşım, açık çözümler bulmak için yöntemler geliştirmiştir. Kısmi diferansiyel denklemlerin mühendislik ve fizikteki önemi nedeniyle, yeni kısmi diferansiyel denklem sınıfının çözümünü sağlayan her matematiksel gelişim mühendislik ve fiziğin ilerlemesine katkı sağlamaktadır. Bu gelişmelerden biri olan Fourier yöntemi ısı transferi gelişiminde etkili olmuştur (Ming 2017). Son yıllarda ısı transferinin alt dallarından biri olan akışkanlar mekaniğindeki modeller araştırmacıların ilgisini çekmektedir. Fizik ve mühendislikte gerek ısı transferi gerekse akışkanlar mekaniği, çok geniş bir uygulama alanı bulmaktadır. Bu yüzden bu alanlardaki her türlü ilerleme pek çok sürecin etkinliğini ve verimini artırmaktadır.

Kısmi diferansiyel denklemler pratikte hala çözülmemiş olan birçok problemi teoride çözmektedir. Teknik ilerlemeleri, çözümün yapısını anlamayı hedefleyen teorik gelişmeler izler. Amaç, gerçekte hesaplamaadan önce ve bazen de tam bir çözüm olmadan çözümün bazı özelliklerini keşfetmektir. Kısmi diferansiyel denklemlerin teorik analizi sadece akademik çıkarlar için değil, aynı zamanda birçok uygulama için kullanılmaktadır. Bilgisayarlarla bile çözülemeyen denklemler için yapabilecek tek şey çözüm hakkında nitel bilgi edinmektir. Genel olarak, denklem bir fiziksel model veya mühendislik

probleminden oluşmaktadır. Kısmi diferansiyel denklemleri çözmenin birçok yolu vardır. Bu nedenle, denklemi çözmeden önce veya çözüm sırasında kapsamlı bir analiz yapmak önemlidir (Pinchover and Rubinsten 2005). 20. yüzyıldan beri, bilgisayarların gelişimiyle beraber, lineer (doğrusal) olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin araştırılması farklı birçok bağımsız alan oluşturmuştur. Bu alanlardan biri de bu denklem çözümlerinin sayısal (nümerik) ve sembolik hesaplanmasıdır (Maghsoudi 2019).

Temel teorik soru, denklem ve buna bağlı yan koşullardan oluşan problemin iyi ortaya konulup konulmadığıdır. Fransız matematikçi Hadamard iyi olma kavramını ortaya atmıştır (Mandelbrojt and Schwartz 1965). Tanımına göre, bir sorun aşağıdakilerin tümünü tatmin ederse iyi olarak adlandırılmaktadır.

- 1. Varlık:** Problemin bir çözümü olmalı,
- 2. Teklik:** Problemin birden fazla çözümü olmamalı,
- 3. Kararlılık:** Denklemden başlangıç ve/veya sınır koşullarda küçük bir değişiklik, çözümde küçük değişikliğe neden olmalıdır.

Yukarıdaki koşullardan biri veya daha fazlası geçerli değilse, problemin iyi olmadığını söylemek mümkündür. Fiziğin temel problemlerinin iyi belirlendiğini söylenebilir. Ancak, bazı mühendislik uygulamalarında iyi tanımlı olmayan sorunlarla başa çıkabiliriz. Uygulamada, bu tür problemler çözümsüzdür. Bu nedenle, iyi tanımlı olmayan bir problemle karşılaştığımızda, ilk adım problemi uygun şekilde değiştirmek olmalıdır (Pinchover and Rubinsten 2005).

1.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Birçok problem için kısmi diferansiyel denklemler analitik olarak çözülemez. Bu yüzden, yaklaşık sonuçların çözümlenmesinde nümerik yöntemler kullanılmaktadır. Genel olarak matematiksel problemlerin çözümü için nümerik yöntemler en uygun sonuçları veren teknikleri geliştirmektedir. Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) de bu bağlamda ortaya çıkmış diferansiyel denklemlerle belirtilen problemlerin çözümünde kullanılan bir sayısal yöntemdir.

Sonlu elemanlar yöntemi ile mühendislik problemleri başta olmak üzere birçok fiziksel ve matematiksel problemin çözümünde kullanılan sonlu elemanlar yönteminden bahsedilecektir. Sonlu elemanlar yöntemi, Sonlu farklar yönteminden daha yaygın bir yöntemdir. Bu yöntem ile karmaşık veya büyük bölgelerde tanımlanan problemlerin, daha basit alt bölgelere ayrıştırılmasıyla, her alt bölge üzerinde bulunan çözümlerin birleşiminden, gerçek çözüme yaklaşık bir çözümün bulunduğu sayısal yöntemdir.

Yöntemin üç temel özelliği bulunur:

1. İlki, karmaşık olan çözüm bölgesinin sonlu elemanlar olarak daha basit alt bölgelere ayrılır. Elemanlar arasındaki ilişki, düğüm noktaları adı verilen noktalarla belirlenir.
2. İkincisi, her elemanın çözümü, cebirsel polinomun lineer kombinasyonlarından oluşan elemanların sürekli fonksiyonlar olarak tanımlanmasıdır.
3. Sonuncusu, bilinmeyen fonksiyonların, her eleman üzerinde tanımlanan denklemlerin belli noktalardaki çözümleri ile bulunur.

Uygulanan yaklaşım fonksiyonları, genel olarak polinomlardan belirlenir. Belirlenen polinomların derecesi ise çözülmesi gereken problemin derecesine ve çözüm yapılacak elemanın ayrıklaştırma nokta sayısı ile ilişkilidir. Bu yöntemde, eleman bazında bilinmeyenler, denklemin çözümünün ayrıklaştırma noktalarındaki sonuçlarıdır (Topçu ve Taşgetiren 2011; Çiftçi 2012).

1.2. Sonlu Elemanlar Yönteminin Tarihsel Gelişim

Sonlu elemanlar yöntemi ilk olarak yapı analizi alanında kullanılmıştır. İlk çalışmalar Hrennikoff (1941) ve Henry (1943)'nin geliştirdikleri yarı analitik analiz metotlarıdır. Hrennikoff ve Henry gerilme çözümleri için bir boyutlu doğru elemanlarını kullanmışlardır. Richard Courant gerilme çözümlerini varyasyonel bir formda kullanmayı önermiştir ve sonrasında Courant yaklaşık nümerik çözümler elde etmek için problemin tanım bölgesini oluşturan alt üçgensel bölgelerde parçalı şekil fonksiyonlarını ifade etmiştir. 1947 yılında Levy esnek (diğer adı ile kuvvet) yöntemini geliştirmiştir. Levy'nin bu yöntemle ulaştığı tüm denklemler analitik olarak kolayca çözülebilir olduğundan çok

fazla kullanılmamıştır. Bilgisayar yazılımlarının artması ile Levy'nin benimsediği yöntem uygulanmaya başlamıştır. Argyis ve Kelsey (1954) enerji prensibini ele alarak “matrix structural analysis” (matrislerin yapısal analizi) metodunu geliştirmişlerdir. Bu gelişim sayesinde, sonlu elemanlar metodunda enerji prensibi etkin derecede yer kazanmıştır. Turner et al. (1956) iki boyutlu elemanlar konusunda çalışmalar yürütülmüştür. Bu konu üzerinde önemli işler ortaya koymuştur. Kiriş ve Kafes eleman, dikdörtgen ve üçgen olarak iki boyutlu eleman matrisini (rijitlik matrisini) meydana getirmişlerdir. İki ve üç boyutlu problemlerin çözümünde kullanılan Sonlu elemanlar terimi ilk kez Ray W. Clough (1960) tarafından dikdörtgen ve üçgen birimlerin düzlemsel gerilme analizi uygulanırken kullanılmıştır. İki boyutlu teoriden sonra, üç boyutlu problem çözümleri de kolayca yapılmaya başlanmıştır (Argyis 1964).

Düzgün büküme sahip dikdörtgensel plaka elemanlarının matrisi Melosh tarafından 1961 yılında geliştirilmiştir. Üç boyutlu yapı analizlerinde kullanılan eksenel ve simetrik ilk gerçek kabuk elemanlardır (Grafton and Strome 1963). Daha sonra bu elemanları diğer kabuk ve silindirik elemanlar takip etmişlerdir. Doğrusal olmayan problemlerle 1960'lı yıllardan itibaren bilim insanları ilgilenmeye başlamıştır. Geometrik olarak doğrusal olmayan problemleri çözmek için yeni bir teknik bulunmuştur (Turner et al. 1960). Martin (1965) ise sonlu elemanlar yöntemiyle ilk defa kararlılık analizini ele almıştır. Daha sonra Sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak statik problemler ile beraber dinamik problemlerde ele alınmaya başlanmıştır (Koenig and Davids 1966; Zienkiewicz et al. 1966). Richard Courant bir burulma problemini 1943 yılında bölgesel sürekli doğrusal yaklaşım kullanarak çözmüştür.

Yapı alanı dışındaki problemlerin sonlu elemanlar yöntemiyle çözümü 1960'lı yıllarda başlamıştır. Sonlu elemanlar yöntemini kullanarak Zienkiewicz and Cheung (1965) Poisson diferensiyel denklemini çözmüştür. Sonlu elemanlar yöntemini Doctors (1970) da potansiyel akışa uygulamıştır. Sonlu elemanlar metodunda çokça kullanılan “varyasyonel formülasyon” terimi de ilk Melosh (1963) tarafından kullanılmış ve Szabo and Lee (1969) tarafından da “ağırlıklı rezidü yöntemi” nin sonlu elemanlar metoduna uygulanması gerçekleşmiştir. Sonlu elemanlar yöntemi geliştirilerek ısı transferi, yeraltı sularının akışı, manyetik alan ve birçok alandaki problemlerin çözümlerinde kullanılmıştır (Logon 2010; Çiftçi 2012).

1970’li yıllardan beri sonlu elemanlar paket programları ortaya çıkmıştır. Günümüzde pek çok sonlu elemanlar analizi yapan Ansys, Abaqus, Adina, COMSOL Multiphysics, Nastran, FreeFEM, Calculix, Elmer, GetFEM++, OOFEM gibi paket programları mevcuttur. İlerleyen bilgisayar teknolojisi doğrultusunda sonlu elemanlar yöntemi daha verimli ve hızlı yöntemleri gerçekleştirecektir (Çiftçi 2012).

1.3. Sonlu Elemanlar Yönteminin Avantajları

1. Geometrisi karmaşık şekilleri kolay bir şekilde modelleyebilmesi,
2. Bölgenin yapısına göre farklı sonlu elemanlar kullanılabilir olması,
3. Eleman denklemleri ayrı ayrı sınıflandırıldığından birkaç farklı materyallerden oluşan yapıların modellenebilmesi,
4. Sınırsız sayıda ve çeşitte sınır koşullarının ele alınabilmesi,
5. Gerekli görüldüğü yerlerde küçük elemanların kullanımı için elemanların boyutlarının değiştirilebilmesi ve daha hassas hesaplamalar yapılabilmesi,
6. Sonlu eleman modelinin daha kolay ve ucuza değiştirilebilmesi, (Logan 2016).

Bu yönleriyle Sonlu elemanlar yöntemi diğer sayısal yöntemlere göre daha esnek ve kullanışlıdır.

