

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMANA BAĞLI VE SAÇILIM TERİMİ İÇEREN KİNETİK DENKLEMLER İÇİN
BAZI TERS PROBLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİNİN ARAŞTIRILMASI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MUHAMMED HASDEMİR

EYLÜL 2018

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMANA BAĞLI VE SAÇILIM TERİMİ İÇEREN KİNETİK DENKLEMLER İÇİN
BAZI TERS PROBLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİNİN ARAŞTIRILMASI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MUHAMMED HASDEMİR

DANIŞMAN: Dr. Öğr. Üyesi İsmet GÖLGELEYEN

ZONGULDAK

Eylül 2018

KABUL:

Muhammed HASDEMİR tarafından hazırlanan “Zamana Bağlı ve Saçılım Terimi İçeren Kinetik Denklemler İçin Bazı Ters Problemlerin Sayısal Çözümlerinin Araştırılması” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 18/09/2018

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi İsmet GÖLGELEYEN

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Prof. Dr. Kemal AYDIN

Selçuk Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIZ

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım./2018

Doç. Dr. Ahmet ÖZARSLAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”

Muhammed HASDEMİR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ZAMANA BAĞLI VE SAÇILIM TERİMİ İÇEREN KİNETİK DENKLEMLER İÇİN BAZI TERS PROBLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİNİN ARAŞTIRILMASI

Muhammed HASDEMİR

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi İsmet GÖLGELEYEN

Eylül 2018, 81 sayfa

Bu tez çalışmasının temel hedefi zamana bağlı ve saçılım terimi içeren kinetik denklemler için bazı ters problemlerin sayısal çözümlerinin araştırılmasıdır. Bu kapsamda ilk olarak Liouville denklemi için bir ters problem ele alınmış, çözülebilirlik şartları incelenerek sonlu fark metodu ile sayısal çözümü gerçekleştirilmiştir. İkinci olarak, saçılım terimi içeren genel bir kinetik denklem için bir ters problemin çözümünün varlığı ve tekliği uygun uzaylarda araştırılmış ve söz konusu problem, sonlu fark metodu ve yamuk yöntemi yardımıyla sayısal olarak çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar grafik ve çizelgeler aracılığıyla karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Kinetik denklem, ters problem, sonlu fark metodu, yamuk yöntemi, saçılım terimi.

Bilim Kodu: 403.06.00



ABSTRACT

M. Sc. Thesis

NUMERICAL SOLUTION OF SOME INVERSE PROBLEMS FOR TIME-DEPENDENT KINETIC EQUATIONS WHICH INVOLVE SCATTERING TERM

Muhammed HASDEMİR

**Zonguldak Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Thesis Advisor: Assist. Prof. Dr. İsmet GÖLGELEYEN

September 2018, 81 pages

The main purpose of this thesis is to investigate numerical solution of some inverse problems for time-dependent kinetic equations which involve scattering term. In this context, firstly, an inverse problem for the Liouville equation is considered, the solvability conditions are examined and the numerical solution is obtained by the finite difference method. Next, the existence and uniqueness of the solution of an inverse problem for a general kinetic equation which involves a scattering term are investigated in suitable spaces and this problem is solved numerically by means of the finite difference method and the trapezoid method. The obtained results are presented comparatively with graphs and tables.

Keywords: Kinetic equations, inverse problem, finite difference method, trapezoid rule, scattering term.

Science Code: 403.06.00



TEŞEKKÜR

Tezimin tüm aşamalarında görüş ve önerileriyle değerli vaktini ayıran, bilgisiyle beni yönlendiren danışman hocam sayın Dr. Öğr. Üyesi İsmet GÖLGELEYEN'e teşekkürlerimi sunarım.

Bu tezi tamamlamamda çok büyük emeği olan hocam sayın Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN'e sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Bu sürece girdiğimden beri zamanlarından çaldığım eşime, oğullarım İsmail Kağan ve Umut'a, kızım Zeynep Feyza'ya ve maddi manevi desteğini hiç esirgemeyen annem, babam, ağabeylerim ve ablama çok teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR.....	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xi
ÇİZELGELER DİZİNİ	xv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xvii
 BÖLÜM 1 Giriş	 1
1.1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER	3
 BÖLÜM 2 TERS PROBLEMLER VE BAZI UYGULAMALARI	 7
2.1 GÖRÜNTÜLEME YÖNTEMLERİ	9
 BÖLÜM 3 LIOUVILLE DENKLEMİ İÇİN BAZI TERS PROBLEMLERİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ VE SONLU FARK YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ	 15
3.1 LIOUVILLE DENKLEMİ İÇİN BİR TERS PROBLEM	15
3.2 PROBLEM 3.1' İN SONLU FARK METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ	17
3.2.1 Sayısal Örnekler	23
 BÖLÜM 4 ZAMANA BAĞLI VE SAÇILIM TERİMİ İÇEREN KİNETİK DENKLEMLER İÇİN BİR TERS PROBLEM	 43
4.1 PROBLEM 4.1' İN ÇÖZÜMÜNÜN TEKLİĞİNİN ARAŞTIRILMASI	44

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

	<u>Sayfa</u>
4.2 PROBLEM 4.1' İN ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞININ ARAŞTIRILMASI	49
4.3 PROBLEM 4.1' İN SAYISAL ÇÖZÜMÜ	51
4.3.1 Sayısal Örnekler	58
 BÖLÜM 5 SONUÇ	 77
 KAYNAKLAR.....	 79
 ÖZGEÇMİŞ	 81

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1 Direkt problem ve ters problem	8
Şekil 2.2 Görüntüleme yöntemlerinin ana prensipleri	10
Şekil 2.3 Röntgende X-ışını uygulaması	12
Şekil 2.4 BT ve Röntgende X-ışını uygulaması.....	13
Şekil 2.5 Hounsfield skalası.....	13
Şekil 2.6 BT de görüntü oluşumu.....	14
Şekil 3.1 Örnek 3.1 için $\tilde{A}$ matrisinin yapısı	24
Şekil 3.2 Şekil 3.1'in yakından görünümü.....	24
Şekil 3.3 Örnek 3.1 de u için (a) yaklaşık çözüm ve (b) kesin çözüm	25
Şekil 3.4 Örnek 3.1 de u için yaklaşık ve kesin çözümlerin aynı grafikte gösterimi	26
Şekil 3.5 Örnek 3.1 de u çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel gösterimi	26
Şekil 3.6 Şekil 3.5'in yakından görünümü.....	27
Şekil 3.7 Örnek 3.1 de u fonksiyonu için kesitsel görünüm (a) v, t sabit; (b) x, t sabit	27
Şekil 3.8 Örnek 3.1 de λ için (a) yaklaşık çözüm, (b) kesin çözüm	28
Şekil 3.9 Örnek 3.1 de λ için yaklaşık ve kesin çözümlerin aynı grafikte gösterimi	29
Şekil 3.10 Örnek 3.2 için $\tilde{A}$ matrisinin yapısı	30
Şekil 3.11 Şekil 3.10'un yakından gösterimi	31
Şekil 3.12 Örnek 3.2 de u için (a) yaklaşık çözüm, (b) kesin çözüm	32
Şekil 3.13 Örnek 3.2 de u için yaklaşık ve kesin çözümlerin birlikte gösterimi	32
Şekil 3.14 Örnek 3.2 de u fonksiyonu için kesitsel görünüm (a) v, t sabit; (b) x, t sabit	33
Şekil 3.15 Örnek 3.2 de u çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel gösterimi.....	33
Şekil 3.16 Şekil 3.15'in yakından gösterimi	34
Şekil 3.17 Örnek 3.2 de λ için (a) yaklaşık çözüm, (b) kesin çözüm.....	35
Şekil 3.18 Örnek 3.2 de λ için yaklaşık ve kesin çözümlerin aynı grafikte gösterimi.....	35
Şekil 3.19 Örnek 3.3 için $\tilde{A}$ matrisinin yapısı	37
Şekil 3.20 Şekil 3.19'un yakından görünümü	37
Şekil 3.21 Örnek 3.3 de u için (a) yaklaşık çözüm, (b) kesin çözüm	38
Şekil 3.22 Örnek 3.3 de u için yaklaşık ve kesin çözümlerin birlikte gösterimi	39

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam ediyor)

No	Sayfa
Şekil 3.23 Örnek 3.3 de u fonksiyonu için kesitsel görünüm (a) v, t sabit; (b) x, t sabit	39
Şekil 3.24 Örnek 3.3 de u çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel gösterimi.....	40
Şekil 3.25 Şekil 3.24'ün yakından görünümü	40
Şekil 3.26 Örnek 3.3 de λ için (a) yaklaşık çözüm, (b) kesin çözüm.....	41
Şekil 3.27 Örnek 3.3 de λ için yaklaşık ve kesin çözümlerin aynı grafikte gösterimi	42
Şekil 4.1 Örnek 4.1 için $\tilde{A}$ matrisinin yapısı	60
Şekil 4.2 Şekil 4.1'in yakından görünümü	60
Şekil 4.3 Örnek 4.1 de u için (a) yaklaşık çözüm ve (b) kesin çözüm.....	61
Şekil 4.4 Örnek 4.1 de u fonksiyonu için yaklaşık ve kesin çözümlerin birlikte gösterimi	62
Şekil 4.5 Örnek 4.1 de u fonksiyonu için kesitsel görünüm (a) v, t sabit, (b) x, t sabit.....	62
Şekil 4.6 Örnek 4.1 de u çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel gösterimi.....	63
Şekil 4.7 Şekil 4.6'nın yakından görünümü	63
Şekil 4.8 Örnek 4.1 de λ için (a) yaklaşık çözüm ve (b) kesin çözüm.....	64
Şekil 4.9 Örnek 4.1 de λ için yaklaşık ve kesin çözümlerin aynı grafikte gösterimi	64
Şekil 4.10 Örnek 4.2 de $\tilde{A}$ matrisinin yapısı	65
Şekil 4.11 Şekil 4.10'un yakından görünümü	66
Şekil 4.12 Örnek 4.2 de u için (a) yaklaşık çözüm ve (b) kesin çözüm	67
Şekil 4.13 Örnek 4.2 de u için yaklaşık ve kesin çözümlerin aynı grafikte gösterimi.....	67
Şekil 4.14 Örnek 4.2 de u fonksiyonu için kesitsel görünüm (a) v, t sabit, (b) x, t sabit.....	68
Şekil 4.15 Örnek 4.2 de u çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel gösterimi.....	68
Şekil 4.16 Şekil 4.15'in yakından görünümü	69
Şekil 4.17 Örnek 4.2 de λ için (a) yaklaşık çözüm, (b) kesin çözüm.....	69
Şekil 4.18 Örnek 4.2 de λ için yaklaşık ve kesin çözümlerin aynı grafikte gösterimi.....	70
Şekil 4.19 Örnek 4.3 de $\tilde{A}$ matrisinin yapısı	71
Şekil 4.20 Şekil 4.19'un yakından görünümü	72
Şekil 4.21 Örnek 4.3 de u için (a) yaklaşık çözüm ve (b) kesin çözüm.....	73
Şekil 4.22. Örnek 4.3 de u için yaklaşık ve kesin çözümlerin aynı grafikte gösterimi	73
Şekil 4.23 Örnek 4.3 de u fonksiyonu için kesitsel görünümü (a) v, t sabit, (b) x, t sabit.....	74
Şekil 4.24 Örnek 4.3 de u çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel görünümü	74
Şekil 4.25 Şekil 4.24'ün yakından görünümü	75

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam ediyor)

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 4.26 Örnek 4.3 de λ için (a) yaklaşık çözüm ve (b) kesin çözüm.....	75
Şekil 4.27 Örnek 4.3 de λ için yaklaşık ve kesin çözümlerin birlikte gösterimi.....	76
Şekil 4.28 Örnek 4.3 de λ fonksiyonu için (a) yaklaşık çözüm, (b) kesin çözüm.....	76





ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
Çizelge 3.1 Örnek 3.1'in $u(x, v, t)$ çözümü için hata miktarları ve hesaplama süreleri.....	25
Çizelge 3.2 Örnek 3.1'in $\lambda(x, v, t)$ çözümü için hata miktarları ve hesaplama süreleri.....	28
Çizelge 3.3 Örnek 3.2'nin $u(x, v, t)$ çözümü için hata miktarları ve hesaplama süreleri.....	31
Çizelge 3.4 Örnek 3.2'nin $\lambda(x, v, t)$ çözümü için hata miktarları ve hesaplama süreleri.....	34
Çizelge 3.5 Örnek 3.3'ün $u(x, v, t)$ çözümü için hata miktarları ve hesaplama süreleri.....	38
Çizelge 3.6 Örnek 3.3'ün $\lambda(x, v, t)$ çözümü için hata miktarları ve hesaplama süreleri.....	41
Çizelge 4.1 Örnek 4.1 için hata çizelgesi	61
Çizelge 4.2 Örnek 4.2 için hata çizelgesi	66
Çizelge 4.3 Örnek 4.3 için hata çizelgesi	72



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

Ω	: Verilen bölge
$\bar{\Omega}$	: Ω bölgesinin kapanışı
$\partial\Omega$	: Ω bölgesinin sınırı
$L_1(\Omega)$	: Ω bölgesi üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L_2(\Omega)$	: Ω bölgesi üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$C^k(\Omega)$	: Ω bölgesinde tanımlı k . mertebeye kadar sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlar uzayı
$C_0^\infty(\Omega)$	: Ω bölgesinde tanımlı sonsuz defa diferensiyellenebilir ve supportu Ω bölgesinin kompakt alt kümesi olan fonksiyonlar uzayı
$H^k(\Omega)$	: Kendisi ve k . mertebeye kadar tüm genelleşmiş türevleri $L_2(\Omega)$ 'ya ait olan fonksiyonlar uzayı
u_t	: u fonksiyonunun t değişkenine göre kısmi türevi; $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$
u_{x_i}	: u fonksiyonunun x_i değişkenine göre kısmi türevi; $u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$
u_{v_i}	: u fonksiyonunun v_i değişkenine göre kısmi türevi; $u_{v_i} = \frac{\partial u}{\partial v_i}$
$\{.,.\}$	: Poisson parantezi ; $\{H, u\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial v_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial v_i} \right)$
$\nabla_x u$	: u fonksiyonunun x vektörüne göre gradienti; $\nabla_x u = (u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n})$
$\nabla_v u$	: u fonksiyonunun v vektörüne göre gradienti; $\nabla_v u = (u_{v_1}, u_{v_2}, \dots, u_{v_m})$



BÖLÜM 1

GİRİŞ

Kinetik denklemler; gaz dinamiği, plazma fiziği, biyoloji ve sosyo-ekonomi gibi birçok farklı alanda çok parçacıklı sistemlerin istatistiksel tasviri olarak karşımıza çıkmaktadır. Klasik kinetik denklemlere örnek olarak Liouville, Fokker-Plank ve Boltzmann denklemleri verilebilir (Alexeev 1982, Liboff 2003, Markowich, Ringhofer and Schmeiser 1990, Pöschel and Brilliantov 2003).

Bu çalışmada zamana bağlı ve saçılım terimi içeren kinetik denklemler için bazı ters problemlerin çözülebilirliği ve sayısal çözümleri araştırılmıştır. Bu problemlerin sayısal çözümleri elde edilirken üç boyutlu durumda sonlu fark yöntemi ve yamuk yöntemi kullanılmıştır. Bu amaçla bilgisayarda MATLAB yazılımı kullanılarak bir bilgisayar programı yazılmıştır. Yazılan programın kullanımı ile elde edilen yaklaşık çözümler, çizelge ve grafikler yardımı ile kesin çözümlerle karşılaştırılmıştır. Çizelgelerde maksimum ve minimum hatalara, ayrıca hesaplama sürelerine yer verilmiştir.

Bu tezin ikinci bölümünde, ters problem tanımı üzerinde durulmuş ve bazı uygulamalarına yer verilmiştir. Bu kapsamda ters problemlerin önemli bir uygulama alanı olarak tıbbi görüntüleme teknikleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde,

$$\Omega_T = \{(x, v, t) : x \in D \subset R^n, v \in G \subset R^n, t \in (0, T)\}$$

bölgesinde verilen

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial v_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial v_j} \right) - \lambda(x, v, t) = 0 \quad (1.1)$$

Liouville denklemi ele alınmıştır. Burada $u(x, v, t)$, faz uzayındaki parçacıkların dağılım fonksiyonu, $H(x, v, t)$ Hamiltonian fonksiyonu olup,

$$\{H, u\} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial v_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial v_j} \right)$$

eşitliği, u ve H fonksiyonlarının Poisson parantezi olarak adlandırılır.

(1.1) denkleminde $\lambda(x, v, t)$ bilinmeyen kaynak fonksiyonudur. Burada x ve v sırasıyla konum ve hız vektörlerini, t ise zamanı göstermektedir.