1.4. Sonlu Elemanlar Yönteminin Dezavantajları

1. Bazı problemlere uygulanmasında bazı zorluklar vardır,
2. Ulaşılan sonucun doğruluğu verilerin doğruluğuna bağlıdır,
3. Bilgisayar kullanımına gereksinim duyar,
4. Kabul edilebilir doğru sonuca ulaşılabilmesi için bölgenin ayrıklaştırılması deneyim gerektirir,
5. Diğer yaklaşık yöntemlerde olduğu gibi, Sonlu Elemanlar Yöntemi ile ulaşılan sonucun doğruluğu üzerinde dikkat edilmeli ve fiziksel problem iyi irdelenmelidir. Ulaşılabilecek sonuç önceden kestirilmeli ve sonuç ona göre belirlenmelidir (Yahnioğlu 2012).

1.5. Sonlu Elemanlar Yönteminin Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

Bu kısımda sonlu elemanlar yönteminin diferansiyel denklemlere uygulanması aşağıdaki gibi incelenecektir (Reddy 2005).

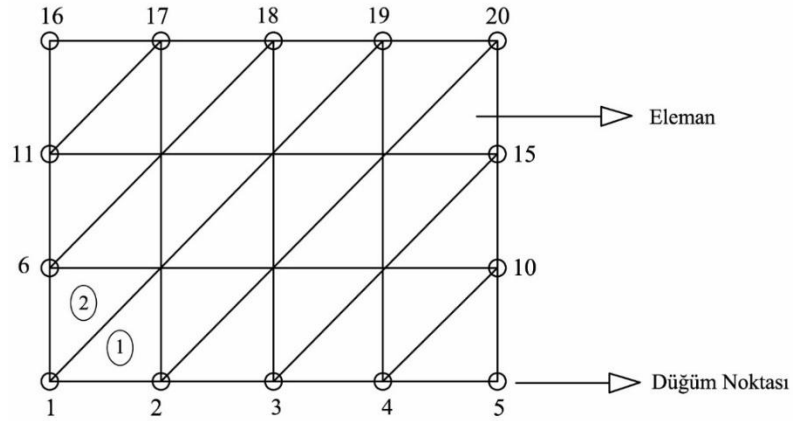
- Bölgenin sonlu elemanlara ayrılması.
- Zayıf veya ağırlıklı integral formülasyonunun elde edilmesi.
- Şekil fonksiyonlarının belirlenmesi.
- Zayıf form ile sonlu elemanlar yönteminin geliştirilmesi.
- Alt eleman matrisi ile bulunan denklemlerin ana matrise eklenmesi.
- Sınır şartlarının uygulanması
- Cebirsel denklem sisteminin çözümü.

1.5.1. Ayırıklaştırma

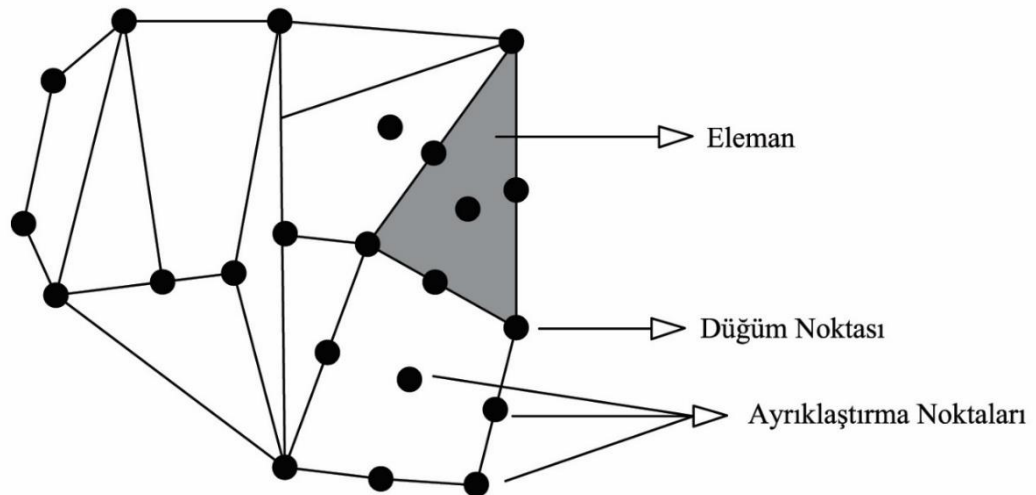
Sonlu elemanlar probleminin ilk adımı, elemanın saptanması ve elemanın türüne göre problemin çözüm bölgesinin alt bölgelere (elemanlara) ayrılmasıdır. Problem çözülürken gerekli olan işlem süresini, bellek miktarını ve yaklaşık çözümün yakınsaklığını, Problemin tanım bölgesinin ayırıklaştırılması etkilemektedir.

Problemin çözüm bölgesine en ideal eleman türü belirlenmelidir. Ayrıca elemanların boyutları ve sayıları da var olan problemi en iyi şekilde temsil edecek, hesaplamaları da minimuma indirgeyecek düzeyde seçilmelidir. Yani, değişken bazı bölgelerde ani bir değişim gösteriyorsa, elemanlar bu bölgelerde yoğun olarak seçilir. Doğru elemanın seçilmesi kadar bu elemanların ve onların ayırıklaştırma noktalarının (düğüm noktalarının) yerleri ve bu ayırıklaştırma noktalarının doğru numaralandırılması bu yöntemin doğru çalışmasını etkileyen faktörler arasındadır (Çepni ve Deniz 2005; Selvitopi 2016).

Sonlu elemanlar yöntemiyle bir bölgenin çözümü için ayırıklaştırılması bu bölgenin basit ve daha küçük alt bölgelere ayrılmasıdır. Yani, her bir alt bölge üzerinde yapılan sade yaklaşımlarıyla çıkan çözümler var olan problemin çözümüne yaklaşık çözümler elde edilir (Selvitopi 2016).



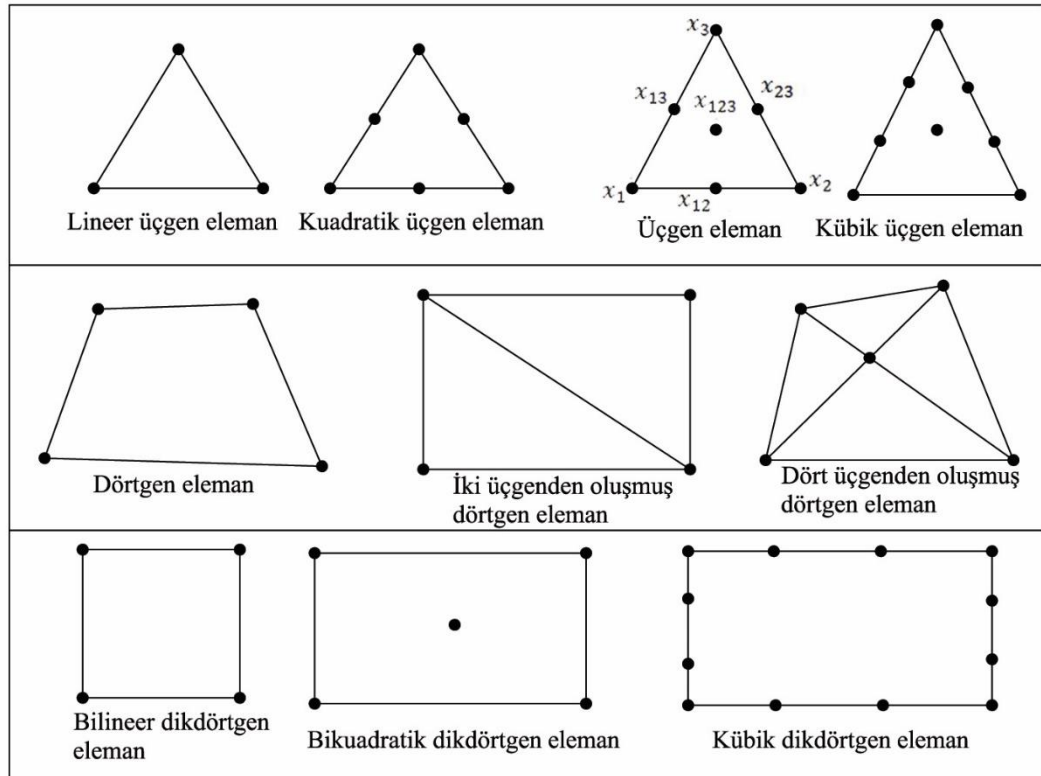
Problemin tanım bölgesi sonlu elemanlar yöntemiyle, eleman olarak nitelenen daha basit alt bölgelere ayrılır (ayrıklaştırma işlemi). Bu elemanların belli noktalarda birbirlerine bağlanarak oluşturduğu noktalara düğüm noktası (node) denir. Düğüm noktaları haricinde yani elemanın içerisinde ya da kenarları üzerinde de noktalar seçilebilir. Düğüm noktalarının ve seçilen bu noktaların hepsine ayrıklaştırma noktaları denir (Selvitopi 2016).



Şekil 1.2. Sonlu elemanlar modelinde elemanlar ve ayrıklaştırma noktaları (Selvitopi 2016).

1.5.3. 2-D elemanlar

Genel olarak iki boyutlu uzayda üçgen ve dörtgen türü elemanlar seçilir. Bu grubun esas elemanı, üç düğümlü olan üçgen elemandır. Üçgen elemanından altı, dokuz ve daha çok ayrıştırma noktaları da seçilebilir. Seçilecek şekil fonksiyonlarının derecesine göre Ayrıklaştırma nokta sayısı belirlenir. Düzgün olmayan bölgelerin ayrıklaştırılmasında genellikle üçgen eleman tercih edilir. Bu yüzden üçgen eleman, çokça tercih edilen ve kullanışlı olan bir eleman türüdür. Doğrusal (lineer) üçgen eleman; ayrıklaştırma noktası üçgenin köşe noktalarından seçilmesiyle, kuadratik (quadratic) üçgen eleman ise ayrıklaştırma noktalarının üçgenin köşe noktalarından ve her bir kenarından bir nokta seçilmesiyle oluşur. Dörtgen eleman ise genelde tanım bölgesinin geometrik yapısına uygun olduğu yerlerde seçilen eleman türüdür. Dörtgen elemanda dört veya daha fazla ayrıklaştırma noktası bulunabilir (Reddy 2005; Çiftçi 2012).