Üçüncü bölüm kapsamında, (1.1) denklemi için bir ters problemin çözülebilirliği araştırılmış ve sonlu fark yaklaşımı kullanılarak sayısal çözümü elde edilmiştir. Önerilen sayısal çözüm yöntemi çeşitli örnekler üzerinde test edilmiş, elde edilen sonuçlar grafikler ve çizelgeler yardımıyla karşılaştırılmıştır.

Dördüncü bölümde, zamana bağlı ve saçılım terimi içeren

$$Lu(x, v, t) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \{H, u\} + I_1(u) - \lambda(x, v, t) = 0, \quad (x, v, t) \in \Omega_T,$$

$$I_1(u) = \int_G \Phi(x, v, t, v') u(x, v', t) dv'$$

kinetik denklemi için bir ters problemin çözümünün varlığı, tekliği ve sayısal çözümü araştırılmıştır. Sayısal çözüm için sonlu fark metoduna ek olarak yamuk yöntemi kullanılmıştır. Geliştirilen bu yaklaşım farklı fonksiyon yapıları içeren örnek ters problemlere uygulanmış, bulunan çözümler kesin çözümler ile grafikler ve çizelgeler aracılığıyla karşılaştırılmıştır.

Kinetik denklemler için çeşitli ters problemlerin çözülebilirliği Amirov (2001) ve Anikonov (2001) tarafından incelenmiştir. Kinetik denklemler için ters problemler hem teorik hem de pratik açıdan büyük önem taşımaktadır. Bu problemler fiziksel olarak parçacık etkileşim kuvvetlerinin, saçılım göstergelerinin, radyasyon kaynaklarının ve diğer fiziksel parametrelerin bulunmasını içerir. Amirov, Gölgeleyen and Rahmanova (2009), Amirov, Ustaoglu and Heydarov (2011) ve Gölgeleyen (2013)'de zamandan bağımsız kinetik ve transport denklemleri için bazı ters problemlerin sayısal çözümleri elde edilmiştir.

1.1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, tezde gerekli olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 1.1 (Kompakt Support) $G \subset \mathbb{R}^n$ boş kümeden farklı olmak üzere, G 'nin $\mathbb{R}^n$ 'de kapanışı $\overline{G}$ şeklinde gösterilir. $\overline{G} \subset \Omega$ ve $\overline{G}$, $\mathbb{R}^n$ 'in kompakt altkümesi (kapalı ve sınırlı) ise, $G \Subset \Omega$ olarak yazılır. u , G üzerinde tanımlı bir fonksiyon ise, u fonksiyonunun *supportu*

$$\text{supp}(u) = \overline{\{x \in G : u(x) \neq 0\}}$$

kümesi biçiminde tanımlanır. Buna göre $\text{supp}(u) \Subset \Omega$ ise, Ω bölgesinde u fonksiyonunun kompakt *supportu* vardır denir (Adams and Fournier 2003, s. 2).

Tanım 1.2 ($C^m(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$ Uzayları) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge, m negatif olmayan bir tam-sayı ve $|\alpha| \leq m$ olsun. Her m için, $D^\alpha \phi$ kısmi türevleri Ω bölgesinde sürekli olan tüm ϕ fonksiyonlarının oluşturduğu vektör uzayı $C^m(\Omega)$ ile gösterilir.

Özel olarak, $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$ şeklinde tanımlanır (Adams and Fournier 2003, s. 10).

Tanım 1.3 ($C_0(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$ Uzayları) $C_0(\Omega)$ ve $C_0^\infty(\Omega)$ uzayları, sırasıyla, $C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)$ sınıfından olan ve Ω bölgesinde kompakt *supporta* sahip tüm fonksiyonların oluşturduğu uzaylardır (Adams and Fournier 2003, s. 10).

Tanım 1.4 ($L^p(\Omega)$ Uzayı) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge ve p pozitif reel sayı olsun. Ω bölgesinde

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$$

şartını sağlayan tüm ölçülebilir u fonksiyonlarının uzayı $L^p(\Omega)$ ile gösterilir.

$1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ile tanımlanan $\|\cdot\|_p$ fonksiyoneli $L^p(\Omega)$ üzerinde bir normdur. ($0 < p < 1$ olması durumunda bir norm değildir) (Adams and Fournier 2003, s. 23).

Tanım 1.5 (Genelleşmiş Fonksiyon) $C_0^\infty(\Omega)$ üzerinde aşağıdaki yakınsaklık yardımı ile verilen topoloji ile elde edilen uzaya test fonksiyonlar uzayı denir. Bu uzay, $D(\Omega)$ ile gösterilir:

1) Öyle bir $K \subset \Omega$ kompakt cümlesi vardır;

$$\forall k \in \mathbb{N} \text{ için } \text{supp} \varphi_k \subset K,$$

2) Her $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ve $k \rightarrow \infty$ iken

$$D_{\varphi_k(x)}^\alpha \rightarrow D_{\varphi(x)}^\alpha$$

yakınsaması Ω bölgesinde düzgün ise, $k \rightarrow \infty$ için $\varphi_k \xrightarrow{D(\Omega)} \varphi$ yakınsar denir.

$D(\Omega)$ topolojik uzayında tanımlı sürekli, lineer fonksiyonellere, genelleşmiş fonksiyon denir. Genelleşmiş fonksiyonlar sınıfı $D'(\Omega)$ ile gösterilir (Vladimirov 1971, s. 66).

Tanım 1.6 (Genelleşmiş Türev) $f \in D'(\Omega)$ olmak üzere, f genelleşmiş fonksiyonunun $D^\alpha f$ (genelleşmiş) türevi,

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi), \quad \varphi \in D(\Omega)$$

eşitliği ile tanımlanır (Vladimirov 1971, s. 79).

Tanım 1.7 ($H_0^k(\Omega)$ Uzayı) $H_0^k(\Omega)$ uzayı, $C_0^k(\overline{\Omega})$ uzayının $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$ Sobolev normuna göre tamlanmasıdır (Reddy 1998, s. 243).

Tanım 1.8 ($H^k(\Omega)$ Sobolev Uzayı) $H^k(\Omega)$, kendisi ve k . mertebeye kadar tüm genelleşmiş türevleri $L^2(\Omega)$ 'ya ait olan tüm fonksiyonların oluşturduğu cümledir.

$H^k(\Omega)$, üzerinde tanımlanan

$$(f, g)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha f D^\alpha \bar{g} dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır, bu iç çarpım ile tanımlanan norm

$$\|f\|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha f|^2 dx \right)^{1/2}$$

biçimindedir (Mikhailov 1978, s. 121).

Teorem 1.1 (Fubini Teoremi) f fonksiyonu $\mathbb{R}^{m+n}$ üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki integrallerden en az birinin var olduğunu ve sonlu olduğunu kabul edelim:

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^{m+n}} |f(x, y)| dx dy,$$

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x, y)| dy \right) dx,$$

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x, y)| dx \right) dy.$$

I_2 için yukarıdaki ifadenin anlamı şudur: $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir g integrallenebilir fonksiyonu vardır öyle ki hemen hemen her y için $g(y)$ içerideki integrale eşittir. I_3 için de benzer şekildedir. Bu durumda,

i) Hemen hemen her $y \in \mathbb{R}^n$ için $f(\cdot, y) \in L^1(\mathbb{R}^m)$.

ii) Hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^m$ için $f(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

iii) $\int_{\mathbb{R}^m} f(\cdot, y) dy \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

iv) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x, \cdot) dx \in L^1(\mathbb{R}^m)$.

v) $I_1 = I_2 = I_3$ (Adams and Fournier 2003, s. 19).

Tanım 1.9 (Steklov Eşitsizliği) Her $f \in H_0^1(\Omega)$ için

$$\|f\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C \int_{\Omega} |\nabla f|^2 dx$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $C > 0$ sayısı sadece Ω bölgesine bağlıdır (Mikhailov 1978, s. 149).

Teorem 1.2 (Ostrogradskii Formülü) $\partial\Omega \in C^1$ olmak üzere,

$$A(x) = (A_1(x), A_2(x), \dots, A_n(x)),$$

Ω üzerinde bir vektör ve $A_i(x) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, n$ olsun. Bu durumda

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} A(x) dx = \int_{\partial\Omega} A(x) n(x) dS$$

eşitliği sağlanır. Burada n , $\partial\Omega$ 'nın dış normal vektörüdür (Mikhailov 1978, s. 103).

Teorem 1.3 (İz (Trace) Teoremi) Ω sınırlı bir bölge ve $\partial\Omega \in C^1$ olsun. Bu durumda;

i) Eğer $f \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ise $Tf = f|_{\partial\Omega}$,

ii) Her bir $f \in H^1(\Omega)$ için $\|Tf\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq C \|f\|_{H^1(\Omega)}$

özelliklerini sağlayan sınırlı bir lineer

$$T : H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\partial\Omega)$$

operatörü vardır. Burada $C > 0$ sayısı sadece Ω bölgesine bağlı olup f 'den bağımsızdır.

T operatörüne iz operatörü, Tf e de, f fonksiyonunun $\partial\Omega$ üzerindeki izi denir ve sırasıyla $\|Tf\|_{L_2(\partial\Omega)}$, $\|f\|_{L_2(\partial\Omega)}$ ile ifade edilir (Evans 1997, s. 258).

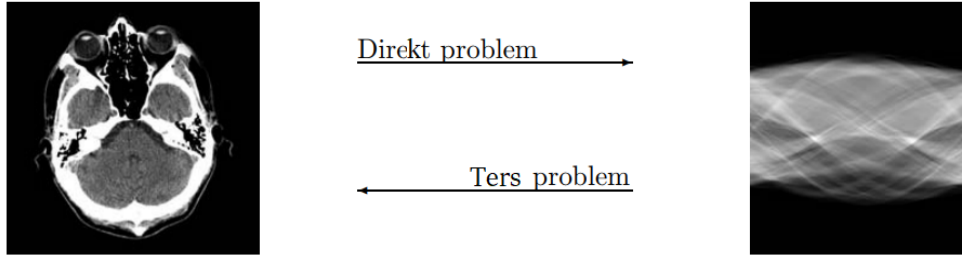
BÖLÜM 2

TERS PROBLEMLER VE BAZI UYGULAMALARI

Ters problemler, direkt problemlerin karıştıdır. Basit anlamda bir direkt problemde; nedenden sonuç elde edilmeye çalışırken, ters problemde ise bilinen sonuçtan nedene ulaşmak istenir.

Ters problemler, bir nesnenin (ortamın) bilinmeyen bazı özelliklerinin, bu nesneye gönderilen sinyallere karşılık alınan cevabın ölçümünden faydalanılarak belirlenmesidir. Bu nedenle ters problemler teorisi, uzaktan algılama ve tahribatsız değerlendirme alanlarının teorik temelini oluşturur. Eğer bir düzlemsel ses dalgası cisim üzerine gönderiliyor ve saçılan alanlar bu cisimden uzak noktalarda veya dış bir bölgede gözlemleniyorsa bu durumda ters problem, bu cismin şeklinin ve materyal özelliklerinin belirlenmesi olarak karşımıza çıkar. Böyle problemler, örneğin, uçan nesnelerin (uçaklar, füzeler vb.) veya su altındaki nesnelerin (denizaltı, balık hareketleri vb.) belirlenmesi açısından önemlidir. Jeofizikte, yer yüzeyinden, kaynağın konumu değiştirilerek, farklı frekanslarda ses dalgaları gönderilir ve saçılan bu alanlar özel aygıtlar kullanılarak toplanır. Buradaki ters problem, yerin altındaki homojenliğin bozulduğu bölgelerin belirlenmesidir. Bu yolla ilgili bölgelerin bir petrol yatağı, mağara veya bir maden olduğu tespit edilebilir. Bu durum tıpta, insan vücudunda ortaya çıkan bir tümör yada bazı normal olmayan yapıların varlığını ifade eder. Eğer bir ortamdaki homojenliğin bozulduğu noktalar, bu saçılan alanların ölçümüyle tespit edilebiliyorsa bu ortama ulaşmak için fiziksel olarak bir tahribat yapmaya, örneğin, bir delik açmaya ya da cerrahi bir işlem yapmaya ihtiyaç kalmaz. Böylece masraflı ve tahribatlı değerlendirmelerden kaçınılmış olunur. Uzaktan algılamanın bu pratik avantajı ters problemleri önemli hale getirir (Ramm 2005).

Tıbbi tomografide direkt problem şöyle ifade edilebilir. İç organlarının yapısı bilinen bir hastadan ne tür bir tomografik görüntü elde edileceğini belirlemek bir direkt problemidir. İlgili ters problem ise farklı açılardan alınan X-ışını projeksiyonları kullanılarak hastanın iç organının üç boyutlu görüntüsünün elde edilmesidir (Şekil 2.1).



Şekil 2.1 Direkt ve ters problem
(Siltanen and Mueller 2012).

Ters problemler genel olarak kötü konulmuş problemlerdir ve bunların çözümleri özel bir yaklaşım gerektirmektedir (Siltanen and Mueller 2012, s. 3). Bu kavramı açıklamak için öncelikle Jacques Hadamard (1865-1963) tarafından tanımlanan iyi konulmuş problem kavramını vermek gerekir.

Tanım 2.1 (Hadamard Anlamında İyi Konulmuş Problem) U ve F metrik uzaylar, $A : U \rightarrow F$ bir operatör olmak üzere

$$Au = f \tag{2.1}$$

denklemini ele alalım. (2.1) denkleminin aşağıdaki özellikleri sağlayan çözümünün bulunması problemine (U, F) uzay çifti için Hadamard anlamında iyi konulmuş problem denir;

- i) Her $f \in F$ için U uzayında problemin çözümü vardır.
- ii) Problemin çözümü U uzayında tektir.
- iii) Problemin koşulları F uzayında az değiştiğinde problemin çözümü de U uzayında az değişir (kararlılık koşulu) (Lavrent'ev et al. 1986, s. 26).

Bu şartlardan herhangi birinin sağlanmaması durumunda problem, (U, F) uzay çifti için Hadamard anlamında kötü konulmuş problem olarak adlandırılır.

2.1 GÖRÜNTÜLEME YÖNTEMLERİ

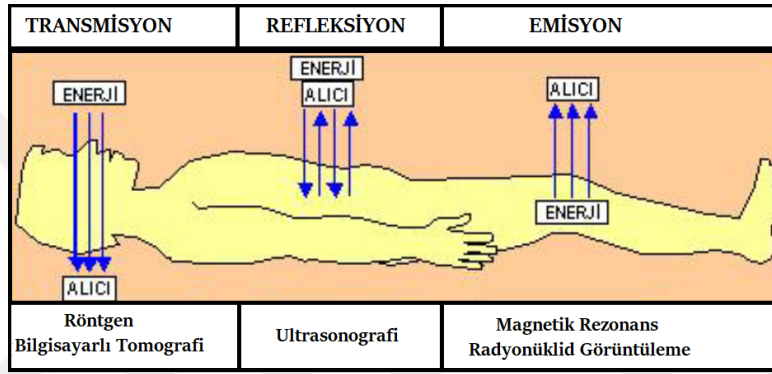
Görüntüleme yöntemleri, insan organlarının ve biyolojik sistemlerin analizi için güçlü bir araçtır. Bu amaçla birçok tomografi ve mikroskopi yöntemi mevcuttur. Bunların ortak özelliği, veri işleme sürecinin matematiksel modelinin yapılması ve bilinmeyen nesne hakkındaki verilerle ilgili denklemlerin çözümleri için sayısal metodlara ihtiyaç duyulmasıdır.

Tomografi, bir doğrular ailesi boyunca verilen bir fonksiyonun integralinden bu fonksiyonun belirlenmesi problemidir. X-ışını tomografisinde fonksiyonların integralleri X-ışını görüntülerine dayanır. X-ışını görüntüleri matematik ile gerçek dünya arasında bir ilişkiyi ortaya çıkarır (Kolehmainen and Siltanen 2003). Bilgisayarlı Tomografi, elde edilen gözlem verilerini bilinmeyen fiziksel parametrelerle ilişkilendiren denklemleri oluşturmak için X-ışını soğurumunun matematik modeline ve bu denklemlerin çözümü için de bazı metodlara ihtiyaç duyar. Böyle bir yöntemle radyografik verilerde bulunan çok büyük miktarda bilginin ortaya çıkarılması mümkün olur. Yani insan vücudunun üç boyutlu görüntüsü elde edilebilir. Bilgisayarlı Tomografi'deki bu yeni fikirler kısa süre sonra diğer tıbbi görüntüleme yöntemlerinde de kullanılmıştır (Siltanen and Mueller 2012, s. 3).