Şekil 1.3. İki boyutlu elemanlar (Breas 2011)

1.5.4. Şekil fonksiyonları

Sonlu elemanlar yönteminde bölgenin ayrıklaştırılması ile bulunan ve bu elemanlar üzerinde seçilip ayrıklaştırma noktalarında tanımlanan şekil fonksiyonlarının (N_i) doğrusal (lineer) kombinasyonu olarak; bilinmeyen fonksiyon $u(x)$, e elemanına yaklaşık düğüm noktalarındaki u_i^e değerleri ile

$$u(x) \approx u_h^e(x) = \sum_{i=1}^n u_i^e N_i^e(x) \quad (1.2)$$

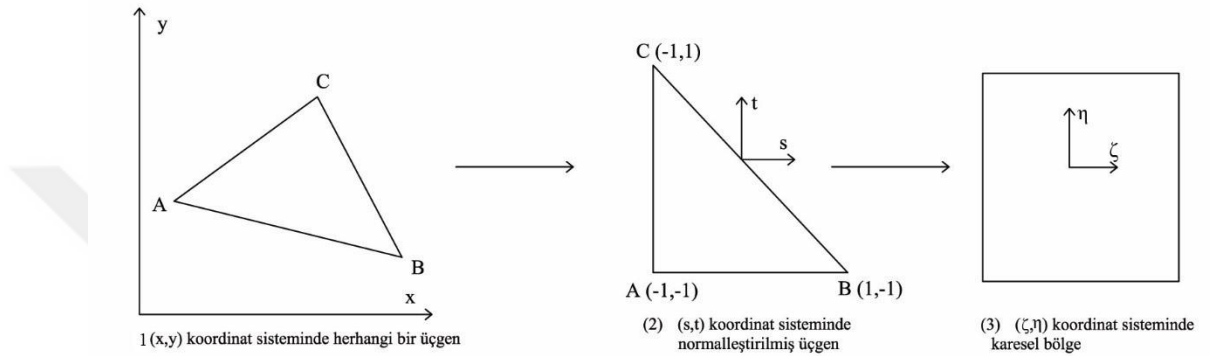
şeklinde tanımlanır. Şekil fonksiyonlarının iki boyutlu uzayda kullanılan özellikleri ve bu çalışmada kullanılan türleri aşağıda belirtilmiştir.

1.5.5. Üçgen eleman şekil fonksiyonları

Üçgen elemanlarla modelleme de yapılacak ilk şey, çözüm bölgesinin üçgenlerle ayrıklaştırılmasıdır. Ayrıklaştırma yapılırken bölgede hiç boşluk kalmayacak şekilde üçgenlere ayrılmasına ve üçgenlerin birbiri üzerine çıkmamasına dikkat edilir. Ayrıca üçgenlerin köşelerinden birbirlerine bağlı olması gerekir. Öyle ki; bir üçgenin köşesi diğer bir üçgenin kenarına denk gelmemelidir. Bu ana şartlara ek olarak başka şartlarda vardır. Üçgenlerin eşkenar üçgene yakın seçilmesi en iyi sonucu bulmamızı sağlar. Üçgenlerin iç açısı küçüldükçe hata oranı artmaktadır. Üçgenin iç açısını küçültmek yerine boyutu daha küçük iç açısı daha büyük üçgen kullanmak daha iyi sonuçlar elde etmemizi sağlar. Üçgenleri tanımlamak için köşe noktaları kullanılır ve bu köşe noktaları düğüm noktalarını oluşturur. Böylelikle bir üçgen elemanın üç kenarı ve üç düğüm noktası bulunmaktadır. Üçgenlerin köşe noktaları ya saat yönünde ya da saat yönünün tersi yönünde olacak şekilde yazılır ve bu köşe noktaları istenilen köşeden başlanarak yazıla bilinir. Burada önemli olan husus hangi köşeden başlanırsa başlansın diğer iki noktanın da kullanılan dönüş yönüne göre yazılması gerekliliğidir. Bu şekilde bölge üçgenlere ayrıklaştırılır. Her bir üçgen üzerinde de noktalar seçilip, şekil fonksiyonları belirlenir (Selvitopi 2016).

1.6. Üçgen Eleman için Sayısal İntegral

Sonlu elemanlar metodu ile üçgen eleman üzerinde alan integralleri sayısal olarak hesaplanırken çoğunlukla Gauss-Kuadratur yöntemi tercih edilir. Bu yöntemi uygularken esas olan Gauss noktaları ve karşılık gelen ağırlık katsayıları ise literatürde tablo halinde sonlu sayıda verilmiştir. Burada, ek olarak Hussain ve Karim (2012) tarafından önerilen sayısal integral hesaplama yöntemi kullanılacaktır.



Şekil 1.4. Sayısal İntegral Bölge Dönüşümü (Selvitopi 2016)

1.4.'deki (1) üçgensel bölgesi, ilk olarak (2)'deki üçgensel bölgeye, sonrasında ise (2)'deki üçgensel bölge, (3)'deki karesel bölgeye dönüştürülür. Bu dönüşüm ile karesel bölge üzerinde Legendre polinomunun kökleri istenilen derecede ve istenilen sayıda nokta kullanılarak sayısal integral hesaplanır.

Yukarıda verilen bölge dönüşümleri aşağıdaki gibidir.

Şekil 1.4.'de (1)'deki rastgele seçilen bir üçgensel bölgeyi (2)'deki normalleştirilmiş üçgensel bölgeye dönüştürelim:

(1)'deki üçgensel bölgenin köşe noktaları $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ olsun. Burada $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \in \mathbb{R}$ dir. $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$I = \int_{\Omega} f(x, y) dx dy \quad (1.3)$$

integrali hesaplayalım. İlk olarak bölge dönüşümleri gösterilecek olursa;

$$x = a_1 + b_1 s + c_1 t \quad (1.4)$$

$$y = a_2 + b_2 s + c_2 t$$

Eşitlikleri ile yapılır. Şekil fonksiyonları ise;

$$N_1 = -\frac{1}{2}(s + t), N_2 = \frac{1}{2}(s + 1), N_3 = \frac{1}{2}(t + 1) \text{ gibidir.} \quad (1.5)$$

(1.4)'deki eşitliklerde Şekil 1.4.'deki (1) ve (2)'deki bölgelerin köşe noktaları kullanılırsa;

$$x_1 = a_1 - b_1 - c_1$$

$$y_1 = a_2 - b_2 - c_2$$

$$x_2 = a_1 + b_1 - c_1 \quad (1.6)$$

$$y_2 = a_2 + b_2 - c_2$$

$$x_3 = a_1 - b_1 + c_1$$

$$y_3 = a_1 - b_1 + c_1$$

eşitlikleri elde edilir. (1.6)'daki eşitlikler matris formunda yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (1.7)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}$$

şeklinde olacaktır. (1.6)'daki eşitliklerden $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ ifadeleri $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ türünden aşağıdaki şekilde gibi elde edilir.

$$a_1 = \frac{x_2 + x_3}{2}$$

$$b_1 = \frac{x_2 - x_1}{2}$$

$$c_1 = \frac{x_3 - x_1}{2} \quad (1.8)$$

$$a_2 = \frac{y_2 + y_3}{2}$$

$$b_2 = \frac{y_2 - y_1}{2}$$

$$c_2 = \frac{y_3 - y_1}{2}$$

Jacobian matrisinin determinanı ise;

$$\begin{aligned} |J| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x_2 - x_1}{2} & \frac{x_3 - x_1}{2} \\ \frac{y_2 - y_1}{2} & \frac{y_3 - y_1}{2} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)\left(\frac{y_3 - y_1}{2}\right) - \left(\frac{x_3 - x_1}{2}\right)\left(\frac{y_2 - y_1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\} = \frac{ALAN}{4} \end{aligned} \quad (1.9)$$

olarak bulunur. (1.3)'deki integral;

$$I = \frac{ALAN}{4} \int_{t=-1}^1 \int_{s=-1}^{-t} f(x(s, t), y(s, t)) dt ds \quad (1.10)$$

integraline dönüşür. Bu şekilde Şekil 1.4.'deki (1) bölgesi (2) bölgesine dönüştürülmüş olur. (2) bölgesini (3) bölgesine dönüştürmek için ise;

$$s = \zeta, \quad t = \frac{(1 - \zeta)(1 + \eta)}{2} - 1 \quad (1.11)$$

alınıp (1.8)'deki eşitliklerle birlikte (1.4) eşitliğinde kullanılırsa;

$$x = \frac{x_2 + x_3}{2} + \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)\zeta + \left(\frac{x_3 - x_1}{2}\right)\left(\frac{(1 - \zeta)(1 + \eta)}{2} - 1\right) \quad (1.12)$$

$$y = \frac{y_2 + y_3}{2} + \left(\frac{y_2 - y_1}{2}\right)\zeta + \left(\frac{y_3 - y_1}{2}\right)\left(\frac{(1 - \zeta)(1 + \eta)}{2} - 1\right)$$

ulaşılır. Bu bölge dönüşümü için Jacobain matrisinin determinanı hesaplandığında;

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial \zeta} & \frac{\partial s}{\partial \eta} \\ \frac{\partial t}{\partial \zeta} & \frac{\partial t}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -(1 + \eta) & \frac{1 - \zeta}{2} \end{vmatrix} = \frac{1 - \zeta}{2} \quad (1.13)$$

olarak bulunur. Bu dönüşümleri (1.10) integralinde yerine yazarsak;

$$I = \frac{ALAN}{4} \int_{\zeta=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 f\left(x\left(\zeta, \frac{(1 - \zeta)(1 + \eta)}{2} - 1\right), y\left(\zeta, \frac{(1 - \zeta)(1 + \eta)}{2} - 1\right)\right) \left(\frac{1 - \zeta}{2}\right) dt ds \quad (1.14)$$

ulaşılır. Dolayısıyla I integrali;

$$I = ALAN \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{1 - \zeta_i}{8}\right) w_i w_j f\left(\zeta_i, \frac{(1 - \zeta_i)(1 + \eta_j)}{2} - 1\right) \quad (1.15)$$

sayısal olarak bu şekilde hesaplanır.

Şekil fonksiyonları ise;

$$N_1 = \frac{1}{4}(\zeta\eta - \zeta - \eta + 1), \quad N_2 = \frac{1}{2}(\zeta + 1), \quad N_3 = \frac{1}{4}(\eta - \zeta - \zeta\eta + 1) \quad (1.16)$$

olarak bulunur.

1.7. Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon Olayı

Kimyasal potansiyel farkının bulunduğu bölgede moleküllerin bir noktadan başka bir noktaya olan hareketine kütle aktarımı denir. Kütle aktarımı, derişim farkı bulunan bir sistemde ya moleküler (difüzyon) ya da konveksiyonla gerçekleşmektedir (Bucholz 2015).

Bir ortamda ısı enerjisinin yükselmesi sonucunda sıcaklık artar ve sıcaklığın arttığı bölgelerde hacimce genleşme ortaya çıkar. Genleşen hacim ise maddenin ortalama yoğunluğunun azalmasına sebep olur. Ortalama yoğunluğu azalan madde ortamda yükselir ve onun boşalttığı yere sıcaklığı düşük yani ortalama yoğunluğu yüksek olan madde geçer. Isınan madde yükseldikçe soğur ve yoğunluğu artar. Yoğunluğun artması çekim etkisini de artırır ve madde ortam içinde alçalır. Bu arada yükselen maddenin yerine geçen daha soğuk madde de ısınır ve bu olaylar aynen tekrarlanır. Isı enerjisinin ortam içinde sebep olduğu yer değıştirme hareketine konveksiyon hareketi denir. (Sanver 1983). Diğer bir ifadeyle mekanik karıştırma, akışkan akımında türbülans, gibi faktörlerle ortaya çıkan konveksiyon sonucu Eddy akımlarından dolayı oluşan kütle aktarımına, türbülanslı difüzyon veya konvektif aktarım denir (Anthony and Verma 2021).

Difüzyon, moleküllerin rastgele hareketleri sonucu yer değıştirmeleri olarak tanımlanır yani moleküllerin bireysel hareketleriyle gerçekleşen kütle aktarımına moleküler (difüzyon) aktarım denir. Maddenin bütün hallerinde farklı özellik ve hızda meydana gelebilir. Difüzyonun ana prensibi, maddenin yoğunluğu yüksek bir ortamdan yoğunluğu düşük bir bölgeye kendiliğinden yayılmasıdır (İnce 2001). İki ortamın yoğunluğu eşitlenene kadar transfer devam eder. Mürekkebin suda, kolonyanın havada, şekerin çayda parfümün odaya yayılması difüzyona örnektir.

Konveksiyon, difüzyon, reaksiyonun önemi, bir ortamda dağıtılan bir veya daha fazla maddenin konsantrasyonunun, nasıl değıştiğini fiziksel problemler kullanarak açıklar. Konveksiyon, taşıma ortamı nedeniyle maddelerin hareketini sunar. Difüzyon, uygulamalara bağlı olarak maddenin daha yüksek bir konsantrasyondan daha düşük bir

konsantrasyona ve bunun tersi hareketini doğrulayarak maddenin düzgün dağılımını korur ve reaksiyonda etkileşimdir. Yani Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon (CDR) modeli, madde konsantrasyonunun nasıl dağıldığını ifade eden matematiksel bir modeldir (Lima et al. 2021). Bu tezde, bu problemin çözümü sayısal olarak incelenecektir.

1.7.1. Konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemi

Bilimde ve modern yaşamda, konveksiyon-difüzyon-reaksiyon diferansiyel denklemleri faydalı, etkili ve hayati bir matematiksel model sağlar (Lima et al. 2021). Konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemleri, yakıt hücrelerinde, iyon taşınımında (Asinari et al. 2007; Suzue et al. 2008), ve gözenekli ortamlarda yüzey reaksiyonları gibi mühendislik uygulamalarında skaler niceliklerin (kütle ve konsantrasyon) evrimini tanımlamak için yaygın olarak kullanılmaktadır (Wang et al. 2007; Willingham et al. 2008). Bunlara ek olarak Konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemi, aşağıdaki yer alan birçok önemli konuda da uygulanmaktadır (Lima et al. 2021).

- Havacılık,
- Toprak kirleticileri,
- Nötron difüzyonu
- Elastikiyet ile ısı iletimi
- Gıda işletmeciliği,
- Kimyasal türlerin reaksiyonu,
- Yarı iletkenlerin ve biyolojik sistemlerin modellenmesi
- Doğrusal olmayan akustik ve akışkanlar mekaniği,
- Gaz dinamiği, trafik ve sayı teorisi,

Karmaşık ve doğrusal olmaması nedeniyle, Konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemlerinin genellikle sayısal olarak çözülmesi gerekir. Bu denklemler için geleneksel sayısal yöntemler, sonlu fark, sonlu eleman, spektral yöntemler ve benzerleridir (Baliga et al. 1980; Izadkah et al. 2015; Morton et al. 2019; Xie et al. 2021).

Konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemi, u skaler değerli fonksiyon, Dirichlet sınır koşulları ve Ω tanım bölgesinde, $(0, T]$ sınırında tanımlı ε difüzyon katsayısı,

1. GİRİŞ

$\tau(x)$ reaksiyon katsayısı, $\overrightarrow{g(x)}$ sabit veya sabit olmayan taşınım katsayısı olmak üzere zaman bağımsız konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemi şu şekilde yazılır;

$$-\varepsilon \nabla^2 u + \overrightarrow{g(x)} \nabla u + \tau u = h \quad (1.17)$$

$\sigma(t, x, y)$ reaksiyon katsayısı, $\overrightarrow{g(t)}$ zamana bağlı taşınım katsayısı olmak üzere zaman bağımlı konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemi ise şu şekilde yazılır;

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \nabla^2 u + \overrightarrow{g(t)} \nabla u + \sigma u = h \quad (0, T] \times \Omega \quad (1.18)$$

$u(x, t)$ bu denklemin bir çözümüdür. İyi tanımlanmış probleme sahip olmak için sınır koşulları; Dirichlet tipi ($u = \bar{u}$), Neymann tipi ($\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}$), α ve μ sabitler olmak üzere; Karışık tipi ($\alpha u + \mu \frac{\partial u}{\partial n} = g$) olarak alına bilinir. $\bar{u} = \bar{u}(x, y, t)$, $\bar{q} = \bar{q}(x, y, t)$ ve $g(x, y, t)$ fonksiyonlardır. Ayrıca $\partial\Omega$ çözüm bölgesinin sınırını göstermek üzere başlangıç ve sınır koşulu şu şekilde verilir.

$$U(x, 0) = U_0(x) \quad (1.19)$$

$$U(\partial\Omega, t) = U_1(x, t)$$

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Konveksiyon-difüzyon problemlerinin çözümü için yapılan bir çalışmada sayısal bir metot oluşturulmuştur. Üç boyutlu problemlerle de geliştirilebileceği gibi, metot genel olarak iki boyutlu problemler için formüle edilmiştir. Hesaplama alanı üç düğümlü üçgenlere bölündükten sonra elde edilen elemanların merkezinden karşılık gelen kenarların orta noktalarına birleştirmek suretiyle çokgen kontrol hacimleri ile elde edilir. Her elemanda, ortalama hız vektörü doğrultusunda ve buna dik yönde bağımlı değişken enterpole edilmektedir. Bu fonksiyonlar sıfıra yaklaştıkça lineer hale gelirken, Peclet sayısına cevap vermektedir. Ayırıklaşma denklemlerinin elde edilmesi için ise, çokgen kontrol hacimlerine uygulanan integral korunum denklemlerine cebirsel yaklaşımlar kullanılmaktadır (Baliga et al. 1980).

Tezduyar ve Park (1986) çalışmasında, Konveksiyonun ve reaksiyonun baskın olduğu akışlarda keskin iç ve sınır tabakaları hakkındaki salınımları en aza indirmek için SUPG (Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin) yöntemini tanımlamıştır.

Zaman bağımsız Konveksiyon-difüzyon denkleminin kararlı halinin ve difüzyon katsayılı konum değişken halinin analitik çözümünü incelemiştir (Vilhena 1992).

Codina (1998) yaptığı çalışmasında zamana bağlı Lineer difüzyon-konveksiyon-reaksiyon denklemini çözmek için birkaç sonlu eleman yöntemini karşılaştırmıştır. Bunlardan SUPG yönteminin de bulunduğu birçok yöntem arasındaki benzerlik ve farklılıklar belirlenmiştir. Kararlı sonlu elemanlar yöntemlerinin uygulanmasındaki ana fikir, zamana bağlı denklemin zamansal ayırıklaştırılmasından sonra, denklemin kararlı hal konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemi formunu almasıdır.

Bu çalışmada hp-sonlu elemanlar yöntemi ile Konveksiyon-difüzyon denkleminin çözümünü incelemişlerdir (Melenk et al. 1999).

En küçük kareler yöntemi ile sonlu elemanlar metodunun singüler pertürbe konveksiyon-difüzyon problemlerinin çözümlerini incelemişlerdir (Lazarov et al. 2000).

Burman and Hansbo (2004) yaptıkları çalışmada, sonlu elemanları yöntemi ile konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemleri ve Stokes problemleri için bir kenar kararlılık yöntemini uygun bulmuşlardır. Yöntem, eleman sınırları boyunca gradyan sıçramalarının en küçük kare kararlılığı ele alınmıştır.

Lai and Tseng (2005) çalışmalarında kutupsal koordinatlarda verilen değişken katsayılı konveksiyon-difüzyon denklemini sonlu farklar yöntemini kullanarak preconditioned conjugate gradient (PCG) yöntemi ile çözümünü incelemiştir.

Bu çalışmada, Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon problemleri çerçevesinde Petrov-Galerkin yönteminin birkaç yaklaşımını ele almışlardır. SUPG, Galerkin Least square (GLS) yönteminin ve Subgrid Scale yönteminin davranışı çeşitli yollarla araştırılmıştır (Chaple 2006).

Knobloch (2006) yaptığı çalışmada üçgen parçalı lineer sonlu elemanlar kullanarak skaler iki boyutlu sürekli taşınım-difüzyon denklemlerinin sayısal çözümü için Mizukami-Hughes yöntemini ele almıştır, Ayrıca Mizukami-Hughes yönteminin konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemlerine ve üç boyutlu problemlere nasıl uygulanabileceğini göstermiştir.

Zaman bağımlı konveksiyon-difüzyon denklemlerinin süresiz Galerkin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümünü ve uygulamasını incelemiştir (Sudirham et al. 2006).

Skaler zamana bağlı konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemleri için uygun sonlu eleman metotları tanımlamanın ilk aşamalarını belirtildiği bir çalışmada farklı parametrelere sahip SUPG metotları, çeşitli SOLD (Spurious Oscillations at Layers Diminishing) metotları, bir LPS (Local Projection Stabilization) şeması ve iki FEM-FCT (Finite Element Method - Flux Corrected Transport) metodu gibi uygun olan metotların çoğu sayısal olarak karşılaştırılır. Bilindiği kadarıyla, bu metotlarının çoğu şimdiye kadar zamana bağlı problemlerin simülasyonunda henüz kullanılmamıştır. Ayrıca, konveksiyon baskın ve reaksiyon baskın denklemlerin sonlu eleman metotlarının stabilizasyonu için FEM-FCT metotları daha geleneksel şemalarla olduğu görünüyor. Bu çalışmanın esas

amacı, SUPG metoduyla ulaşılan çözümü önemli ölçüde geliştirmeyi sağlayacak metotları belirlemektir (John et al. 2008).

Burman (2010) çalışmasında, Süreksiz adveksiyon denkleminin zaman/uzay ayrıklaştırması Petrov–Galerkin yöntemiyle ele alınmıştır. Yöntemde, zaman türevinin kararlılık terimine dahil edilmesi tutarlılık göstermektedir. Hem ileriye doğru Euler yöntemi, hem Crank-Nicolson şeması hem de ikinci dereceden geriye doğru farklılaşma formülü kullanılır ve bu şemalar için yarı-optimal yakınsama kanıtlanmıştır.

Sınır tabakası içeren bir boyutlu konveksiyon-difüzyon denklemini, normal sonlu eleman metodunda kullanılan şekil fonksiyonlarının sınır tabakasının olduğu yerde, sınır tabakası içeren aynı yapıda ek fonksiyonlar ile geliştirilmesi ile elde edilen yeni formülasyon ile çözümüne ulaşılmıştır (Kellogg et al. 2010).

Sonlu elemanlar yöntemi, makine mühendisliği konularından olan akışkanlar dinamiği ve yapısal analiz gibi alanlarda problemleri çözmek için geliştirilmiş olan bu çalışmada, birçok açıdan Sonlu elemanlar yöntemi, sonlu farklar yöntemi ile benzerlik göstermektedir. Her iki yöntem de genellikle aynı fiziksel sorunları çözmek için kullanılabilir ve her iki yöntem de sonunda $Ax = b$ biçiminde bir matris-vektör denkleminin tersine çevrilmesi ile elde edilmektedir (Nagel 2012).

Zhong et al. (2018) çalışmasında, kararsız difüzyon-konveksiyon-reaksiyon denkleminin çözümü için geliştirilmiş spektral Galerkin yöntemine dayalı açık bir sayısal algoritma sunmakta olup, Sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal çözümler iki örnek üzerinden karşılaştırılarak yöntemin etkili olduğu gösterilmiştir.