1895 yılında Alman fizikçi Wilhelm Conrad Röntgen'in X-ışınlarını buluşundan çok kısa bir zaman sonra görüntüleme yöntemleri hızla geliştirilmiştir. Yüzyıllık bir süre içerisinde Röntgen'in bilimsel buluşu, günümüz teknolojiyle birleşmiş, yeni, modern ve hızlı görüntüleme yöntemleri ve teknikleri ortaya çıkmıştır (Kaya, Adapınar ve Özkan 1997). Tıbbi Görüntüleme, en basit hali ile insan vücudunun iç yapısının çeşitli yöntemler ile görülebilir hale getirilmesidir. Tanısal radyolojinin röntgen, bilgisayarlı tomografi (BT), manyetik rezonans (MR), ultrasonografi (US) ve radyonüklid görüntülemeden oluşan beş temel yöntemi vardır (Aydoğdu, Aydoğdu ve Yakıncı 2017). Bu görüntüleme yöntemleri farklı fiziksel prensiplere dayanmaktadır. Görüntü elde etmek için kullanılan enerji ve görüntü alıcı sistemleri farklıdır. Görüntüleme yöntemlerinde başlıca üç ana prensip kullanılmaktadır (Şekil 2.2).

- **Emisyon (yayma):** Enerji kaynağı vücutta ve görüntüyü oluşturmak için vücuttan salınan enerjinin alınması ve işlenmesi gerekir. Manyetik Rezonans (MR) ve Radyonüklid Görüntüleme (RG) de bu prensip kullanılmaktadır.

- **Refleksiyon (yansım):** Üretilen enerji vücutta gönderildikten sonra, vücuttan yansıyan enerji alınarak görüntüleme sağlanır. Ultrasonografi (USG) yöntemi refleksiyon prensibi ile geliştirilmiştir.
- **Transmisyon (geçme):** Bu prensipte görüntülemeye kullanılan enerji vücutu geçer ve diğer taraftaki alıcıya ulaştırılır. Enerji kaynağı ve alıcı farklıdır. Burada kullanılan enerjinin vücutu geçebilecek kadar güçlü olması gerekmektedir. Röntgen ve Bilgisayarlı Tomografi (BT)'de transmisyon prensibi söz konusudur.



Şekil 2.2 Görüntüleme yöntemlerinin ana prensipleri

(Kaya 2010).

Manyetik Rezonans Görüntüleme (MR): MR yönteminde vücutta bulunan manyetik özelliğe sahip atomlardan yararlanılmaktadır. Bu atomlar çekirdeklerinde tek sayıda proton içeren ve dönme yapan atomlardır. Bu atomlar içinde, çekirdeğinde bir proton bulunan hidrojen atomu, vücutta bol miktarda bulunduğu ve çok iyi sinyal gönderdiği için görüntülemeye en avantajlı olanıdır. Hasta manyetik alana girdiğinde, vücuttaki protonların mıknatısın oluşturduğu manyetik alana paralel hale gelmesi sağlanmaktadır. Daha sonra verilen radyo dalgasının enerjisi ile bu hidrojen atomları, manyetik alan ile belirli bir açı oluşturmaktadır. Radyo dalgası kesildikten sonra hidrojen atomları tekrar manyetik alanın etkisi ile eski konumlarına dönmektedirler. Bu sırada hidrojen atomlarının içlerinde bulundukları moleküler yapıya göre farklı zamanlarda tekrar manyetik alana paralel konuma gelmeleri söz konusudur. Hidrojen atomlarından farklı zamanlarda sinyaller alınarak görüntüleme oluşturulmaktadır (Kaya, Adapınar ve Özkan 1997).

Radronüklid Görüntüleme (RG): Radyolojinin temel yöntemlerinden biridir. Ülkemizde nükleer tıp adı altında ayrı bir uzmanlık dalı olarak faaliyet göstermektedir. Radyonüklid maddelerin değişik yollarla doku ve organlara ulaştırılması neticesinde yaydıkları gamma ışınlarının tarayıcılar tarafından (Gamma kamera, SPECT, PET) planar ya da tomografik yöntemle algılanarak işlenmesi ve görüntü şeklinde oluşturulması esasına dayanır. Radyonüklid görüntülerinin çoğunda, elde edilen görüntünün iyileştirilmesi için bir bilgisayar kullanılır. Tek foton emisyon bilgisayarlı tomografi (single photon emission computerized tomography – SPECT) olarak bilinen bu teknikte, kamera etrafınızda dönerek gama ışınlarının pek çok açıdan görüntülerini alır. Bilgisayar, bu bilgiyi, çok daha detaylı ve kesin bir görüntü geliştirmek için kullanır. Günümüzde kanser tanısında en yaygın olarak kullanılan Pozitron Emisyon Tomografisi (PET), radyonüklid görüntülemenin diğer bir türüdür.

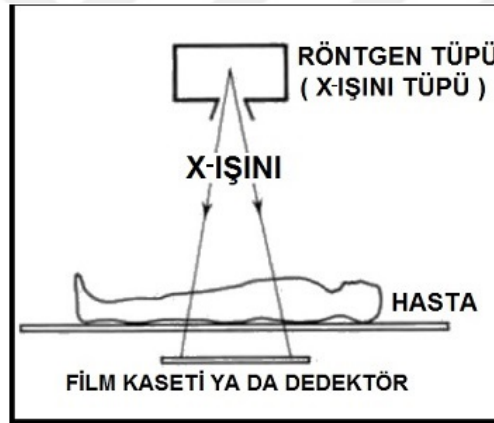
Ultrasonografi: Ultrasonografide radyoloji pratiğindeki diğer görüntüleme yöntemlerinden farklı olarak elektromanyetik radyasyon olmayan ses enerjisi kullanılmaktadır. Ses enerjisi mekanik bir enerji olup ortamdaki moleküler titreşimin bir dalga halinde yayılmasından ibarettir. Elektrik enerjisini sese, sesi ise elektrığe dönüştüren çevirici transduser adı verilen aygıtlar ultrasonografi cihazının prob bölümünü oluşturmaktadır. Elektrik – ses – elektrik dönüşümü ise piezoelektrik olay olarak adlandırılır. Ultrasonografi aygıtlarının gönderdikleri ses dalgası vücuttaki doku ara yüzeylerine geldiğinde sesin bir kısmı ilerlemeye devam eder, bir kısmı da yansımaktadır. Yansıma, arayüzü oluşturan dokuların akustik empedans farklılığına, arayüz boyutu ve yüzey özelliğine, ultrason dalgasının geliş açısına ve ultrason dalga boyu ile yansıtıcı yüzey arası ilişkiye bağlıdır. Ultrasonografi cihazları sadece transdusere dönen yansımaları algılar. Yansıyan sesin hangi derinlikten geldiği, yansıma süresi hesaplanarak belirlenir ve görüntü oluşur.

Röntgen ve Dijital Röntgen: Wilhelm Conrad Röntgen'in X-ışınlarını buluşundan sonra X-ışınının röntgen tanısında kullanılmasını sağlayan bazı özellikleri olduğu keşfedilmiştir.

- X-ışını **penetrasyon** özelliği sayesinde vücudu geçer (transmisyon). Vücut dokularını geçen ışınlar, değişik görüntü alıcılar üzerine düşürülerek görüntü oluşturur.

- X-ışının **fotografik emülsiyona olan etkileri**, radyografi işleminde fotoğraf plağının emülsiyon tabakasındaki gümüş bromür bağlarında gevşemeye neden olarak fotografik görüntü oluşmasını sağlar.
- X-ışınının **floresan maddelerle etkileşimi**, floroskopi ekranı veya ranforsatörlerden görülebilir ışık salınmasına yol açar ve bu özelliğinden, hem floroskopi hemde radyografi işlemlerinde yararlanır.

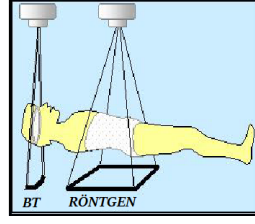
X-ışınları maddeyi (vücudu) geçerken enerjileri soğurulma ve saçılma nedeniyle azalır. Vücut yapılarında değişik oranda oluşan soğurulma ve saçılmadan dolayı filmin üzerine değişik enerji düzeylerinde ulaşan ışınlar, filmde objenin bir gölgesi şeklinde görüntü oluştururlar (Şekil 2.3).



Şekil 2.3 Röntgende X-ışını uygulaması
(Kaya, Adapınar ve Özkan 1997)

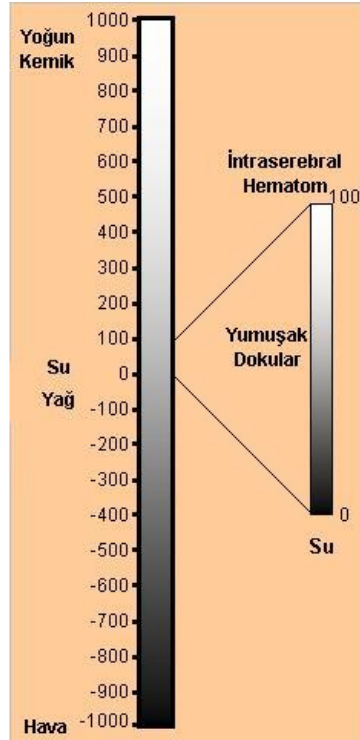
Bilgisayarlı Tomografi (BT): Bilgisayarlı Tomografi Allan MacLeod Cormack tarafından 1963 yılında teorize edilen kesitsel görüntüleme yöntemidir. BT cihazının ilk örnekleri 1970'li yılların başında üretilmiştir (Kaya, Adapınar ve Özkan 1997). Uygulama 1967-1971 yılları arasında Sir Godfrey N. Hounsfield tarafından gerçekleştirilmiştir. Tomografi, vücuttan kesit şeklinde görüntü alma işlemini tanımlar. Bilgisayarlı tomografi de kesitsel görüntü, bilgisayarlar yardımı ile elde edilir.

Bilgisayarlı Tomografi, röntgen oluşumu ile aynı prensibe sahip olsa bile farklı olarak vücuda X-ışını demeti inceltirilerek çizgisel bir şekilde gönderilmektedir (Şekil 2.4).



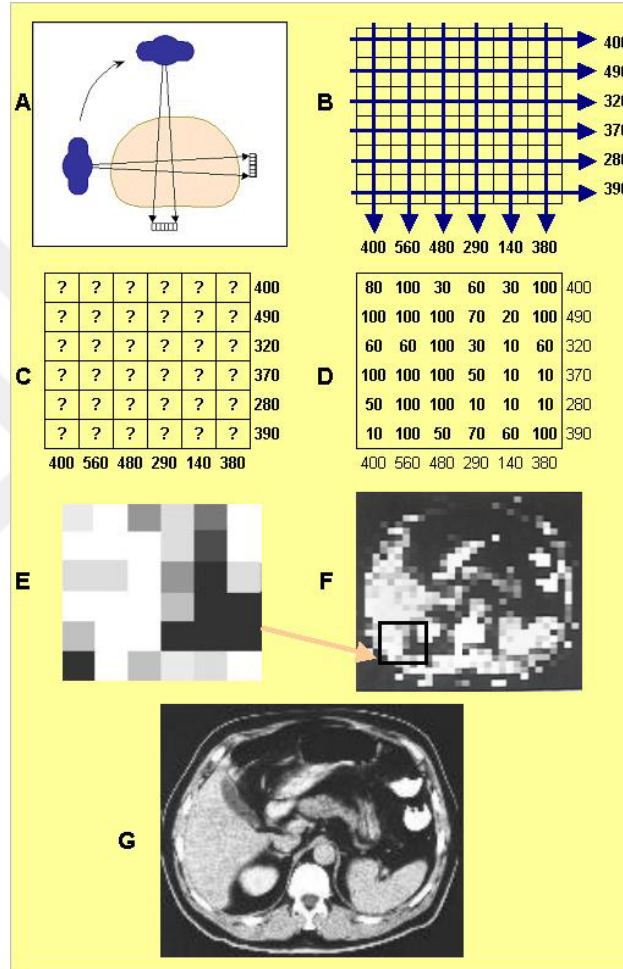
Şekil 2.4 BT ve Röntgende X-ışını uygulaması (Kaya 2010).

X-ışını gönderen tüp ve dedektör hastanın etrafında birbirine bağlı olarak dönme hareketi yaptırılır. Bu hareket esnasında X-ışını, vücuttan geçerek dedektöre görüntü oluşumunu sağlayacak gerekli verileri taşır. Dedektörler, dokular arasındaki soğurma farklılıkları sayesinde hastayı geçerek zayıflayan X-ışınlarının enerjilerinin rakamsal dönüşüme imkan veren özel görüntü alıcılarıdır. Rakamsal değerler bilgisayarlara aktarılarak bir ters problemin çözümü yapılır. Bulunan çözümler, İngiliz fizikçi Godfrey Hounsfield tarafından geliştirilen -1000 ile +1000 arasında değişen rakamlarla temsil edilen bir gri skalada görüntüye dönüştürülmektedir (Şekil 2.5).



Şekil 2.5 Hounsfield skalası (Kaya 2010).

BT görüntü oluşumu şema olarak Şekil 2.6 da basit bir biçimde gösterilmiştir. Burada A: yapılan taramayı, B: dedektörlerde elde edilen rakamsal verileri, C-D: görüntü matrisini belirleyen rakamsal verilerin hesaplanmasını, E-F: örnek görüntüdeki piksellerin oluşumunu, G: gerçek BT görüntüsünü belirtir.



Şekil 2.6 BT de görüntü oluşumu
(Kaya 2010).

BT görüntüleri tümüyle dijitaldir ve sayısal verilerden oluşur. Bu özelliği nedeniyle, görüntüler işlenebilir, istenilen bölgelerin yoğunlukları ölçülebilir ve bilgisayar teknolojinin tüm olanaklarından yararlanılarak değişik düzlemlerde ya da üç boyutlu olarak görüntüler elde edilebilir.

BÖLÜM 3

LIOUVILLE DENKLEMİ İÇİN BAZI TERS PROBLEMLERİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ VE SONLU FARK YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, ilk olarak Liouville denklemi için bir ters problemin çözümünün varlığı ve tekliği araştırılmıştır. Daha sonra bu problemin üç boyutlu durumda sonlu fark yöntemi ile sayısal çözümleri elde edilmiştir. Burada sayısal çözümü araştırılan problem üçüncü mertebeden kısmi türevli denklem için bir Dirichlet problemidir.

Önerilen sayısal çözüm metodu MATLAB programı kullanılarak değişik örnekler üzerinde test edilmiştir. Elde edilen sayısal çözümler ile problemin kesin çözümü çizelge ve grafikler yardımıyla karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.

3.1 LIOUVILLE DENKLEMİ İÇİN BİR TERS PROBLEM

Bu bölümde, $\Omega_T = \{(x, v, t) : x \in D \subset R^n, v \in G \subset R^n, t \in (0, T)\}$ bölgesinde verilen

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \{H, u\} = \lambda(x, v, t) \quad (3.1)$$

Liouville denkleminin $u(x, v, t)$ çözümünün ve $\lambda(x, v, t)$ bilinmeyen sağ tarafının bulunması ters problemi ele alınmıştır. Bu problemin çözülebilirliği araştırılmış ve sonlu fark metodu kullanılarak sayısal çözümü elde edilmiştir. Liouville denklemi için direkt problemler üzerine birçok çalışma vardır (Liboff 2003). Ters problemler ise Amirov (2001) ve Anikonov (2001) tarafından araştırılmıştır. Ayrıca Amirov, Gölgeleyen and Rahmanova (2009), Amirov, Ustaoglu and Heydarov (2011) ve Gölgeleyen (2013) de durağan kinetik ve transport denklemleri için bazı ters problemlerin yaklaşık çözümleri elde edilmiştir.

Problem 3.1 $H(x, v, t)$ fonksiyonu ve sınırda (3.1) denkleminin $u(x, v, t)$ çözümünün izi verilmiş olsun:

$$u|_{\partial\Omega_T} = u_0. \quad (3.2)$$

(3.1) denklemini ve (3.2) şartını sağlayan $u(x, v, t)$ ve $\lambda(x, v, t)$ fonksiyonlarının belirlenmesi ters problemini ele alalım.

Problem 3.1'in çözümünün varlığı ve tekliği hakkında Anikonov and Amirov (1983) ve Amirov (1995) tarafından aşağıdaki teoremler verilmiştir.

Teorem 3.1 Kabul edelim ki Hamiltonian $H(x, v, t) \in C^2(\overline{\Omega}_T)$ verilsin. Her $(x, v, t) \in \overline{\Omega}_T$, $\xi \in R^n$ için, α_1 ve α_2 pozitif sayılar olmak üzere

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial v_i \partial v_j} \xi^i \xi^j \geq \alpha_1 |\xi|^2, \quad \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \xi^i \xi^j \leq -\alpha_2 |\xi|^2 \quad (3.3)$$

eşitsizlikleri sağlansın. Ayrıca $\lambda(x, v, t)$ fonksiyonu

$$\widehat{L}\lambda \equiv \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \lambda}{\partial v_j \partial x_j} = 0 \quad (3.4)$$

diferensiyel denklemini sağlasın. Bu durumda Problem 3.1, $u \in C^2(\overline{\Omega}_T)$, $\lambda \in C^2(\Omega_T)$ olacak biçimde en çok bir (u, λ) çözümüne sahiptir.