Bu çalışmada Bakhvalov tipi ağlar üzerinde konveksiyon-difüzyon denklemi lineer sonlu elemanlar yöntemi ile çözülmektedir. Çözümde, ilk kez Bakhvalov tipi ağlar üzerinde aşırı yakınlık sonucu elde edilmiştir (Zhang and Liu 2021).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Konveksiyon Difüzyon Reaksiyon Problemi

Bu bölümde ilk olarak konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denkleminin güçlü hal, zayıf hal ve varyasyonel hal olmak üzere üç farklı durumu incelenecektir.

3.1.1. Güçlü hal

Konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemi Ω bölgesinde;

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \nabla^2 u + \vec{g}(t) \nabla u + \sigma u = h \quad (3.1)$$

eşitliği

$$u(x, y, 0) = 0 \quad (3.2)$$

$$u(\partial\Omega, t) = 0$$

başlangıç ve sınır koşulları ile tanımlanır. Denklemden u bilinmeyen fonksiyon $\vec{g}(t)$ zamana bağlı konveksiyon katsayısı ve h ise dış fonksiyon olmak üzere;

$$\nabla^2 u(x, y) = \nabla \cdot \nabla u = \text{div grad } u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\nabla u(x, y) = \text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.3)$$

$$g(t) \nabla u = g_1 \frac{\partial u}{\partial x} + g_2 \frac{\partial u}{\partial y}$$

olarak yazılabilir.

Bilinmeyen u fonksiyonu, denklemini Ω bölgesinde ve sınır şartlarını tüm sınırlarda sağlayacağından, problemin bu haline güçlü hal (strong form) denir (Çiftçi 2012).

3.1.2. Zayıf hal

İlk olarak aşağıdaki bazı uzayları tanıyalım.

$$L^2(\Omega) = \left\{ u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < \infty \right\} \quad (3.4)$$

$$H^1(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega): u' \in L^2(\Omega) \}$$

$$V = H_0^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega): u = 0, \quad \partial\Omega \}$$

Öyle ki;

$L^2(\Omega)$: Ω bölgesinde ikinci dereceden integrallenebilir fonksiyonlar uzayı,

$H^1(\Omega)$: $L^2(\Omega)$ uzayının alt uzayı,

$H_0^1(\Omega)$: Ω sınırında sıfır değerini alan $H^1(\Omega)$ uzayının alt uzayı simgelemektedir.

Konveksiyon difüzyon reaksiyon probleminin zayıf halini bulmak için ilk olarak yukarıda verilen diferansiyel denklemin güçlü haline ulaşmasını sağlayan $u \in V$ için, güçlü hali homojen formda yazılır, sonra problemin tanım bölgesinde bir ağırlık fonksiyonu w ile çarpılıp integral alınarak değeri sıfıra eşitlenir. Bu uygulanan yöntemle ağırlıklı rezidü yöntemi denir (Selvitopi 2016).

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \nabla^2 u + \vec{g}(t) \nabla u + \sigma u - h \right) w dx dy = 0 \quad (3.5)$$

biçiminde olur. Burada $-\nabla^2 u w$ terimine Divergence teoremi uygulanırsa;

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) w d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla w d\Omega + \oint_{\Gamma} w (n \nabla u) ds \quad (3.6)$$

elde edilir. (3.6) denklemi (3.5)'de yerine yazılırsa;

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} w + \nabla u \nabla w + \vec{g}(t) \nabla u w + \sigma u w - h w \right) dx dy - \oint_{\Gamma} w (n \nabla u) ds = 0 \quad (3.7)$$

elde edilir. Burada, $n = (n_x, n_y)$ Γ sınırında birim vektördür.

$$q_n = (n \cdot \nabla u) = n_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_y \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.8)$$

olduğundan (3.5) denklemi

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} w + \nabla u \nabla w + \vec{g}(t) \nabla u w + \sigma u w - h w \right) dx dy - \oint_{\Gamma} w q_n ds = 0 \quad (3.9)$$

denklemine indirgenir. Bu haline zayıf hal denir (Çiftçi 2012).

3.1.3. Varyasyonel hal

Ω bölgesindeki bilinmeyen u fonksiyonu her bir e elemanı üzerinde;

$$u(x) \approx u_h^e(x) = \sum_{i=1}^n u_i^e N_i^e(x) \quad (3.10)$$

ayrıklaştırılmış formda tanımlansın.

Eşitlikte $u_i^e = u(x_i)$, $N_i^e(x)$ ve δ_{ij} kronecker delta fonksiyonunu göstermek üzere;

$$N_i^e(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0 & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad (3.11)$$

özelliğinde olan lineer şekil fonksiyonlarıdır.

Yaklaşık çözüm değerinin gerçek çözüme yakınsaması için $u_h^e(x)$ yaklaşımı üzerinden aşağıdaki durumlar belirtilmektedir.

$u_h^e(x)$ eleman ve elemanların bağlantı noktaları üzerinde sürekli olmalıdır.

Baz polinomlarına ait bütün terimler lineer bağımsız olmalıdır.

$u_h^e(x)$ yi belirten polinomlar tam olmalıdır.

Problemin zayıf halinde sonlu elemanlar yaklaşımının yerine yazılması ile elde edilen integral eşitliği, Ω bölgesinin ayrıklaştırıldığı her bir alt bölge üzerinde hesaplanır. Böylece problemin varyasyonel (ayrıklaştırılmış) hali elde edilir.

İki boyutlu uzayda varyasyonel halini inceleyelim. Denklem (3.9)'da u yerine denklem (3.10)' da ki yaklaşım yazılırsa;

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ w \cdot \sum_{i=1}^n u_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \sum_{i=1}^n u_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \sum_{i=1}^n u_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial y} + q_1 w \sum_{i=1}^n u_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right. \\ \left. + q_2 w \sum_{i=1}^n u_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial y} + w \sigma \sum_{i=1}^n u_i^e N_i^e - wh \right\} dxdy - \oint_{\Gamma_e} w q_n ds \\ = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

eşitliği elde edilir. Problemin bu haline ayrıklaştırılmış hali denir. Ağırlık fonksiyonu da şekil fonksiyonu türünden yazılırsa,

$$\nabla w = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x}, \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) \quad \nabla u = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}, \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) u_i^e \quad (3.13)$$

eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial t} + \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} + q_1 N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + q_2 N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right. \right. \\ \left. \left. + \sigma N_j^e N_i^e \right) u_i^e \right\} dxdy - \int_{\Omega} h N_j^e dxdy - \oint_{\Gamma_e} w q_n ds = 0, j \\ = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.14)$$

eşitliği elde edilir.

3.2. Cranck Nicolson Şeması

Cranck-Nicolson şeması ilk kez 1947 yılında Cranck ve Nicolson tarafından bulunmuştur. Zamanda geriye doğru merkezi fark yöntemi, fonksiyonun zamana göre türevini birinci mertebeden hesaplarken Crank-Nicolson şeması tek aşama yerine zamanda şimdiki ve sonraki adımın toplamının yarısını ifade eder ve ikinci mertebeden olur.

Cauchy problemi uygun başlangıç koşullarında, vektörel veya skaler durumlarda, bir diferansiyel denklemin çözümünün bulunmasını içerir. Özellikle skaler durumda I t_0 'ı içerecek şekilde $\mathbb{R}$ nin bir aralığı olmak üzere, Cauchy problemi;

$$y' = f(t, y), \quad t \in I \quad (3.15)$$

$$y_0 = y(t_0)$$

denklemini sağlayan $y \in C^1(I)$ fonksiyonunu bulmaktır. Burada $f(t, y)$ fonksiyonu,

$S = I \times (-\infty, \infty)$ üzerinde gerçel değerli ve her iki değişkene göre sürekli. Eğer f fonksiyonu t ye göre sürekliyse aşağıdaki çözüm sağlanır.

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (3.16)$$

Tersine y fonksiyonu tanımlı ise I da sürekli ve $y(t_0) = y_0$ dır. Ayrıca y fonksiyonu $f(., y(.))$ sürekli fonksiyonun ilkel olduğu için $y \in C^1(I)$ dir ve $y' = f(t, y)$ denklemi sağlanır. Böylelikle cauchy probleminde f sürekli ise, integral denkleminde denktir (Quarteroni et al. 2000).

Crank-Nicolson yönteminde verilen integral denkleminde $\int f(t, y) dt$ integraline f nin t_n ve t_{n+1} in orta noktasındaki interpolasyon polinomu yazılarak ulaşılır.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})] \quad (3.17)$$

Yönteminin mertebesine ulaşılması için gerçek çözüm denklemde yazılarak $y(t_{n+1})$ t_n civarında taylor serisine açılırsa;

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) - y(t_n) &= \frac{h}{2} [f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))] \\ &= \left[y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{1}{2} h^2 y''(t_n) + O(h^3) \right] - y(t_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{h}{2}[(t_n) + y'(t_n) + hy''(t_n) + O(h^2)] \\ & = O(h^3) = O(h^{p+1}) \end{aligned} \tag{3.18}$$

sonucuna ulaşılır. Burada $p = 2$ dir. Böylelikle Crank-Nicolson yönteminin mertebesi 2 olduğuna ulaşılır (Quarteroni et al. 2000).

3.3. Sonlu Elemanlar Yönteminin Konveksiyon Difüzyon Reaksiyon Denkleminin Uygulanması

Gerçek hayattan kaynaklanan sorunlara analitik bir çözüm bulmak çok zordur; bu yüzden sayısal yöntemler, yaklaşık çözümler elde etmemize önemli ölçüde yardımcı olabilir. Sonlu elemanlar yöntemi en verimli sayısal yöntemlerden biridir. Sonlu elemanlar yöntemi, diferansiyel denklemlerin sonlu sayıda ağ noktalarına güçlü bir şekilde ayrıştırılması ve ardından çözüme yaklaşması ile tanınır (Lima et al. 2021). Bu bölümde, konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denkleminin sayısal çözümü için SEY kullanılarak formüle edilecektir.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \nabla^2 u + \vec{g}(t) \nabla u + \sigma u = h \tag{3.19}$$

denkleminin ağırlıklı rezidü yöntemi uygulanırsa;

$$\int_{\Omega} \left[w \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \nabla^2 u + \vec{g}(t) \nabla u + \sigma u - h \right) dx dy \right] = 0 \tag{3.20}$$

eşitliği elde edilir. Denklem (3.20)'de $-\nabla^2 uw$ terimine Divergence teoremi uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} w \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) dx dy \\
 & + \varepsilon \int \nabla u \nabla w dx dy \\
 & + (g_1 + g_2) \int \nabla u w dx dy \\
 & + \sigma \int u \cdot w dx dy - \int h w dx dy = 0
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

eşitliği elde edilir. Zaman değişkeni için sonlu farklar yöntemi kullanılarak,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} w \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right) dx dy \\
 & - \varepsilon \int [\theta (\nabla u^{n+1} \nabla w) + (1 - \theta) (\nabla u^n \nabla w)] dx dy \\
 & + \int [\theta (g_1^{n+1} + g_2^{n+1}) \nabla u^{n+1} w \\
 & + (1 - \theta) (g_1^n + g_2^n) \nabla u^n w] dx dy \\
 & + \sigma \int [\theta u^{n+1} w + (1 - \theta) u^n w] dx dy - \int h w dx dy \\
 & = 0
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

eşitliği elde edilir.