Problem 3.1'in çözümünün varlığı Galerkin yöntemi ile araştırıldığından aşağıdaki homojen sınır koşullu problem ele alınmıştır:

Problem 3.2 $F \in H_2(\Omega_T)$ fonksiyonu verilsin. Ω_T bölgesinde

$$Lu = \lambda(x, v, t) + F(x, v, t), \quad (3.5)$$

$$u|_{\partial\Omega_T} = 0, \quad \widehat{L}\lambda = 0 \quad (3.6)$$

bağıntılarını sağlayan (u, λ) fonksiyonlar çiftinin belirlenmesi problemi.

Teorem 3.2 Teorem 3.1'in hipotezi altında Problem 3.2'nin $(u, \lambda) \in H_1(\Omega_T) \times L_2(\Omega_T)$ olacak şekilde bir çözümü vardır.

Teorem 3.1 ve Teorem 3.2'nin ispatlanmasında Ω_T bölgesinin geometrisi önem arz etmektedir. Burada belirtmek gerekir ki yarı grup teorisi kullanılarak Problem 3.1'in çözülebilirliğine ilişkin daha genel sonuçlar elde etmek mümkündür. Çünkü $L := \{H, \cdot\}$ operatörü bir daralma operatörü yarı grubunun sonsuz üreticisidir (Zhenglu 2002). Bu nedenle Problem 3.1'in çözümünün varlığı, tekliği ve kararlılığı Prilepko (2000, s. 489) da kullanılan yöntemeye dayalı olarak gösterilebilir.

3.2 PROBLEM 3.1'İN SONLU FARK METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Türevler için sonlu fark yaklaşımları, diferensiyel denklemleri çözmenin en basit ve en eski yöntemlerinden biridir. 1-boyutlu durumda L. Euler (1707-1783) tarafından ele alınan ve 2-boyutlu duruma C.Runge (1856-1927) tarafından genişletilen bu yöntemin sayısal uygulamalarda kullanılması, 1950'lerin başlarında gerçekleşmiştir. Bilim ve teknolojinin karmaşık problemleri ile başa çıkmak için uygun bir çerçeve sunan bilgisayarların ortaya çıkmasıyla birlikte bu alandaki çalışmalar daha da hızlanmıştır. Son elli yılda, kısmi diferensiyel denklemler için sonlu fark yöntemlerinin kararlılığı ve yakınsaklığı ile ilgili önemli teorik sonuçlar elde edilmiştir (Fadugba, Edogbanya and Zelibe 2013).

Problem 3.3 $\Omega_T = \{(x, v, t) \mid x \in (a, b) \subset \mathbb{R}, v \in (c, d) \subset \mathbb{R}, t \in (e, f) \subset \mathbb{R}\}$ bölgesinde,

$$u_t(x, v, t) + H_v(x, v, t) u_x(x, v, t) - H_x(x, v, t) u_v(x, v, t) = \lambda(x, v, t) \quad (3.7)$$

denkleminde

$$\begin{aligned} u(x, v, t)|_{\partial\Omega_T} &= u_0(x, v, t), \\ \widehat{L}\lambda &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

koşullarını sağlayan (u, λ) fonksiyonlar çiftinin bulunması problemini ele alalım.

Eğer $\widehat{L} = \frac{\partial^2}{\partial v \partial x}$ operatörü (3.7) denkleminin her iki tarafına uygulanırsa,

$$u_{txv} + u_{xvx} H_v - u_{vvx} H_x + u_{xx} H_{vv} - u_{vv} H_{xx} + u_{xv} H_{vx} - u_{vx} H_{xv} + u_x H_{vvx} - u_v H_{xvx} = 0 \quad (3.9)$$

üçüncü mertebeden kısmi türevli diferensiyel denklemi elde edilir.

$I, J, K \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\Delta x = \frac{(b-a)}{(I+1)}$, $\Delta v = \frac{(d-c)}{(J+1)}$ ve $\Delta t = \frac{(f-e)}{(K+1)}$ sırasıyla x, v , ve t 'ye göre adım büyüklüklerini gösterebilir. Böylece (a, b) , (c, d) , (e, f) aralıkları sırasıyla $(I+1)$, $(J+1)$, $(K+1)$ tane eşit alt aralığa bölünmüş olur. Bu aralıkların kesim noktaları olan örgü noktalarında $u_{i,j}^k = u(x_i, v_j, t_k) = u(a + i\Delta x, c + j\Delta v, e + k\Delta t)$ ve $H(x_i, v_j, t_k) = H(a + i\Delta x, c + j\Delta v, e + k\Delta t)$ fonksiyonları için sonlu fark yaklaşımları sırasıyla $\tilde{u}_{i,j}^k$ ve $h_{i,j}^k$ ile gösterilmiştir.

$u|_{\partial\Omega_T} = u_0$ sınır koşulu için

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{0,j}^k &= u(a, v_j, t_k), \quad \tilde{u}_{I+1,j}^k = u(b, v_j, t_k), \quad j = 0, 1, \dots, J+1, \quad k = 0, 1, \dots, K+1, \\ \tilde{u}_{i,0}^k &= u(x_i, c, t_k), \quad \tilde{u}_{i,J+1}^k = u(x_i, d, t_k), \quad i = 0, 1, \dots, I+1, \quad k = 0, 1, \dots, K+1, \\ \tilde{u}_{i,j}^0 &= u(x_i, v_j, e), \quad \tilde{u}_{i,j}^{K+1} = u(x_i, v_j, f), \quad i = 0, 1, \dots, I+1, \quad j = 0, 1, \dots, J+1\end{aligned}$$

yazılabilir.

u fonksiyonunun x, v, t değişkenlerine göre birinci mertebeden türevleri için ileri fark yaklaşımı

$$(u_x)_{i,j}^k \approx \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i,j}^k}{\Delta x}, \quad (u_v)_{i,j}^k \approx \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j}^k}{\Delta v}, \quad (u_t)_{i,j}^k \approx \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t},$$

u fonksiyonunun x, v, t değişkenlerine göre birinci mertebeden türevleri için geri fark yaklaşımı

$$(u_x)_{i,j}^k \approx \frac{u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k}{\Delta x}, \quad (u_v)_{i,j}^k \approx \frac{u_{i,j}^k - u_{i,j-1}^k}{\Delta v}, \quad (u_t)_{i,j}^k \approx \frac{u_{i,j}^k - u_{i,j}^{k-1}}{\Delta t},$$

u fonksiyonunun x, v, t değişkenlerine göre birinci mertebeden kısmi türevleri için merkezi fark yaklaşımı

$$(u_x)_{i,j}^k \approx \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k}{2\Delta x}, \quad (u_v)_{i,j}^k \approx \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k}{2\Delta v}, \quad (u_t)_{i,j}^k \approx \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k-1}}{2\Delta t};$$

İkinci ve üçüncü mertebeden kısmi türevler için sonlu fark yaklaşımları

$$\begin{aligned}(u_{xx})_{i,j}^k &\approx \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{(\Delta x)^2}, \quad (u_{vv})_{i,j}^k \approx \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{(\Delta v)^2}, \\ (u_{xv})_{i,j}^k &\approx \frac{u_{i+1,j+1}^k - u_{i+1,j-1}^k - u_{i-1,j+1}^k + u_{i-1,j-1}^k}{4\Delta x \Delta v},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(u_{xxv})_{i,j}^k &\approx \frac{2u_{i,j-1}^k - 2u_{i,j+1}^k + u_{i+1,j+1}^k + u_{i-1,j+1}^k - u_{i+1,j-1}^k - u_{i-1,j-1}^k}{2(\Delta x)^2(\Delta v)}, \\
(u_{xvv})_{i,j}^k &\approx \frac{2u_{i-1,j}^k - 2u_{i+1,j}^k + u_{i+1,j+1}^k - u_{i-1,j+1}^k + u_{i+1,j-1}^k - u_{i-1,j-1}^k}{2(\Delta x)(\Delta v)^2}, \\
(u_{xvt})_{i,j}^k &\approx \frac{1}{8\Delta x\Delta v\Delta t} (u_{i+1,j+1}^{k+1} - u_{i+1,j+1}^{k-1} - u_{i+1,j-1}^{k+1} + u_{i+1,j-1}^{k-1} - u_{i-1,j+1}^{k+1} + u_{i-1,j+1}^{k-1} \\
&\quad + u_{i-1,j-1}^{k+1} - u_{i-1,j-1}^{k-1})
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanabilir (Gölgeleyen 2011).

Bu sonlu fark yaklaşım formülleri (3.9) denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
&\frac{(\tilde{u}_{i+1,j+1}^{k+1} - \tilde{u}_{i+1,j+1}^{k-1} - \tilde{u}_{i+1,j-1}^{k+1} + \tilde{u}_{i+1,j-1}^{k-1} - \tilde{u}_{i-1,j+1}^{k+1} + \tilde{u}_{i-1,j+1}^{k-1} + \tilde{u}_{i-1,j-1}^{k+1} - \tilde{u}_{i-1,j-1}^{k-1})}{8\Delta x\Delta v\Delta t} \\
&+ \frac{(2\tilde{u}_{i,j-1}^k - 2\tilde{u}_{i,j+1}^k + \tilde{u}_{i+1,j+1}^k + \tilde{u}_{i-1,j+1}^k - \tilde{u}_{i+1,j-1}^k - \tilde{u}_{i-1,j-1}^k)}{2(\Delta x)^2(\Delta v)} \frac{(h_{i,j+1}^k - h_{i,j-1}^k)}{2(\Delta v)} \\
&- \frac{(2\tilde{u}_{i-1,j}^k - 2\tilde{u}_{i+1,j}^k + \tilde{u}_{i+1,j+1}^k - \tilde{u}_{i-1,j+1}^k + \tilde{u}_{i+1,j-1}^k - \tilde{u}_{i-1,j-1}^k)}{2(\Delta x)(\Delta v)^2} \frac{(h_{i+1,j}^k - h_{i-1,j}^k)}{2(\Delta x)} \\
&+ \frac{(\tilde{u}_{i+1,j}^k - 2\tilde{u}_{i,j}^k + \tilde{u}_{i-1,j}^k)}{(\Delta x)^2} \frac{(h_{i,j+1}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i,j-1}^k)}{(\Delta v)^2} \\
&- \frac{(\tilde{u}_{i,j+1}^k - 2\tilde{u}_{i,j}^k + \tilde{u}_{i,j-1}^k)}{(\Delta v)^2} \frac{(h_{i+1,j}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i-1,j}^k)}{(\Delta x)^2} \\
&+ \frac{(\tilde{u}_{i+1,j}^k - \tilde{u}_{i-1,j}^k)}{2\Delta x} \frac{(h_{i+1,j+1}^k - 2h_{i+1,j}^k + h_{i+1,j-1}^k - h_{i-1,j+1}^k + 2h_{i-1,j}^k - h_{i-1,j-1}^k)}{2(\Delta x)(\Delta v)^2} \\
&- \frac{(\tilde{u}_{i,j+1}^k - \tilde{u}_{i,j-1}^k)}{2\Delta v} \frac{(h_{i+1,j+1}^k - 2h_{i,j+1}^k + h_{i-1,j+1}^k - h_{i+1,j-1}^k + 2h_{i,j-1}^k - h_{i-1,j-1}^k)}{2(\Delta x)^2(\Delta v)} = 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8\Delta x \Delta v \Delta t} (\tilde{u}_{i+1,j+1}^{k+1} - \tilde{u}_{i+1,j+1}^{k-1} - \tilde{u}_{i+1,j-1}^{k+1} + \tilde{u}_{i+1,j-1}^{k-1} - \tilde{u}_{i-1,j+1}^{k+1} + \tilde{u}_{i-1,j+1}^{k-1} + \tilde{u}_{i-1,j-1}^{k+1} \\
& - \tilde{u}_{i-1,j-1}^{k-1}) \\
& + \frac{(h_{i,j+1}^k - h_{i,j-1}^k)}{4(\Delta x)^2(\Delta v)^2} (2\tilde{u}_{i,j-1}^k - 2\tilde{u}_{i,j+1}^k + \tilde{u}_{i+1,j+1}^k + \tilde{u}_{i-1,j+1}^k - \tilde{u}_{i+1,j-1}^k - \tilde{u}_{i-1,j-1}^k) \\
& - \frac{(h_{i+1,j}^k - h_{i-1,j}^k)}{4(\Delta x)^2(\Delta v)^2} (2\tilde{u}_{i-1,j}^k - 2\tilde{u}_{i+1,j}^k + \tilde{u}_{i+1,j+1}^k - \tilde{u}_{i-1,j+1}^k + \tilde{u}_{i+1,j-1}^k - \tilde{u}_{i-1,j-1}^k) \\
& + \frac{(h_{i,j+1}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i,j-1}^k)}{(\Delta x)^2(\Delta v)^2} (\tilde{u}_{i+1,j}^k - 2\tilde{u}_{i,j}^k + \tilde{u}_{i-1,j}^k) \\
& - \frac{(h_{i+1,j}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i-1,j}^k)}{(\Delta x)^2(\Delta v)^2} (\tilde{u}_{i,j+1}^k - 2\tilde{u}_{i,j}^k + \tilde{u}_{i,j-1}^k) \\
& + \frac{(h_{i+1,j+1}^k - 2h_{i+1,j}^k + h_{i+1,j-1}^k - h_{i-1,j+1}^k + 2h_{i-1,j}^k - h_{i-1,j-1}^k)}{4(\Delta x)^2(\Delta v)^2} (\tilde{u}_{i+1,j}^k - \tilde{u}_{i-1,j}^k) \\
& - \frac{(h_{i+1,j+1}^k - 2h_{i,j+1}^k + h_{i-1,j+1}^k - h_{i+1,j-1}^k + 2h_{i,j-1}^k - h_{i-1,j-1}^k)}{4(\Delta x)^2(\Delta v)^2} (\tilde{u}_{i,j+1}^k - \tilde{u}_{i,j-1}^k) = 0
\end{aligned}$$

ve sonuç olarak

$$\begin{aligned}
& k_7 (\tilde{u}_{i+1,j+1}^{k+1} - \tilde{u}_{i+1,j+1}^{k-1} - \tilde{u}_{i+1,j-1}^{k+1} + \tilde{u}_{i+1,j-1}^{k-1} - \tilde{u}_{i-1,j+1}^{k+1} + \tilde{u}_{i-1,j+1}^{k-1} + \tilde{u}_{i-1,j-1}^{k+1} \\
& - \tilde{u}_{i-1,j-1}^{k-1}) + (-2k_4 + 2k_3) \tilde{u}_{i,j}^k - (2k_2 + k_3 + k_5) \tilde{u}_{i,j+1}^k + (2k_2 - k_3 + k_5) \tilde{u}_{i,j-1}^k \\
& + (-k_6 + k_4 - 2k_1) \tilde{u}_{i-1,j}^k + (k_2 + k_1) \tilde{u}_{i-1,j+1}^k + (-k_2 + k_1) \tilde{u}_{i-1,j-1}^k \\
& + (k_6 + k_4 + 2k_1) \tilde{u}_{i+1,j}^k + (k_2 - k_1) \tilde{u}_{i+1,j+1}^k + (k_2 + k_1) \tilde{u}_{i+1,j-1}^k = 0, \\
& i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, K;
\end{aligned} \tag{3.10}$$

bulunur. Burada

$$k_1 = \frac{h_{i+1,j}^k - h_{i-1,j}^k}{4(\Delta x)^2(\Delta v)^2}, k_2 = \frac{h_{i,j+1}^k - h_{i,j-1}^k}{4(\Delta x)^2(\Delta v)^2},$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= \frac{h_{i+1,j}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i-1,j}^k}{(\Delta x)^2 (\Delta v)^2}, \quad k_4 = \frac{h_{i,j+1}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i,j-1}^k}{(\Delta x)^2 (\Delta v)^2}, \\
k_5 &= \frac{h_{i+1,j+1}^k - 2h_{i,j+1}^k + h_{i-1,j+1}^k - h_{i+1,j-1}^k + 2h_{i,j-1}^k - h_{i-1,j-1}^k}{4(\Delta x)^2 (\Delta v)^2}, \\
k_6 &= \frac{h_{i+1,j+1}^k - 2h_{i+1,j}^k + h_{i+1,j-1}^k - h_{i-1,j+1}^k + 2h_{i-1,j}^k - h_{i-1,j-1}^k}{4(\Delta x)^2 (\Delta v)^2}, \\
k_7 &= \frac{1}{8(\Delta x)(\Delta v)(\Delta t)}
\end{aligned}$$

olarak tanımlıdır.

Ω_T bölgesinin $I \times J \times K$ tane örgü noktasında Problem 3.3'ün yaklaşık çözümü olan $\tilde{u}_{i,j}^k$ değerleri

$$\tilde{A}\tilde{\mathbf{u}} = \mathcal{F} \quad (3.11)$$

matris denklemi çözülerek elde edilir. Burada $\tilde{A}$ üçlü blok bant matrisidir:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}^{(1)} & \mathcal{B}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathcal{C}^{(2)} & \mathcal{A}^{(2)} & \mathcal{B}^{(2)} & \ddots & \vdots \\ 0 & \mathcal{C}^{(3)} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathcal{B}^{(I-1)} \\ 0 & \cdots & 0 & \mathcal{C}^{(I)} & \mathcal{A}^{(I)} \end{bmatrix}_{IJK \times IJK}. \quad (3.12)$$

(3.12) matrisinde bulunan $\mathcal{A}^{(i)}$, $\mathcal{B}^{(i)}$, $\mathcal{C}^{(i)}$ matrisleri aşağıda verilmiştir:

$$\mathcal{A}^{(i)} = \begin{bmatrix} A_1^{(i,1)} & A_2^{(i,1)} & 0 & \cdots & 0 \\ A_3^{(i,2)} & A_1^{(i,2)} & A_2^{(i,2)} & \ddots & \vdots \\ 0 & A_3^{(i,3)} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & A_2^{(i,J-1)} \\ 0 & \cdots & 0 & A_3^{(i,J)} & A_1^{(i,J)} \end{bmatrix}_{JK \times JK}, \quad i = 1, 2, \dots, I,$$

$$\mathcal{B}^{(i)} = \begin{bmatrix} B_1^{(i,1)} & B_2^{(i,1)} & 0 & \dots & 0 \\ B_3^{(i,2)} & B_1^{(i,2)} & B_2^{(i,2)} & \ddots & \vdots \\ 0 & B_3^{(i,3)} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & B_2^{(i,J-1)} \\ 0 & \dots & 0 & B_3^{(i,J)} & B_1^{(i,J)} \end{bmatrix}_{JK \times JK}, \quad i = 1, 2, \dots, I-1,$$

$$\mathcal{C}^{(i)} = \begin{bmatrix} C_1^{(i,1)} & C_2^{(i,1)} & 0 & \dots & 0 \\ C_3^{(i,2)} & C_1^{(i,2)} & C_2^{(i,2)} & \ddots & \vdots \\ 0 & C_3^{(i,3)} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & C_2^{(i,J-1)} \\ 0 & \dots & 0 & C_3^{(i,J)} & C_1^{(i,J)} \end{bmatrix}_{JK \times JK}, \quad i = 2, 3, \dots, I.$$

Burada

$$A_s^{(i,j)} = \begin{bmatrix} f_s(i,j) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_s(i,j) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & f_s(i,j) \end{bmatrix}_{K \times K},$$

$$B_s^{(i,j)} = \begin{bmatrix} g_s(i,j) & \frac{(-1)^s(s-1)}{(s-1)!}a & 0 & \dots & 0 \\ \frac{(-1)^{(s+1)}(s-1)}{(s-1)!}a & g_s(i,j) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{(-1)^s(s-1)}{(s-1)!}a \\ 0 & \dots & 0 & \frac{(-1)^{(s+1)}(s-1)}{(s-1)!}a & g_s(i,j) \end{bmatrix}_{K \times K},$$

$$C_s^{(i,j)} = \begin{bmatrix} h_s(i,j) & \frac{(-1)^{(s+1)}(s-1)}{(s-1)!}a & 0 & \dots & 0 \\ \frac{(-1)^s(s-1)}{(s-1)!}a & h_s(i,j) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{(-1)^{(s+1)}(s-1)}{(s-1)!}a \\ 0 & \dots & 0 & \frac{(-1)^s(s-1)}{(s-1)!}a & h_s(i,j) \end{bmatrix}_{K \times K},$$

$s = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, \dots, J$ ve

$$f_1(i,j) = -2k_4 + 2k_3, f_2(i,j) = -2k_2 - k_3 - k_5, f_3(i,j) = 2k_2 - k_3 + k_5,$$

$$h_1(i,j) = -2k_1 + k_4 - k_6, h_2(i,j) = k_1 + k_2, h_3(i,j) = k_1 - k_2,$$

$$g_1(i,j) = 2k_1 + k_4 + k_6, g_2(i,j) = -k_1 + k_2, g_3(i,j) = -k_1 - k_2, a = k_7$$

olarak tanımlıdır.

(3.11) denkleminde $\mathcal{F}$; $\tilde{u}_{0,j}^k, \tilde{u}_{I+1,j}^k, \tilde{u}_{i,0}^k, \tilde{u}_{i,J+1}^k, \tilde{u}_{i,j}^0, \tilde{u}_{i,j}^{K+1}$,
 $(i = 0, 1, \dots, I+1, j = 0, 1, \dots, J+1, k = 0, 1, \dots, K+1)$ bilinen sınır değerlerini içeren
sütun matrisi ve $\tilde{\mathbf{u}}$ ise

$$\tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{u}_{1,1}^1, \tilde{u}_{1,1}^2, \dots, \tilde{u}_{1,1}^K, \tilde{u}_{1,2}^1, \tilde{u}_{1,2}^2, \dots, \tilde{u}_{1,2}^K, \dots, \tilde{u}_{1,J}^1, \tilde{u}_{1,J}^2, \dots, \tilde{u}_{1,J}^K, \dots, \tilde{u}_{I,J}^K]^T$$

$IJK \times 1$ tipinde bir çözüm vektörüdür.

Son olarak (u, λ) çözüm ikilisinde λ 'yı sayısal olarak hesaplamak için (3.7) denkleminde
merkezi fark formülleri yazılarak elde edilen

$$\frac{(\tilde{u}_{i,j}^{k+1} - \tilde{u}_{i,j}^{k-1})}{2\Delta t} + k_2 \frac{(\tilde{u}_{i+1,j}^k - \tilde{u}_{i-1,j}^k)}{2\Delta x} - k_1 \frac{(\tilde{u}_{i,j+1}^k + \tilde{u}_{i,j-1}^k)}{2\Delta v} = \tilde{\lambda}_{i,j}^k,$$

$i = 1, 2, \dots, I; j = 1, 2, \dots, J; k = 1, 2, \dots, K$ denkleminin çözülmesiyle

$\lambda(x_i, v_j, t_k) = \lambda(a + i\Delta x, c + j\Delta v, e + k\Delta t)$ fonksiyonu için $\tilde{\lambda}_{i,j}^k$ yaklaşık çözümü elde
edilir.

3.2.1 Sayısal Örnekler

Bu bölümde, önerilen sayısal yöntemi test etmek amacıyla (3.5)-(3.6) formunda üç adet
ters problem ele alınmıştır. Sunulan örnekler, verilen bölgede denklemini ve koşulları sağ-
layacak şekilde farklı yapıda fonksiyonlar seçilerek oluşturulmuştur. Hesaplamalar In-
tel(R) Core(TM) i5-4200u CPU 1.60-2.30 GHz işlemciye ve 8 Gb Ram belleğe sahip Win-
dows 10 işletim sistemli bir bilgisayarda MATLAB R2014a programı kullanılarak gerçek-
leştirilmiştir. Bulunan yaklaşık çözüm, kesin çözüm ile grafikler ve çizelgeler yardımıyla
karşılaştırılmıştır.

Örnek 3.1

$$H(x, v, t) = v^2 + \log(x)$$

ve

$$F = (v - 2tv + 2tv^3 - v^3)x^3 + (6t^2v^4 - 9t^2v^2 - 6tv^4 - 10tv^3 + 9tv^2 + 10tv + 5v^3 \\ - 5v)x^2 + (-20t^2v^4 + 35t^2v^2 + 20tv^4 + 12tv^3 - 35tv^2 - 12tv - 6v^3 + 6v)x$$

olmak üzere $\Omega_T = (2, 3) \times (-1, 1) \times (0, 1)$ bölgesinde (3.5) denklemini (3.6) koşulları
altında sağlayan (u, λ) çözüm ikilisinin bulunması problemini ele alalım.

Problemin kesin çözümünün

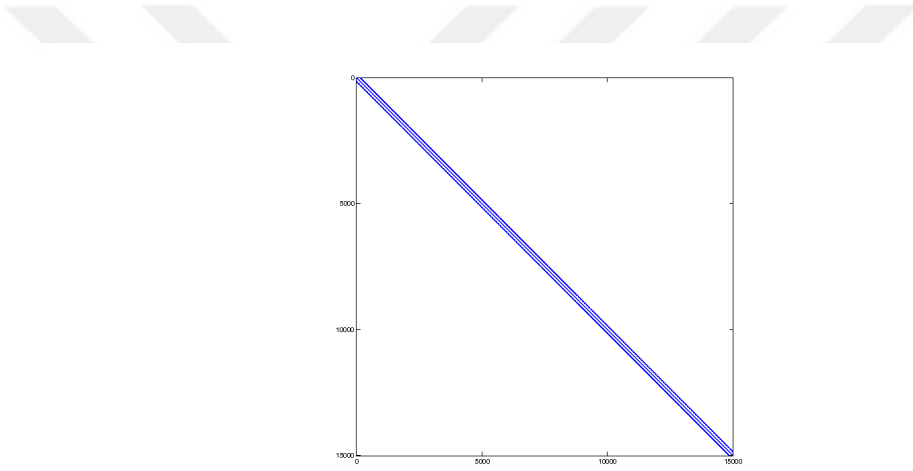
$$u(x, v, t) = xv(x-2)(x-3)(v^2-1)(t^2-t),$$

$$\lambda(x, v, t) = t(t-1)(12v^4 - 30v^2 + x^2 - 5x + 6)$$

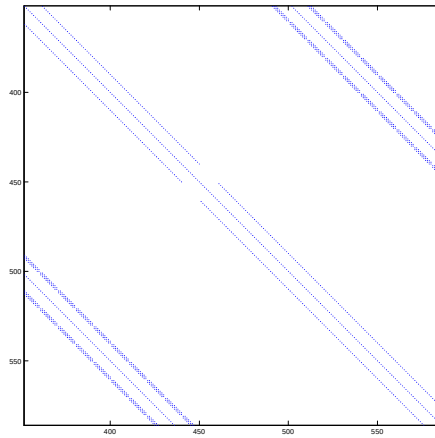
olduğu bilinmektedir.

Burada $I = 100$, $J = 15$, $K = 10$ alınarak en fazla 15000 adet örgü noktasında u ve λ değerlerinin yaklaşık çözümleri hesaplanmıştır.

Şekil 3.1 de, $\tilde{A}$ matrisinin 15000×15000 tipinde üçlü blok bant matris olduğu gösterilmiştir. Şekil 3.1'in yakından görünümü Şekil 3.2 de verilmiştir.



Şekil 3.1 Örnek 3.1 için $\tilde{A}$ matrisinin yapısı.



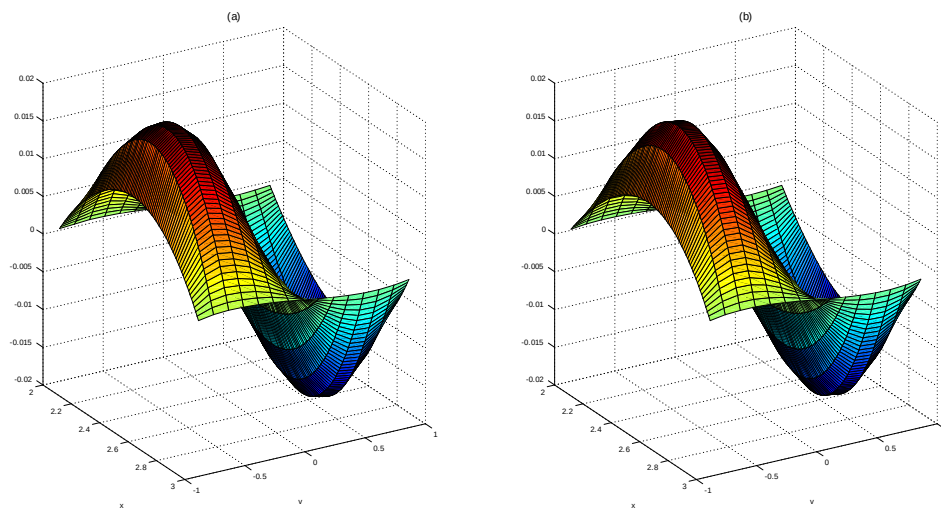
Şekil 3.2 Şekil 3.1'in yakından görünümü.

Örnek 3.1 de farklı sayıdaki örgü noktaları için u fonksiyonunun hesaplanan yaklaşık değerlerinde ortaya çıkan maksimum ve minimum hata miktarları ve hesaplama süreleri Çizelge 3.1 de sunulmuştur. Bu çizelgede verilen maksimum ve minimum hatalar; u fonksiyonunun bir örgü noktasındaki kesin değeri ile hesaplanan yaklaşık değeri arasındaki farkın mutlak değeri kullanılarak hesaplanmıştır.

Çizelge 3.1 Örnek 3.1'in $u(x, v, t)$ çözümü için hata miktarları ve hesaplama süreleri.

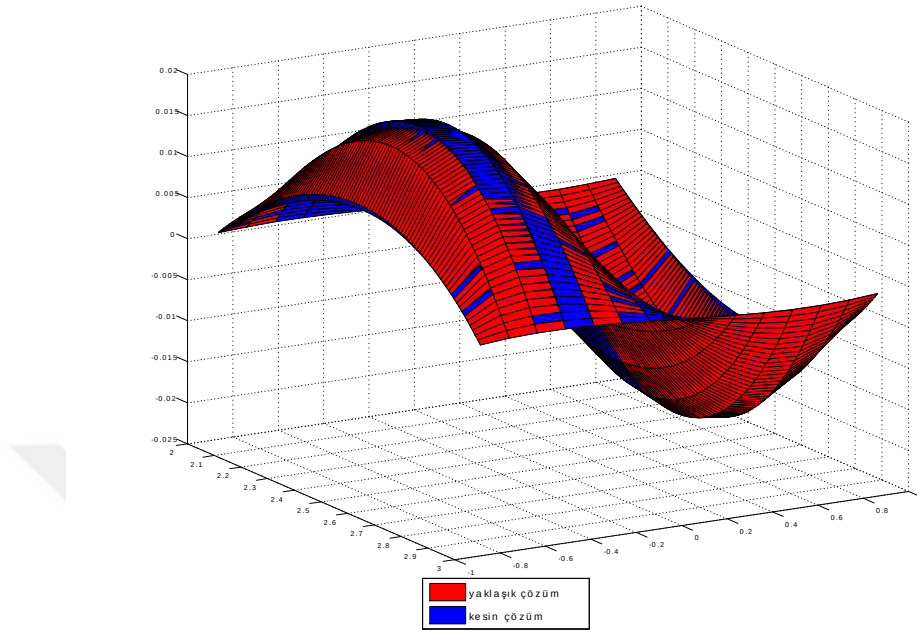
	$I = 25, J = 20,$ $K = 10$	$I = 25, J = 20,$ $K = 20$	$I = 100, J = 15,$ $K = 10$
Örgü noktalarının sayısı	5000	10000	15000
Minimum hata	$4.05E - 08$	$9.04E - 10$	$8.24E - 09$
Maksimum hata	$9.49E - 04$	$9.48E - 04$	0.001777
Hesaplama süresi	683.18 s	3405.59 s	25994.86 s

Örnek 3.1 de u fonksiyonu için hesaplanan yaklaşık değerler ve kesin çözüm $t = 0.5$ alınarak Şekil 3.3 de karşılaştırmalı olarak verilmiştir.



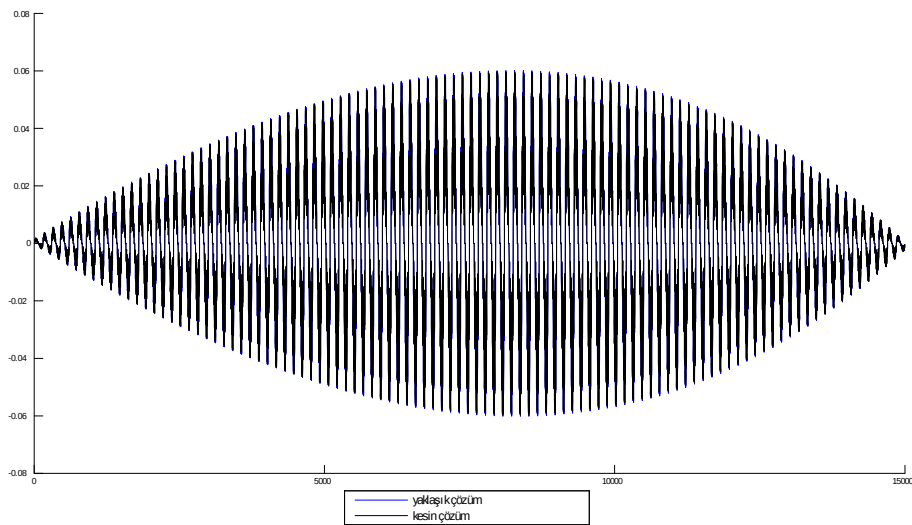
Şekil 3.3 Örnek 3.1 de u için (a) yaklaşık çözüm ve (b) kesin çözüm.

Şekil 3.4 de, bu iki çözüm aynı grafik üzerinde birleştirilerek verilmiştir.