Ω üzerinde yaklaşık sonlu eleman u fonksiyonu

$$u(x, y, t) \approx \sum_{i=1}^n u_i^e(t) N_i^e(x, y) \tag{3.23}$$

biçiminde tanımlansın.

$$w = N_j^e(x, y) \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{u^{n+1}}{\Delta t} (N_i^e N_j^e) + \theta \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) u^{n+1} \\
 & + \theta \left(g_1^{n+1} N_i^e \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + g_2^{n+1} N_i^e \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) u^{n+1} \\
 & + \sigma \theta N_i^e \cdot N_j^e \cdot u^{n+1} \\
 & = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{u^n}{\Delta t} (N_i^e N_j^e) \\
 & - (1 - \theta) \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) u^n \\
 & - (1 - \theta) \left(g_1^n N_i^e \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + g_2^n N_i^e \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) u^n \\
 & - \sigma (1 - \theta) N_i^e \cdot N_j^e \cdot u^n + \sum_{i=1}^n h N_i^e
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

elde edilir. Denklemden yer alan terimler gruplandırılır ise;

$$M_{ij}^e = \int_{\Omega_e} N_i^e N_j^e dx dy$$

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega} \left\{ \varepsilon \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) + \sigma N_i^e \cdot N_j^e \right\} dx dy$$

$$L_{1ij}^e = \int_{\Omega} \left\{ g_1^{n+1} N_i^e \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + g_2^{n+1} N_i^e \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right\} dx dy \tag{3.26}$$

$$L_{2ij}^e = \int_{\Omega} \left\{ g_1^n N_i^e \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + g_2^n N_i^e \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right\} dx dy$$

$$h_i^e = \int_{\Omega} h(x, y, t) N_i^e dx dy$$

elde edilir. Denklem sistemi,

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{1}{\partial t} M \right] \{u^{n+1}\} + \theta [K] \{u^{n+1}\} + \theta [L_1] \{u^{n+1}\} & \quad (3.27) \\
 = \left[\frac{1}{\partial t} M \right] \{u^n\} - (1 - \theta) [K] \{u^n\} + (1 - \theta) [L_2] \{u^n\} \\
 + \{h\}
 \end{aligned}$$

biçiminde matris formunda yazılabilir.

$n \times n$ boyutlarında denklem sistemi elde edilir.

$$\theta = \begin{cases} 0 & \text{ileri fark} \\ \frac{1}{2} & \text{Crank Nicolson} \\ 1 & \text{geri fark} \end{cases} \quad (3.28)$$

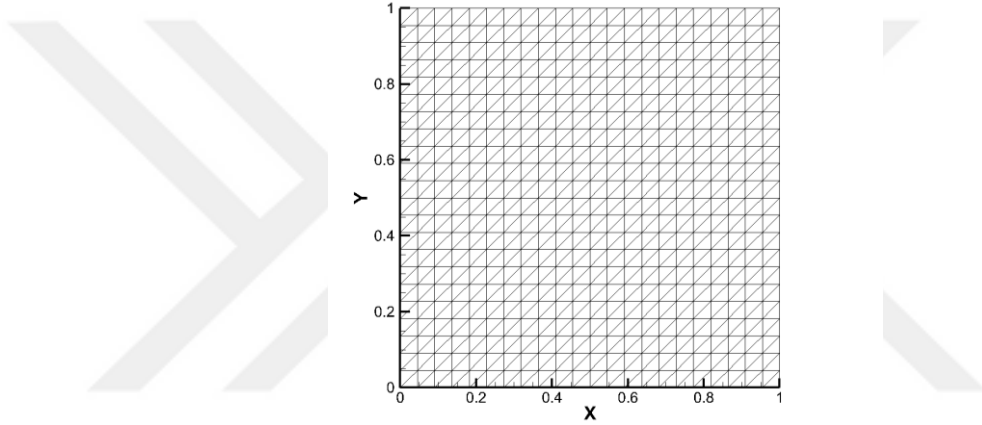
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

ÖRNEK 1.

Konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemi;

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \nabla^2 u + \vec{g}(t) \nabla u + \sigma u = h \quad t > 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (4.1)$$

eşitliği ve $u(x, y, 0) = 0$, $u(\partial\Omega, t) = 0$ sınır koşullarında $h = 1$, $g_1 = 1$, $g_2 = 1$ $\sigma = 1$ ve aşağıda verilen şartlar altında incelenecektir.



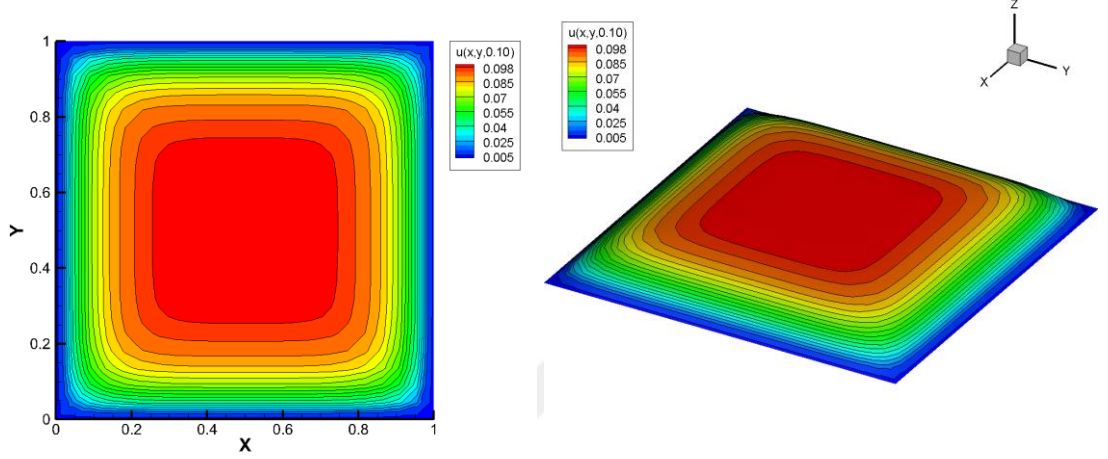
Şekil 4.1. Çözüm bölgesinin ayrıklaştırılması.

Denklem (4.1)'de verilen problemin farklı ε değerleri ve $\vec{g}(t)$ fonksiyonu için $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ bölgesinde sayısal çözüm elde edilmiştir. Ayrıca çözüm aşamasında bütün durumlar için zaman adım uzunluğu $t = 0,01$ olarak alınmıştır.

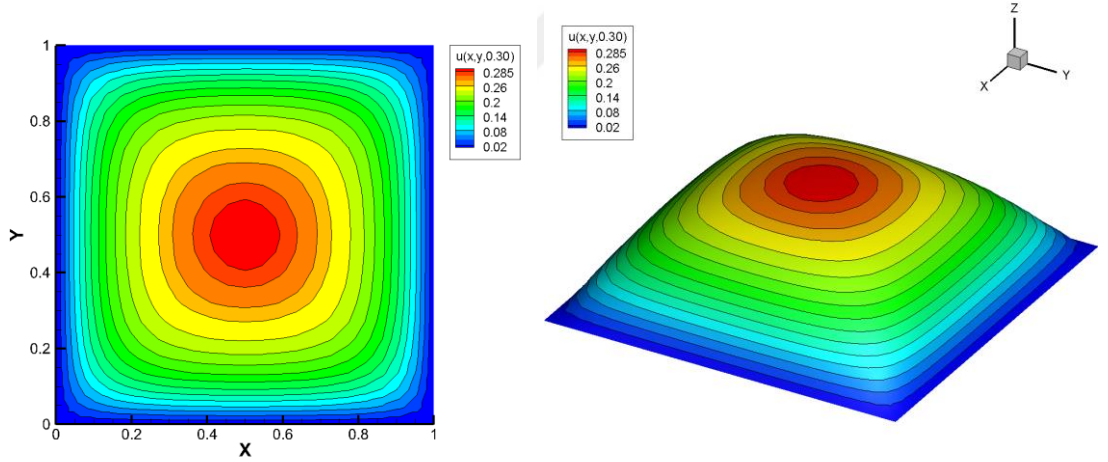
(4.1)'de ki probleme tezde önerilen sayısal şema uygulanırken $\theta = 1/2$ alınarak zaman yönü için Crank-Nicolson sayısal şeması önerilmiştir.

Şekil 4.1'de problem çözüm bölgesinin ayrıklaştırılması verilmiştir. Problem çözüm bölgesi ayrıklaştırılırken, 529 düğüm noktası kullanılarak 968 eleman elde edilmiş ve çözüm sürecinde kullanılmıştır.

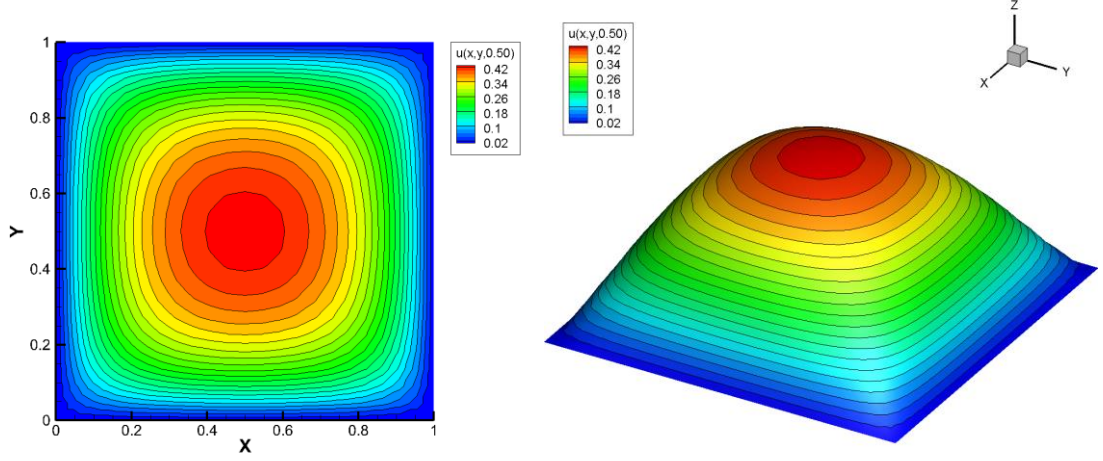
Şekil (4.2) – (4.7) ile $\varepsilon = 0,1$ ve $\vec{g}(t) = (1,1)$ değerleri için sayısal çözümler kontur eğrisi ve 3-boyutlu model ile verilmiştir. Elde edilen sayısal çözümler irdelendiğinde zaman ilerledikçe çözüm değerlerinin büyüdüğü gözlemlenmiştir.