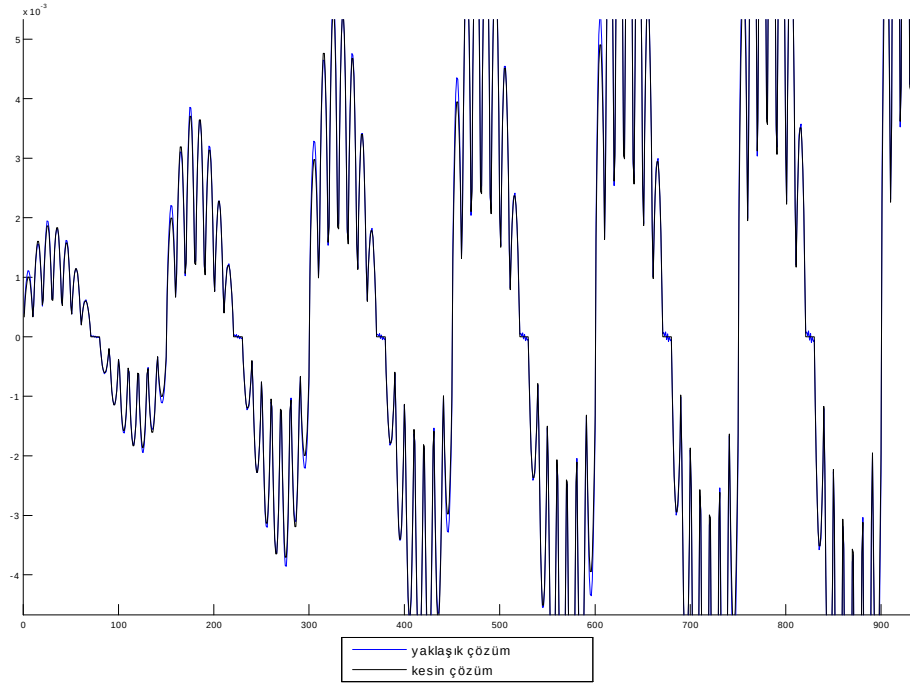


Şekil 3.4 Örnek 3.1 de u için yaklaşık ve kesin çözümlerin aynı grafikte gösterimi.

Örnek 3.1 de u çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel gösterimi Şekil 3.5 de sunulmuştur.

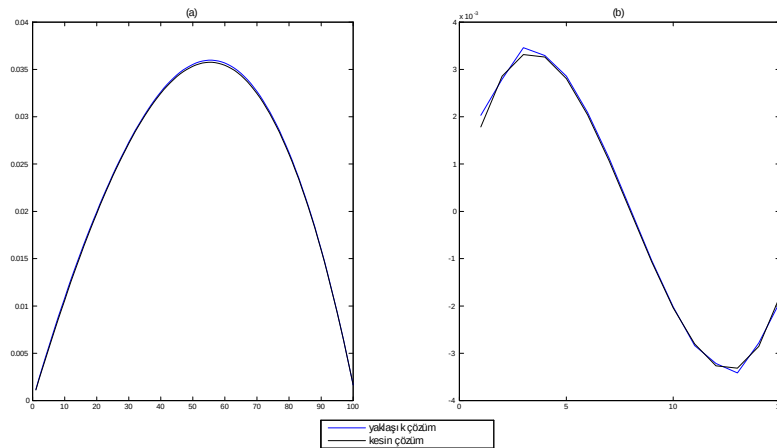


Şekil 3.5 Örnek 3.1 de u çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel gösterimi.



Şekil 3.6 Şekil 3.5'in yakından görünümü.

Şekil 3.7 de, u fonksiyonu için Şekil 3.3 de verilen yaklaşık ve kesin çözümlerin kesitsel grafikleri sunulmuştur.



Şekil 3.7 Örnek 3.1 de u fonksiyonu için kesitsel görünüm

(a) v, t sabit; (b) x, t sabit.

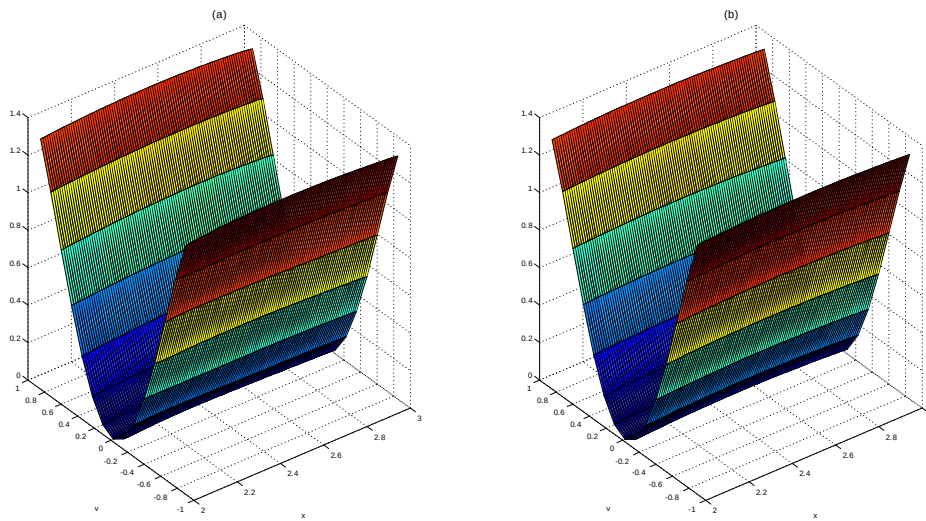
Örnek 3.1 için farklı sayıdaki örgü noktalarında λ fonksiyonunun hesaplanan yaklaşık değerlerinde ortaya çıkan maksimum ve minimum hata miktarları ve hesaplama süreleri

Çizelge 3.2 de gösterilmiştir. Bu çizelgede verilen maksimum ve minimum hatalar; λ fonksiyonunun bulunduğu örgü noktasındaki kesin değeri ile hesaplanan yaklaşık değeri arasındaki farkın mutlak değeri kullanılarak hesaplanmıştır.

Çizelge 3.2 Örnek 3.1'in $\lambda(x, v, t)$ çözümü için hata miktarları ve hesaplama süreleri.

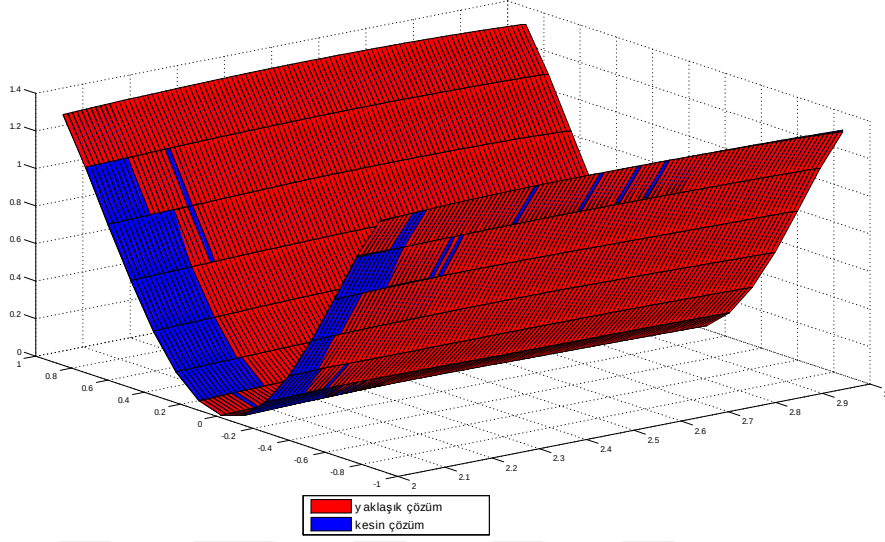
	$I = 25, J = 20,$ $K = 10$	$I = 25, J = 20,$ $K = 20$	$I = 100, J = 15,$ $K = 10$
Örgü noktalarının sayısı	5000	10000	15000
Minimum hata	$7.64E - 06$	$2.26E - 06$	$9.20E - 07$
Maksimum hata	0.046766	0.043768	0.044113
Hesaplama süresi	683.18 s	3405.59 s	25994.86 s

Örnek 3.1 de $\lambda(x, v, t)$ fonksiyonu için hesaplanan yaklaşık ve kesin çözüm $t = 0.5$ alınarak Şekil 3.8 de karşılaştırmalı olarak verilmiştir.



Şekil 3.8 Örnek 3.1 de λ için (a) yaklaşık çözüm, (b) kesin çözüm.

Şekil 3.8 de, grafiği gösterilen bu iki çözüm, Şekil 3.9 da aynı grafik üzerinde birleştirilerek verilmiştir.



Şekil 3.9 Örnek 3.1 de λ için yaklaşık ve kesin çözümlerin aynı grafikte gösterimi.

Örnek 3.2 $H(x, v, t) = \frac{v^2}{2} - x^2$ ve

$$\begin{aligned} F = & (4te^v - 4t^2e^v - 2tve^v + 2t^2ve^v)x^3 + (v + 3e^v + 20t^2e^v - 2tv - 26te^v - ve^v + 12tve^v \\ & - 10t^2ve^v)x^2 + (4tv - 15e^v - 2t^2v^2 - 24t^2e^v - 5v + 2tv^2 + 6t^2v + 54te^v + 5ve^v \\ & - 16tve^v - 2tv^2e^v + 6t^2ve^v + 2t^2v^2e^v)x \end{aligned}$$

olmak üzere $\Omega_T = (2, 3) \times (0, 3) \times (0, 1)$ bölgesinde (3.5) denklemini (3.6) koşulları altında sağlayan (u, λ) çözüm çiftinin bulunması problemi.

Problemin kesin çözümünün

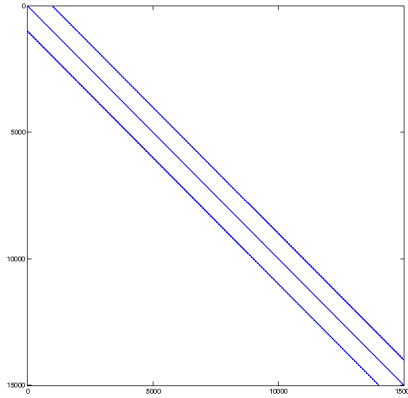
$$u(x, v, t) = (x - 2)(x - 3)(e^v - 1)(v - 3)(t^2 - t)$$

ve

$$\begin{aligned} \lambda(x, v, t) = & (-2t^2 + 2t)x^3 + (10t^2 - 4t - 3)x^2 + (-12t^2 - 18t + 15)x + 36t + 6v \\ & + tv(5tv - 5v - 15t + 3) + e^v(v - 3)(12t + 5tv - 5t^2v - 6) - 18 \end{aligned}$$

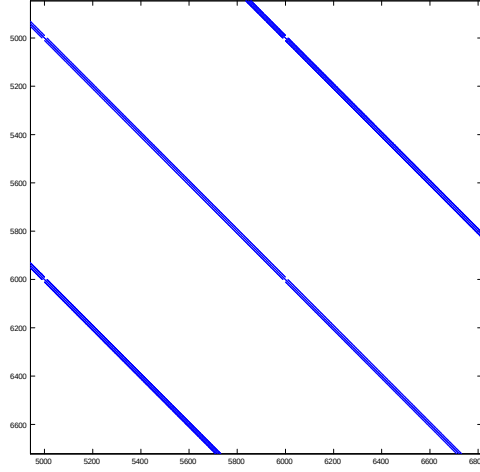
olduğu bilinmektedir.

Burada $I = 15$, $J = 100$, $K = 10$ alınarak en fazla 15000 adet örgü noktasında u ve λ değerleri hesaplanmıştır. Şekil 3.10 da $\tilde{A}$ matrisinin yapısının 15000×15000 tipinde üçlü blok bant matris olduğu gösterilmiştir.



Şekil 3.10 Örnek 3.2 için $\tilde{A}$ matrisinin yapısı.

Şekil 3.11 de, Şekil 3.10'un yakından görünümü yer almaktadır.



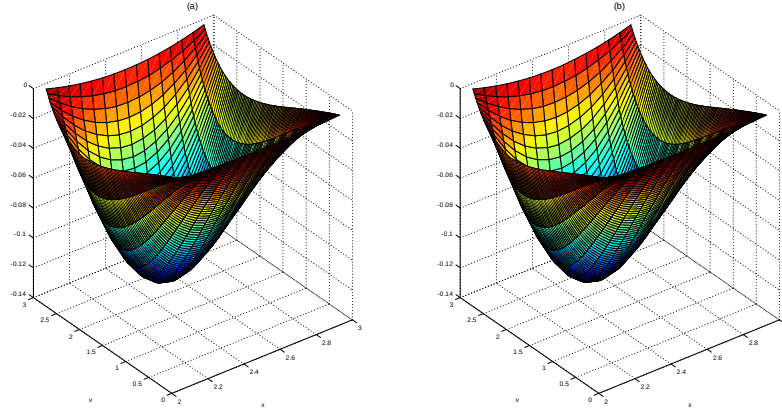
Şekil 3.11 Şekil 3.10'un yakından gösterimi.

Örnek 3.2 de farklı sayıdaki örgü noktaları için u fonksiyonunun hesaplanan yaklaşık değerlerinde ortaya çıkan maksimum ve minimum hata miktarları ve hesaplama süreleri Çizelge 3.3 de gösterilmiştir. Bu çizelgede verilen maksimum ve minimum hatalar; u fonksiyonunun bulunduğu örgü noktasındaki kesin değeri ile hesaplanan yaklaşık değeri arasındaki farkın mutlak değeri kullanılarak hesaplanmıştır.

Çizelge 3.3 Örnek 3.2'nin $u(x, v, t)$ çözümü için hata miktarları ve hesaplama süreleri.

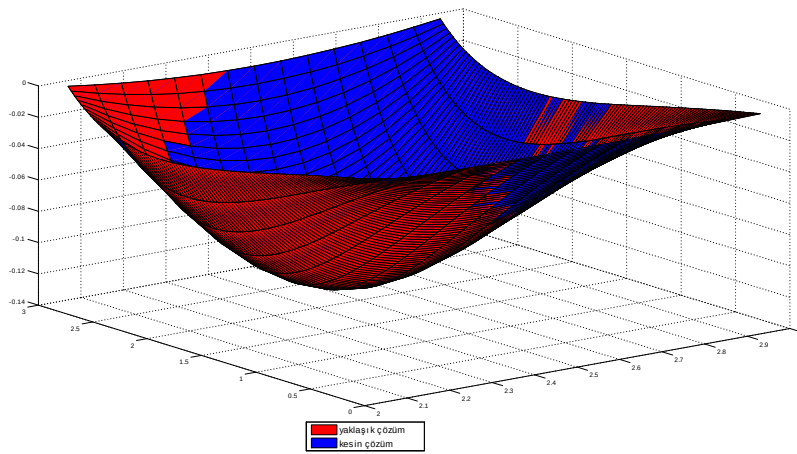
	$I = 25, J = 20,$ $K = 10$	$I = 25, J = 20,$ $K = 20$	$I = 15, J = 100,$ $K = 10$
Örgü noktalarının sayısı	5000	10000	15000
Minimum hata	$1.40E - 07$	$6.30E - 08$	$7.08E - 09$
Maksimum hata	0.009631	0.009950	0.000428
Hesaplama süresi	632.05 s	3274.79 s	23994.86 s

Şekil 3.12 de, u fonksiyonu için yaklaşık ve kesin çözüm $t = 0.7$ alınarak karşılaştırılmalı olarak sunulmuştur.



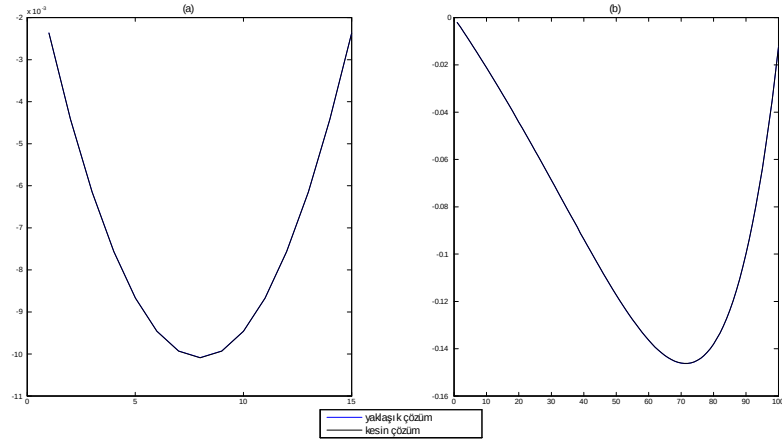
Şekil 3.12 Örnek 3.2 de u için (a) yaklaşık çözüm, (b) kesin çözüm.

Şekil 3.13 de, bu iki çözüm aynı grafik üzerinde gösterilmiştir.