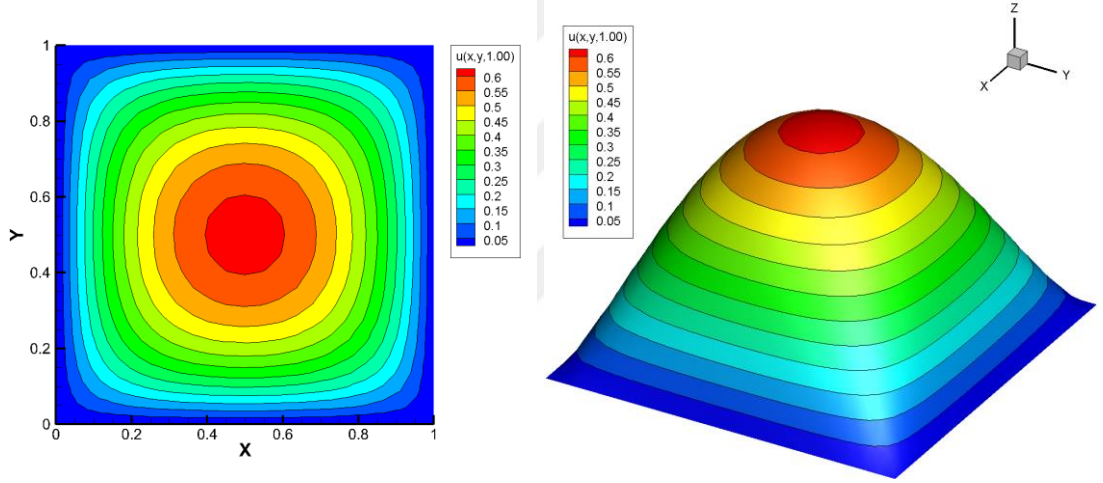
Şekil 4.2. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1$, $\theta = 0,5$, $t = 0,1$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).



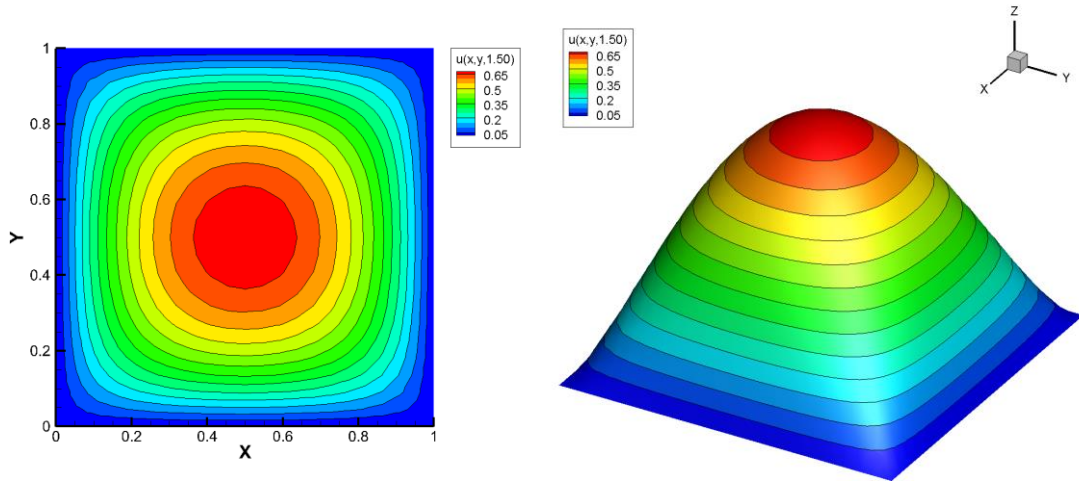
Şekil 4.3. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1$, $\theta = 0,5$, $t = 0,3$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).



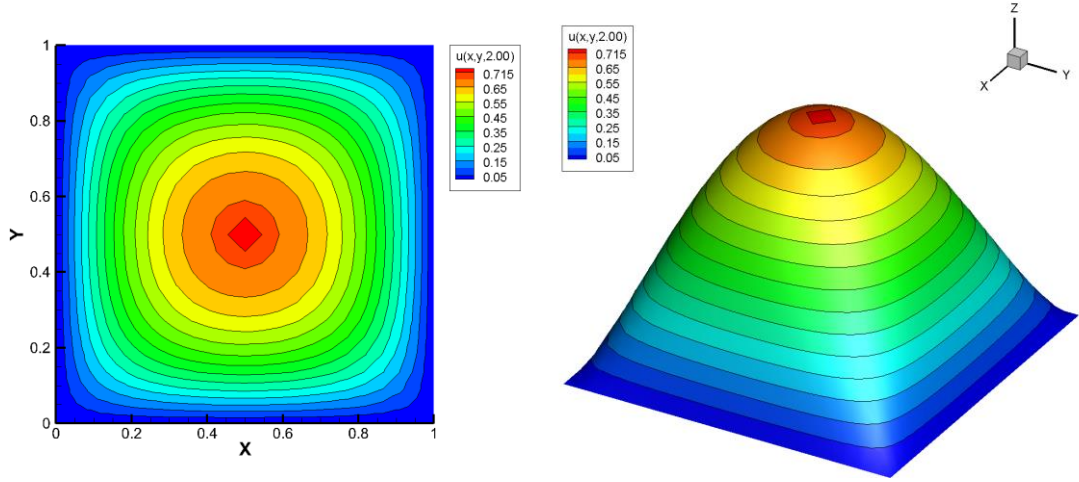
Şekil 4.4. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1$, $\theta = 0,5$, $t = 0,5$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).



Şekil 4.5. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1$, $\theta = 0,5$, $t = 1$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).



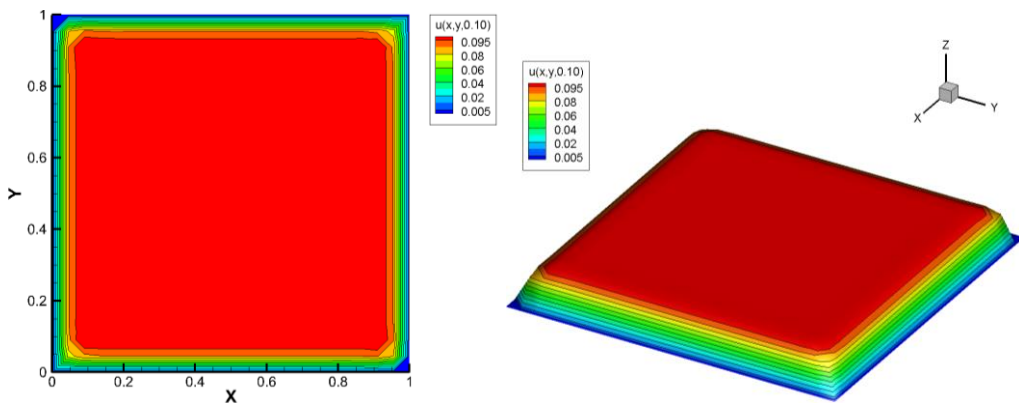
Şekil 4.6. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1$, $\theta = 0,5$, $t = 1,5$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).



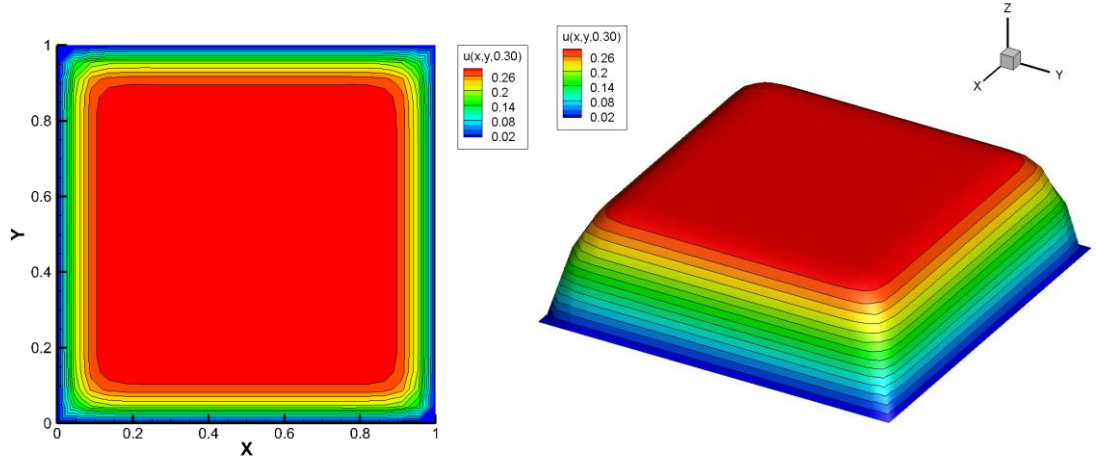
Şekil 4.7. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,1$, $\theta = 0,5$, $t = 2$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).

Şekil 4.8 ve Şekil 4.9'de $\varepsilon = 0,01$ ve $\vec{g}(t) = (t, t)$ değerleri için $t = 0,1, 0,3, 0,5$ ve $t = 0,81$ zaman adımlarında sayısal çözümler elde edilmiştir. (4.1)'de verilen denklem ısı-tür olduğu için $\max_i |u_i^{n+1} - u_i^n| < ts$ şartını sağlayan $(n + 1)$ inci zaman seviyesinde kararlı çözüm elde edilir. Burada $ts = \text{tölerans sayısı}$ olarak sembolize edilmektedir.

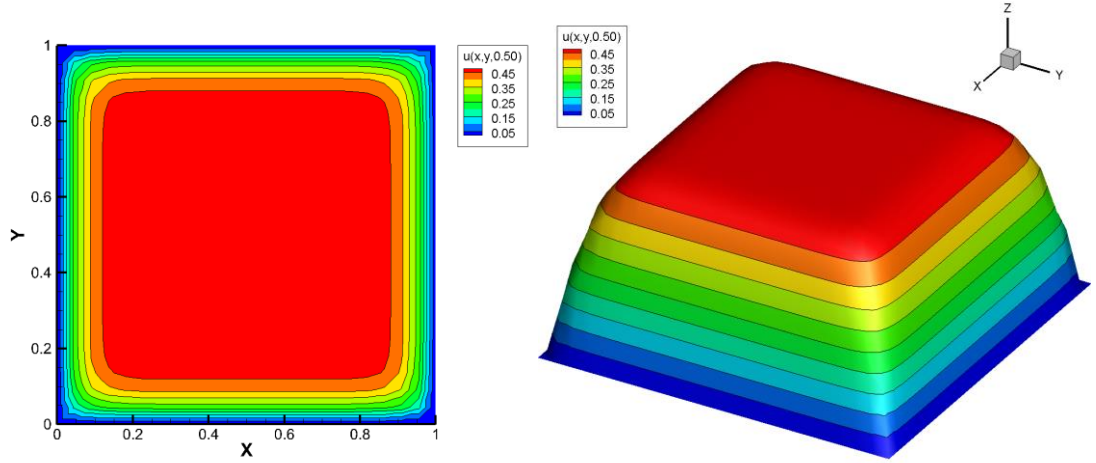
Şekil (4.8) ve Şekil (4.9) ile $\varepsilon = 0,01$ ve $\vec{g}(t) = (t, t)$ değerleri için problem (4.1) in sayısal çözümleri sunulmuştur. Çözüm elde edilirken $ts = 10^{-2}$ olarak alınmış ve kararlı çözüm $t = 0,81$ zaman adımında elde edilmiştir. Elde edilen sayısal çözümler irdelendiğinde zaman ilerledikçe çözüm değerlerinin büyüdüğü gözlemlenmiştir.