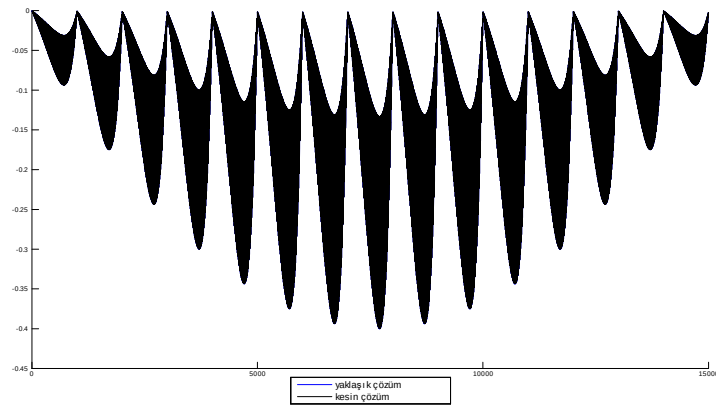
Şekil 3.13 Örnek 3.2 de u için yaklaşık ve kesin çözümlerin birlikte gösterimi.

Şekil 3.14 de, u fonksiyonu için Şekil 3.12 de gösterilen yaklaşık çözüm ve kesin çözümün kesitsel görünümü sunulmuştur.

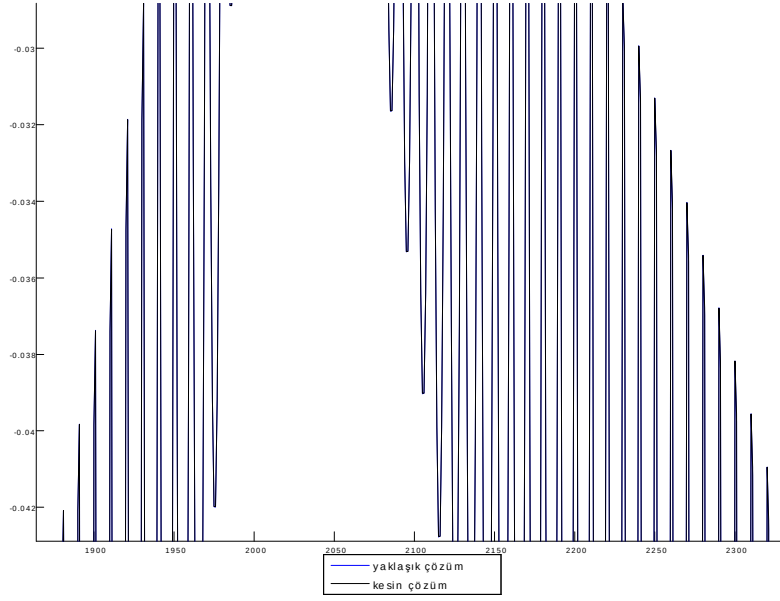


Şekil 3.14 Örnek 3.2 de u fonksiyonu için kesitsel görünüm
(a) v, t sabit; (b) x, t sabit.

Örnek 3.2 de u çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel gösterimi Şekil 3.15 de gösterilmiştir.



Şekil 3.15 Örnek 3.2 de u çözüm vektörünün karşılaştırmalı
grafiksel gösterimi.



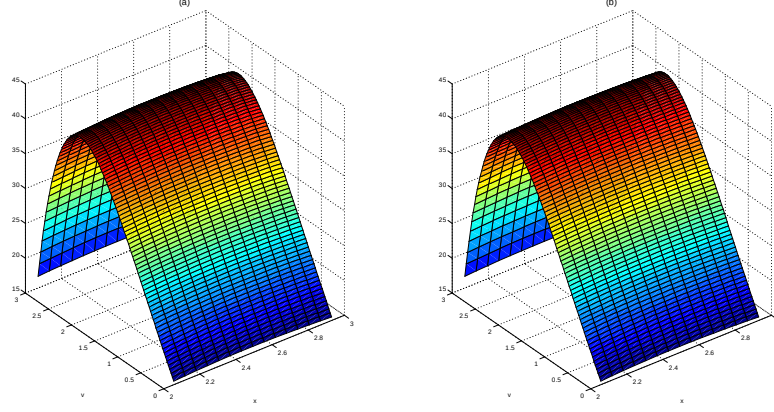
Şekil 3.16 Şekil 3.15'in yakından gösterimi.

Örnek 3.2 için farklı sayıdaki örgü noktalarında λ fonksiyonunun hesaplanan yaklaşık değerlerinde ortaya çıkan maksimum ve minimum hata miktarları ve hesaplama süreleri Çizelge 3.4 de gösterilmiştir. Bu çizelgede verilen maksimum ve minimum hatalar; λ fonksiyonunun bulunduğu örgü noktasındaki kesin değeri ile hesaplanan yaklaşık değeri arasındaki farkın mutlak değeri kullanılarak belirlenmiştir.

Çizelge 3.4 Örnek 3.2'nin $\lambda(x, v, t)$ çözümü için hata miktarları ve hesaplama süreleri.

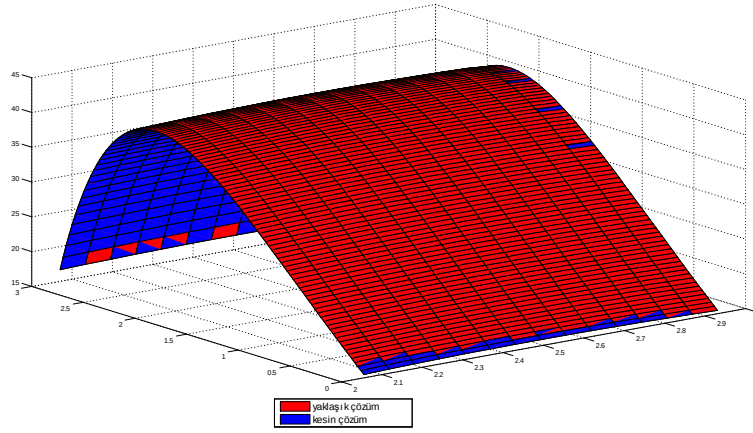
	$I = 25, J = 20,$ $K = 10$	$I = 25, J = 20,$ $K = 20$	$I = 15, J = 100,$ $K = 10$
Örgü nokta sayısı	5000	10000	15000
Minimum hata	$1.20E - 05$	$3.44E - 07$	$1.26E - 05$
Maksimum hata	0.895576	0.853830	0.453991
Hesaplama süresi	632.05 s	3274.79 s	23994.86 s

Örnek 3.2 de $\lambda(x, v, t)$ fonksiyonu için yaklaşık ve kesin çözüm $t = 0.7$ alınarak Şekil 3.17 de karşılaştırmalı olarak gösterilmiştir.



Şekil 3.17 Örnek 3.2 de λ için (a) yaklaşık çözüm, (b) kesin çözüm.

Şekil 3.17 de grafiği gösterilen bu iki çözüm, Şekil 3.18 de aynı grafik üzerinde birleştirilerek sunulmuştur.



Şekil 3.18 Örnek 3.2 de λ için yaklaşık ve kesin çözümlerin aynı grafikte gösterimi.

Örnek 3.3

$$H(x, v, t) = \frac{v^2}{2} - x^2$$

Hamiltonian fonksiyonu ve

$$\begin{aligned}
F = & v^2x^2 + 144vx - 9ve^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} + 72xe^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} - vx^2 + 8v^2x - 16vx^3 - 8v^3x \\
& + 9v^2e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} - 8x^3e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} - 18txe^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} - 144vxe^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} - (108vx)/t \\
& - 2tv^2x + 4tvx^3 + 2tv^3x - 36v^2e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} \sin(\frac{\pi v}{2} + x) \\
& + 36v^3e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} \sin(\frac{\pi v}{2} + x) + (27ve^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)})/t^2 - (54xe^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)})/t \\
& + 2tx^3e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} + vx^2e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} - 8v^2xe^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} + 16vx^3e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} \\
& + 8v^3xe^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} - (6v^2x)/t + (12vx^3)/t + (6v^3x)/t + (3vx^2)/t - 36tvx \\
& - (27v^2e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)})/t^2 + (6x^3e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)})/t - v^2x^2e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} - (3v^2x^2)/t^2 \\
& + (27v^2e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} \sin(\frac{\pi v}{2} + x))/t - (27v^3e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} \sin(\frac{\pi v}{2} + x))/t \\
& + 4v^2x^2e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} \sin(\frac{\pi v}{2} + x) - 4v^3x^2e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} \sin(\frac{\pi v}{2} + x) + (6v^2xe^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)})/t \\
& - (12vx^3e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)})/t - (6v^3xe^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)})/t - (3vx^2e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)})/t^2 + 36tvxe^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} \\
& + (3v^2x^2e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)})/t^2 + 9tv^2e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} \sin(\frac{\pi v}{2} + x) - 9tv^3e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} \sin(\frac{\pi v}{2} + x) \\
& + (108vxe^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)})/t + 2tv^2xe^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} - 4tvx^3e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} - 2tv^3xe^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} \\
& - (3v^2x^2e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} \sin(\frac{\pi v}{2} + x))/t + (3v^3x^2e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} \sin(\frac{\pi v}{2} + x))/t \\
& + 36\pi v^2xe^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} \sin(\frac{\pi v}{2} + x) + 4\pi vx^3e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} \sin(\frac{\pi v}{2} + x) \\
& - 4\pi v^2x^3e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} \sin(\frac{\pi v}{2} + x) - tv^2x^2e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} \sin(\frac{\pi v}{2} + x) \\
& + tv^3x^2e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} \sin(\frac{\pi v}{2} + x) - 36\pi vxe^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} \sin(\frac{\pi v}{2} + x) \\
& - (27\pi v^2xe^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} \sin(\frac{\pi v}{2} + x))/t - (3\pi vx^3e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} \sin(\frac{\pi v}{2} + x))/t \\
& + \pi tv^2x^3e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} \sin(\frac{\pi v}{2} + x) + 9\pi tvxe^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} \sin(\frac{\pi v}{2} + x) \\
& + (3\pi v^2x^3e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} \sin(\frac{\pi v}{2} + x))/t + (27\pi vxe^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} \sin(\frac{\pi v}{2} + x))/t \\
& - 9\pi tv^2xe^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} \sin(\frac{\pi v}{2} + x) - \pi tvx^3e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} \sin(\frac{\pi v}{2} + x)
\end{aligned}$$

olmak üzere $\Omega_T = (-3, 3) \times (0, 1) \times (1, 3)$ bölgesinde (3.5) denklemini (3.6) koşulları altında sağlayan (u, λ) fonksiyonlar çiftinin bulunması problemi.

Problemin kesin çözümünün

$$u(x, v, t) = (t - 3)\left(\frac{1}{t} - 1\right)(e^{\cos(\frac{\pi v}{2}+x)} - 1)(x^2 - 9)(v^2 - v)$$

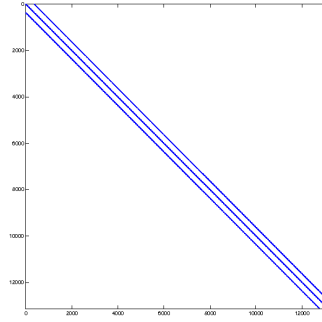
ve

$$\lambda(x, v, t) = (8 - 6/t - 2t)x^3 + (18t + 54/t - 72)x + 9v + (27v^2)/t^2 - (27v)/t^2 - 9v^2$$

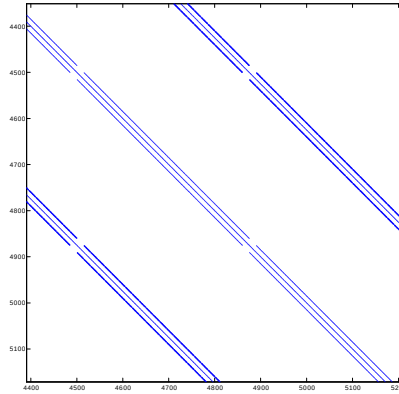
olduğu bilinmektedir.

Burada $I = 35$, $J = 25$, $K = 15$ alınarak en fazla 13125 adet örgü noktasında u ve λ değerleri hesaplanmıştır.

Şekil 3.19 da, $\tilde{A}$ matrisinin yapısı 13125×13125 tipinde üçlü blok bant matris olduğu gösterilmiştir.



Şekil 3.19 Örnek 3.3 için $\tilde{A}$ matrisinin yapısı.



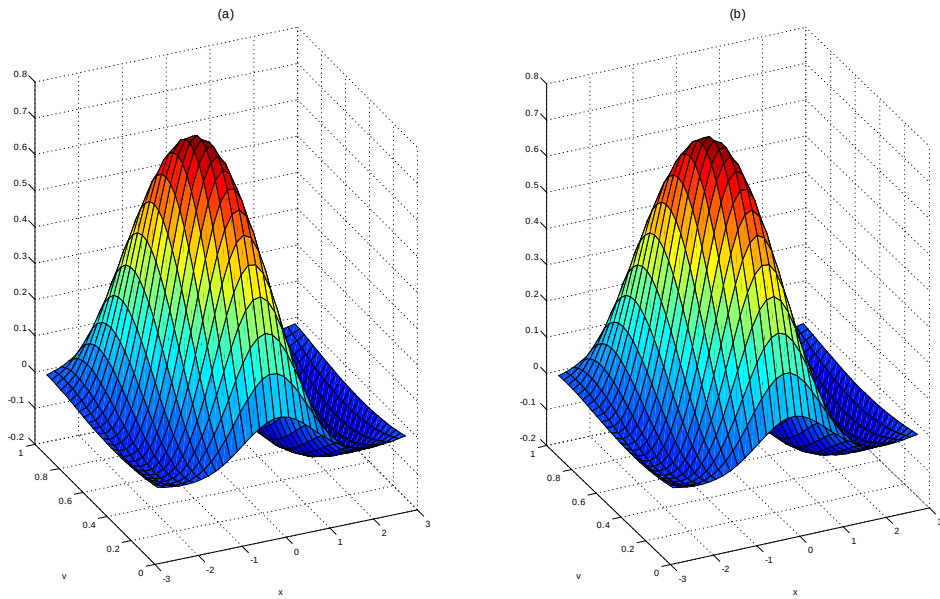
Şekil 3.20 Şekil 3.19'un yakından görüntüsü.

Örnek 3.3 de farklı sayıdaki örgü noktaları için u fonksiyonunun yaklaşık çözümlerinde ortaya çıkan maksimum ve minimum hata miktarları ve hesaplama süreleri Çizelge 3.5 de sunulmuştur. Bu çizelgede verilen maksimum ve minimum hatalar; u fonksiyonunun bir örgü noktasındaki kesin değeri ile hesaplanan yaklaşık değeri arasındaki farkın mutlak değeri kullanılarak hesaplanmıştır.

Çizelge 3.5 Örnek 3.3'ün $u(x, v, t)$ çözümü için hata miktarları ve hesaplama süreleri.

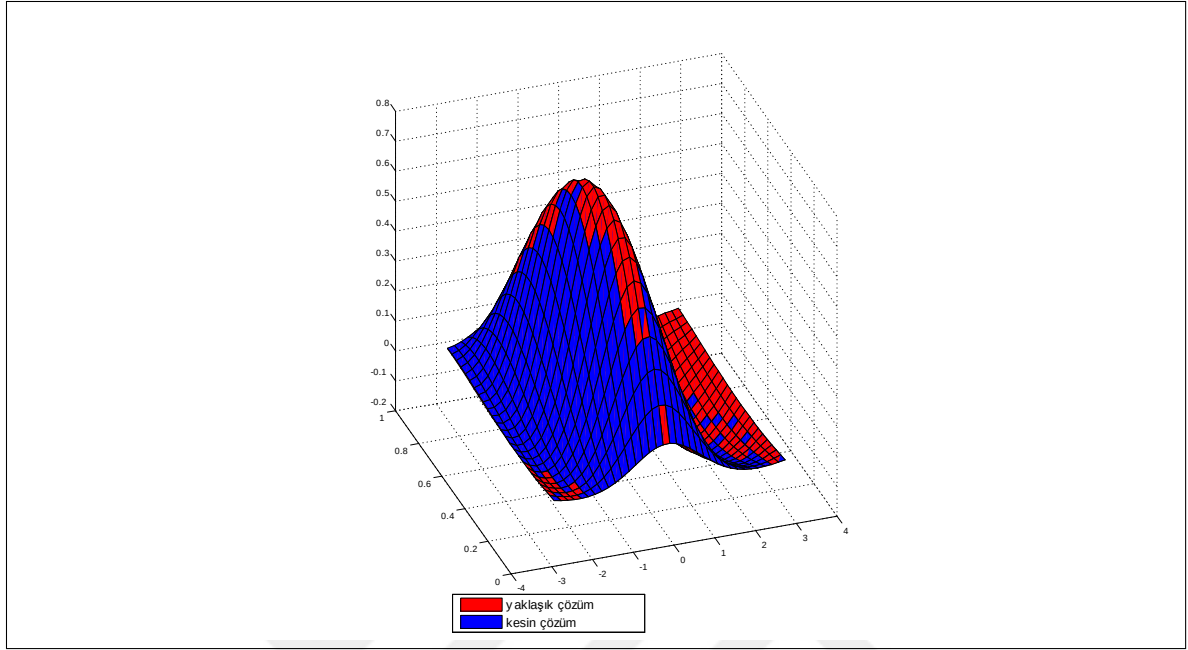
	$I = 25, J = 20,$ $K = 10$	$I = 25, J = 20,$ $K = 20$	$I = 35, J = 25,$ $K = 15$
Örgü noktalarının sayısı	5000	10000	13125
Minimum hata	$9.91E - 07$	$9.00E - 07$	$7.30E - 08$
Maksimum hata	0.009631	0.009950	0.017976
Hesaplama süresi	4279.16 s	19293.08 s	36524.42 s

Şekil 3.21 de, u fonksiyonu için yaklaşık ve kesin çözümün grafikleri $t = 2$ alınarak karşılaştırmalı olarak gösterilmiştir.