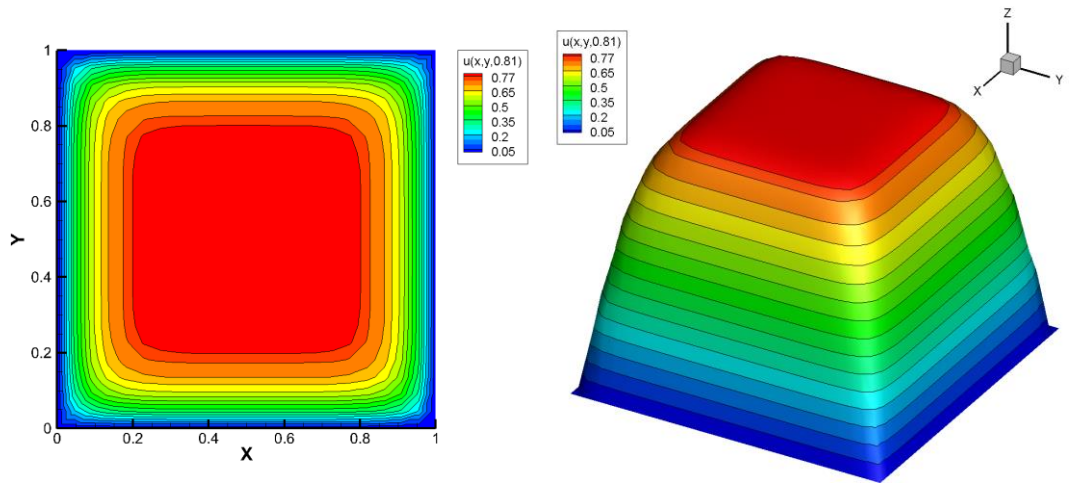
Şekil 4.8. u fonksiyonunun $\varepsilon = 0,01$, $\theta=0,5$, $t = 0,1$ için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).



Şekil 4.9. u fonksiyonun $\varepsilon = 0,01$, $\theta = 0,5$, $t = 0,3$ ve için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).



Şekil 4.10. u fonksiyonun $\varepsilon = 0,01$, $\theta = 0,5$, $t = 0,5$ ve için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).



Şekil 4.11. u fonksiyonun $\varepsilon = 0,01$, $\theta = 0,5$, $t = 0,81$ ve için sayısal çözümünün kontur eğrisi (sol) ve 3 boyutlu modeli (sağ).

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında iki boyutlu konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denkleminin uygulanan sayısal yöntemler ve elde edilen sonuçlar irdelendiğinde,

- Crank-Nicolson/Sonlu elemanlar hibrit sayısal yönteminin zamana bağlı konvektif katsayılı konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemi için uygulanabilir bir yöntem olduğu gözlemlenmiştir.
- Sabit ve zamana bağlı konvektif katsayılı konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemi için kararlı sonlu elemanlar yöntemine gerek duyulmaksızın kararlı sayısal çözümler elde edilmiştir. Bu durum ise sayısal çözüm elde edilmesini daha ekonomik hale getirmiştir.
- Bu tezde uygulanan hibrit sayısal yöntem zamana bağlı katsayı içeren diğer problemlere kolaylıkla uygulanabilir.
- Bu tez çalışmasında iki boyutlu uzayda sayısal çözümü elde edilen problemin, üç boyutlu modelinin çözümü aynı sayısal yöntem ile elde edilebilir.

KAYNAKLAR

- Anthony, A. S., Verma, T. N. 2021. Numerical analysis of natural convection in a heated room and its implication on thermal comfort. *Journal of Thermal Engineering*, 7(1), 37-53.
- Asinari, P., Quaglia, M. C., von Spakovsky, M. R., Kasula, B. V. 2007. Direct numerical calculation of the kinematic tortuosity of reactive mixture flow in the anode layer of solid oxide fuel cells by the lattice Boltzmann method. *Journal of Power Sources*, 170(2), 359-375.
- Baliga, B. R., Patankar, S. V. 1980. A new finite-element formulation for convection-diffusion problems. *Numerical Heat Transfer*, 3(4), 393-409.
- Braess, D. 2007. *Finite elements: Theory, fast solvers, and applications in solid mechanics*. Cambridge University Press, 150, United Kingdom.
- Bucholz, T. L., Hulvey, M. K., Reardon, J. P., Rambo, B. M., Pulvirenti, D. C., Weber, L. E., Zaks, A. 2015. Development of an organosilica coating containing carbonic anhydrase for applications in CO₂ capture. In *Novel Materials for Carbon Dioxide Mitigation Technology*, 117-147.
- Burman, E. 2010. Consistent SUPG-method for transient transport problems: Stability and convergence. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(17-20), 1114-1123.
- Burman, E., Hansbo, P. 2004. Edge stabilization for Galerkin approximations of convection-diffusion-reaction problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 193(15-16), 1437-1453.
- Chaple, R. P. B. 2006. *Numerical stabilization of convection-diffusion-reaction problems*. Delft, The Netherlands: Delft University of Technology, 19, Netherlands.
- Codina, R. 1998. Comparison of some finite element methods for solving the diffusion-convection-reaction equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 156(1-4), 185-210.
- Çepni, M. S., Deniz, R. 2005. Sonlu elemanlar yönteminin dönüşümlerde kullanılması. *Jeodezi ve Jeoinformasyon Dergisi*, (93), 20-29.
- Çiftçi, C. 2012. Değişken difüzyon katsayılı konveksiyon-difüzyon denklemlerinin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümü. *Doktora Tezi*, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana bilim Dalı, 86, Trabzon.
- Henry, D. 1943. A Lattice Analogy for the Solution of Plane Stress Problems, *Journal of Institute of Civil Engineering* 21, 59-82.
- Hrennikof, A. 1941. Solution of Problems in Elasticity by the Framework method, *Journal of Applied Mechanics*, A8, 169-175.

- Hussain, F., Karim, M. S. 2012. Accurate evaluation schemes for triangular domain integrals. *Journal of Mechanical and Civil Engineering*, 2, 38-51.
- Izadkhah, M. M., Saberi-Nadjafi, J. 2015. Gegenbauer spectral method for time-fractional convection–diffusion equations with variable coefficients. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 38(15), 3183-3194.
- İnce, E. 2001. İkili sıvı sistemlerinin difüzyon katsayılarının tayini. *Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 7(3), 409-413.
- John, V., Schmeier, E. 2008. Finite element methods for time-dependent convection–diffusion–reaction equations with small diffusion. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(3-4), 475-494.
- Kellogg, R. B., Xenophontos, C. 2010. An enriched subspace finite element method for convection-diffusion problems. *International Journal of Numerical Analysis Model*, 7(3), 477-490.
- Knobloch, P. 2006. Improvements of the Mizukami–Hughes method for convection–diffusion equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(1-3), 579-594.
- Lai, M. C., Tseng, Y. H. 2005. A fast iterative solver for the variable coefficient diffusion equation on a disk. *Journal of Computational Physics*, 208(1), 196-205
- Lazarov, R. D., Vassilevski, P. S. 2000. Least-squares streamline diffusion finite element approximations to singularly perturbed convection-diffusion problems. *Analytical and Numerical Methods for Singularly Perturbed Problems*, 83-94.
- Lima, S. A., Kamrujjaman, M., Islam, M. S. 2021. Numerical solution of convection–diffusion–reaction equations by a finite element method with error correlation. *AIP Advances*, 11(8), 085225.
- Logan, D. L. 2016. A first course in the finite element method. Cengage Learning, 942, USA.
- Logon, D. L., A 2010 First Course In The Finite Element Method, Fifth Edition, 2-4, Cengage Learning, USA.
- Maghsoudi Khouzani, S. 2019. Bazı lineer olmayan diferansiyel denklemlerin tam çözümleri için metotlar. Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, 65, Denizli.
- Mandelbrojt, S., Schwartz, L. 1965. Jacques Hadamard (1865-1963) *Bulletin of the American Mathematical Society*, 71(1), 107-129.
- Melenk, J. M., Schwab, C. 1999. An hp finite element method for convection-diffusion problems in one dimension. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 19(3), 425-453.
- Ming, C. Y. 2017. Solution of differential equations with applications to engineering problems. *Dynamical Systems-Analytical and Computational Techniques*, 233.

- Morton, K. W. 2019. Numerical solution of convection-diffusion problems. Computer Science, Mathematics & Statistics Press, 286, New York.
- Nagel, J. R. 2012. Introduction to the finite element method. Department of Electrical and Computer Engineering University of Utah, Salt Lake City, 5, Utah.
- Pinchover, Y., Rubinsten, J. 2005. An Introduction to Partial Differential Equations, Cambridge University Press, 366, United Kingdom.
- Quarteroni, A., Sacco, R. Saleri, F. 2000 Numerical Mathematics, Springer, 654, New York.
- Reddy, J. N. 2005. An Introduction to the Finite Element Method, The McGraw-Hill Companies, 761, New York.
- Sanver, M. 1983. Yerkürenin ısı evrimi ve günümüzde yerinin sıcaklığı. Doktora Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Maden Mühendisliği Ana Bilim Dalı, 798, İstanbul.
- Selvitopi, H. 2016. Manyetik ortamda magnetohidrodinamik kanal akım problemlerinin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi ile çözümü. Doktora tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana bilim Dalı, 115, Trabzon.
- Sudirham, J. J., van der Vegt, J. J., van Damme, R. M. 2006. Space-time discontinuous Galerkin method for advection-diffusion problems on time-dependent domains. Applied Numerical Mathematics, 56(12), 1491-1518.
- Suzue, Y., Shikazono, N., Kasagi, N. 2008. Micro modeling of solid oxide fuel cell anode based on stochastic reconstruction. Journal of Power Sources, 184(1), 52-59.
- Tezduyar, T. E., Park, Y. J. 1986. Discontinuity-capturing finite element formulations for nonlinear convection-diffusion-reaction equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 59(3), 307-325.
- Topçu, M., Taşgetiren, S. 2011. İki boyutlu problemler için sonlu elemanlar ağı oluşturulması. Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi, 3(2), 315-322.
- Vilhena, M. T. 1992. An analytical solution of the steady state convective-diffusion equation with space dependent diffusion coefficient. Journal of Membrane Science, 71(1-2), 51-56.
- Wang, M., Wang, J., Pan, N., Chen, S. 2007. Mesoscopic predictions of the effective thermal conductivity for microscale random porous media. Physical Review E, 75(3), 036702.
- Willingham, T. W., Werth, C. J., Valocchi, A. J. 2008. Evaluation of the effects of porous media structure on mixing-controlled reactions using pore-scale modeling and micromodel experiments. Environmental Science & Technology, 42(9), 3185-3193.

- Xie, X., Zhao, W., Lin, P. 2021. A simple and efficient curved boundary scheme of the lattice Boltzmann method for Robin boundary conditions of convection–diffusion equations. *Applied Mathematics Letters*, 122, 107536.
- Yahnioğlu, N., 2012. Sonlu elemanlar yöntemi. <https://www.coursehero.com/file/66097606/Sonlu-elemanlar-yontemi-sunuppt/> Erişim Tarihi, 23.01.2022.
- Zhang, J., Liu, X. 2021. Supercloseness of linear finite element method on Bakhvalov-type meshes for singularly perturbed convection–diffusion equation in 1D. *Applied Mathematics Letters*, 111, 106624.
- Zhong, J., Zeng, C., Yuan, Y., Zhang, Y., Zhang, Y. 2018. Numerical solution of the unsteady diffusion-convection-reaction equation based on improved spectral Galerkin method. *AIP Advances*, 8(4), 045314.108.