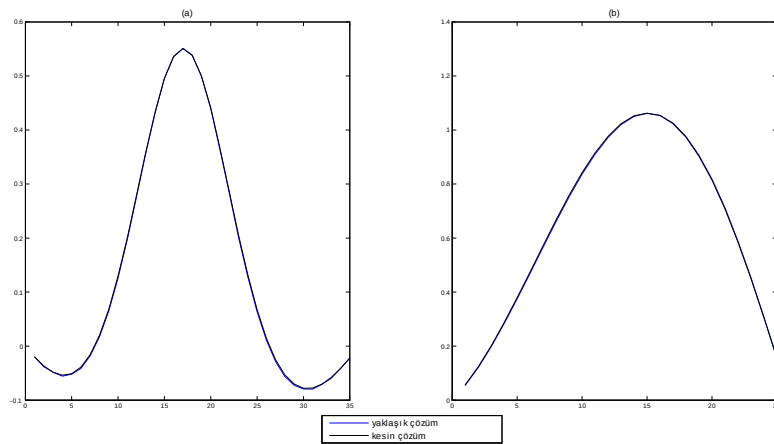
Şekil 3.21 Örnek 3.3 de u için (a) yaklaşık çözüm, (b) kesin çözüm.

Bu iki çözüm, aynı grafik üzerinde birleştirilerek Şekil 3.22 de verilmiştir.



Şekil 3.22 Örnek 3.3 de u için yaklaşık ve kesin çözümlerin birlikte gösterimi.

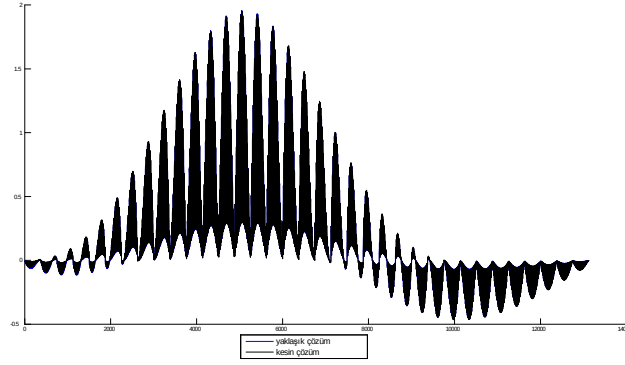
Şekil 3.23 de, u fonksiyonu için Şekil 3.21 de gösterilen yaklaşık ve kesin çözümlerin kesitsel görünümü gösterilmektedir.



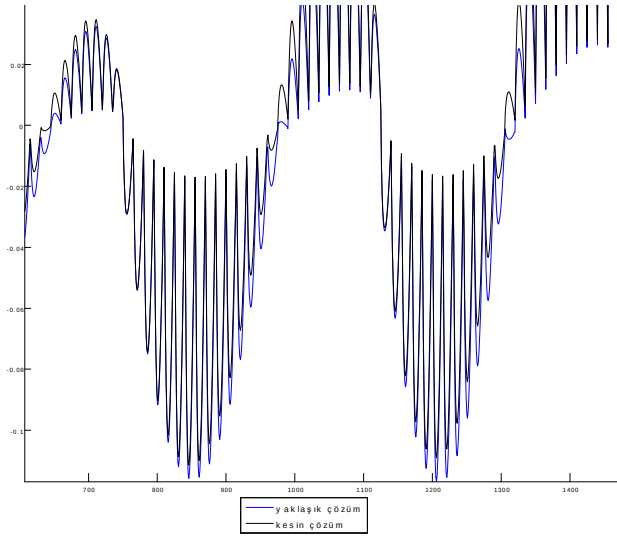
Şekil 3.23 Örnek 3.3 de u fonksiyonu için kesitsel görünüm

(a) v, t sabit; (b) x, t sabit.

Şekil 3.24 de, u çözüm vektörünün tüm bileşenleri karşılaştırmalı olarak verilmiştir.



Şekil 3.24 Örnek 3.3 de u çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel gösterimi.



Şekil 3.25 Şekil 3.24'ün yakından görünümü.

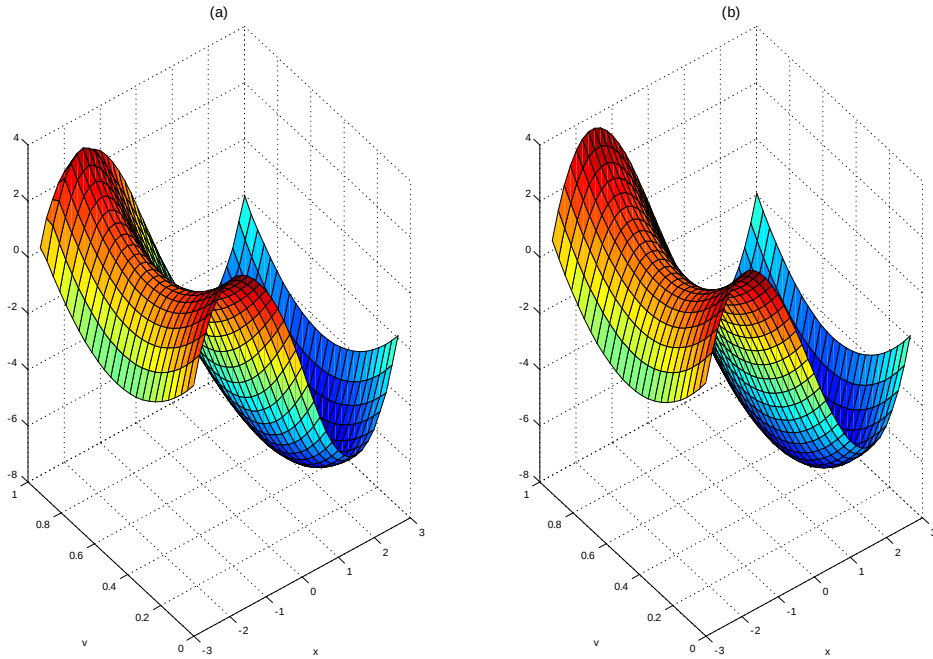
Örnek 3.3 için farklı sayıdaki örgü noktalarında λ fonksiyonunun kesin ve hesaplanan yaklaşık değerlerinde ortaya çıkan maksimum ve minimum hata miktarları ve hesaplama süreleri Çizelge 3.6 da gösterilmiştir.

Çizelge 3.6 da verilen maksimum ve minimum hatalar; λ fonksiyonunun bir örgü noktasındaki kesin değeri ile hesaplanan yaklaşık değeri arasındaki farkın mutlak değeri olarak tanımlanmıştır.

Çizelge 3.6 Örnek 3.3'ün $\lambda(x, v, t)$ çözümü için hata miktarları ve hesaplama süreleri.

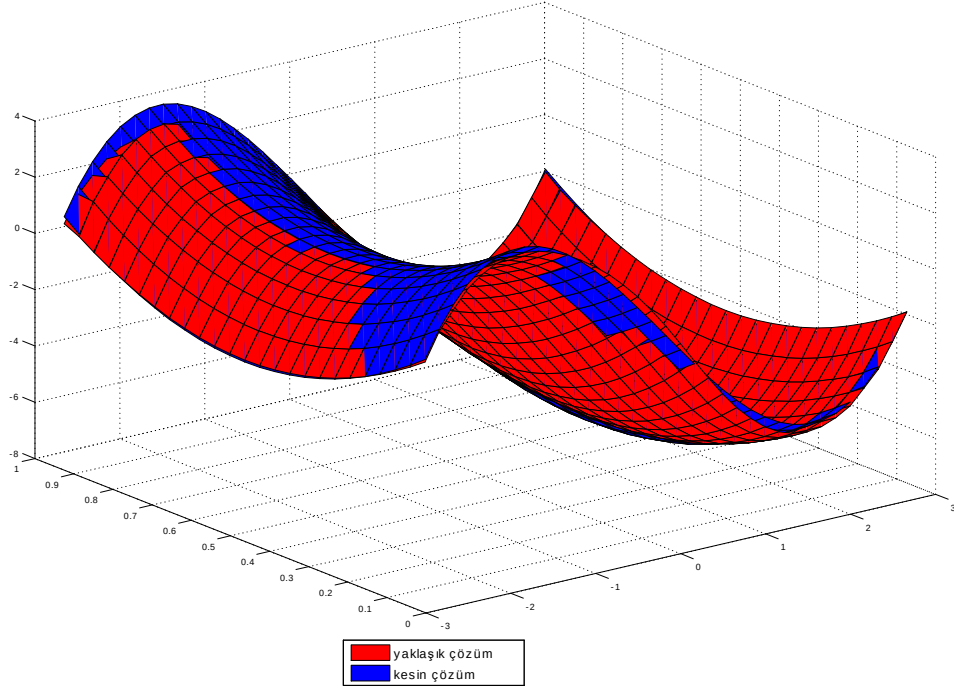
	$I = 25, J = 20,$ $K = 10$	$I = 25, J = 20,$ $K = 20$	$I = 35, J = 25,$ $K = 15$
Örgü noktalarının sayısı	5000	10000	13125
Minimum hata	$9.81E - 05$	$7.30E - 05$	$5.66E - 06$
Maksimum hata	0.009631	0.009950	1.965020
Hesaplama süresi	4279.16 s	19293.08 s	36524.42 s

Şekil 3.26 da, λ fonksiyonu için yaklaşık ve kesin çözümler $t = 2$ alınarak karşılaştırmalı olarak gösterilmiştir.



Şekil 3.26 Örnek 3.3 de λ için (a) yaklaşık çözüm, (b) kesin çözüm.

Şekil 3.26 da gösterilen bu iki çözüm, Şekil 3.27 de aynı grafik üzerinde birleştirilerek verilmiştir.



Şekil 3.27 Örnek 3.3 de λ için yaklaşık ve kesin çözümlerin aynı grafikte gösterimi.

BÖLÜM 4

ZAMANA BAĞLI VE SAÇILIM TERİMİ İÇEREN KİNETİK DENKLEMLER İÇİN BİR TERS PROBLEM

Bu bölümde, zamana bağlı ve saçılım terimi içeren kinetik denklemler için bir ters problemin çözümünün varlığı ve tekliği araştırılmıştır. Daha sonra, problemin yaklaşık çözümünü elde etmek için sonlu fark metodu ve yamuk yöntemi temel alınarak sayısal bir yöntem verilmiştir. Bu yöntemin hassas sonuçlar verdiğini gösteren çeşitli sayısal örnekler sunulmuştur. Bulunan yaklaşık ve kesin çözümler, çizelgeler ve grafikler yardımıyla karşılaştırılmalı olarak gösterilmiştir.

Bu bölümde, $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, $t \in (0, T)$ bölgesinde verilen,

$$\{H, u\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial v_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial v_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right), \quad I_1(u) = \int_G \Phi(x, v, t, v') u(x, v', t) dv'$$

olmak üzere

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \{H, u\} + I_1(u) = \lambda \quad (4.1)$$

kinetik denkleminin $u(x, v, t)$ çözümünün ve $\lambda(x, v, t)$ bilinmeyen sağ tarafının bulunması ters problemi ele alınmıştır.

Burada $\Omega = \{(x, v) : x \in D \subset R^n, v \in G \subset R^n, n \geq 1\}$ ve Ω bölgesinin sınırı $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$, $\Gamma_1 = \partial D \times G$, $\Gamma_2 = D \times \partial G$ ve $\partial D, \partial G \in C^2$ olarak tanımlıdır. Ayrıca $\bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_2$ sırasıyla Γ_1 ve Γ_2 'nin kapanışıdır.

(4.1) kinetik denkleminde, $u(x, v, t)$; faz uzayının birim hacim elemanında bulunan parçacıkların sayısının dağılımını gösterir. Ayrıca $\lambda(x, v, t)$ kaynak fonksiyonu, $H(x, v, t)$ Hamiltonian fonksiyonu, $I_1(u)$ saçılım terimi ve $\Phi(x, v, t, v')$ saçılım çekirdeği olarak adlandırılır.

Problem 4.1 $H(x, v, t)$ Hamiltonian fonksiyonu, $\Phi(x, v, t, v')$ saçılım çekirdeği ve sınırda (4.1) kinetik denkleminin $u(x, v, t)$ çözümünün izi verilsin:

$$u|_{\partial\Omega_T} = u_0. \quad (4.2)$$

(4.1) denklemini ve (4.2) koşulunu sağlayan $(u(x, v, t), \lambda(x, v, t))$ çözüm çiftinin bulunması problemini ele alalım.

4.1 PROBLEM 4.1'İN ÇÖZÜMÜNÜN TEKLİĞİNİN ARAŞTIRILMASI

Bu bölümde, Problem 4.1'in çözümünün varlığı ve tekliği Amirov (2001) de verilen yöntem kullanılarak ispatlanacaktır.

Teorem 4.1 Kabul edelim ki Hamiltonian fonksiyonu $H(x, v, t) \in C^2(\overline{\Omega}_T)$ ve saçılım çekirdeği $\Phi(x, v, t, v') \in C^1(\overline{D} \times \overline{G} \times [0, T] \times \overline{G})$ verilsin. α_1, α_2 pozitif tam sayılar olmak üzere, her $(x, v, t) \in \overline{\Omega}_T$ ve $\xi \in R^n$ için

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial v_i \partial v_j} \xi^i \xi^j \geq \alpha_1 |\xi|^2, \quad \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \xi^i \xi^j \leq -\alpha_2 |\xi|^2, \quad (4.3)$$

$$\alpha_1 - 1 > 0, \quad \alpha_2 - \alpha_3 > 0, \quad \alpha_3 = C \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \max_{x,t \in D} \int_G \int_G \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v_j} \right)^2 dv' dv \right\}$$

şartları sağlansın. Burada C , Steklov eşitsizliğinden gelen bir sabittir. Ayrıca (4.1) de, $\lambda(x, v, t)$ fonksiyonu

$$\widehat{L}\lambda = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \lambda}{\partial v_j \partial x_j} = 0 \quad (4.4)$$

diferensiyel denklemini sağlasın. Bu durumda Problem 4.1, $u \in C^2(\overline{\Omega}_T)$ ve $\lambda \in C^2(\Omega_T)$ olacak şekilde en çok bir (u, λ) çözümüne sahiptir.

İspat. Kabul edelim ki Ω_T bölgesinin sınırında $u = 0$ ($u|_{\partial\Omega_T} = 0$) olsun. Ayrıca $u \in C^2(\overline{\Omega}_T)$, $\lambda \in C^2(\Omega_T)$ olmak üzere (u, λ) , Problem 4.1'in bir çözümü olsun. (4.4) koşulundan

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u \frac{\partial \lambda}{\partial v_j} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda}{\partial v_j} + \sum_{j=1}^n u \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial v_j \partial x_j} \right)$$

eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terim sıfır olacağından,

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda}{\partial v_j} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u \frac{\partial \lambda}{\partial v_j} \right) \quad (4.5)$$

yazılır.

Diğer yandan

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial v_j} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \{H, u\} + I_1(u) \right) \right] \\
&= 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial v_j} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial v_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial v_i} \right) + \int_G \Phi(x, v, t, v') u(x, v', t) dv \right) \right]
\end{aligned}$$

eşitliğinde parantezler açılırsa

$$\begin{aligned}
&= 2 \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial v_j} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial v_j} \left(\frac{\partial H}{\partial v_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial v_i} \right) \right] \\
&\quad + 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial v_j} \left(\int_G \Phi(x, v, t, v') u(x, v', t) dv \right) \\
&= 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial v_j} \frac{\partial u}{\partial t} + 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial v_i \partial v_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial v_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial v_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial v_j} \frac{\partial u}{\partial v_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial v_i \partial v_j} \right) \\
&\quad + 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial v_j} \left(\int_G \Phi(x, v, t, v') u(x, v', t) dv \right) \\
&= 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial v_j} \frac{\partial u}{\partial t} + 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial v_i \partial v_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} + 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial H}{\partial v_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial v_j} \\
&\quad - 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial v_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial v_i} - 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial v_i \partial v_j} \\
&\quad + 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial v_j} \left(\int_G \Phi(x, v, t, v') u(x, v', t) dv \right) \tag{4.6}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan son eşitlikte birinci, üçüncü ve beşinci terimlere $\mu(x, y, z)$ bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned}
2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
&\quad - \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \tag{4.7}
\end{aligned}$$

özdeşliği uygulandığında birinci terimden

$$2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial v_j} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial v_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial v_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial v_j} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right), \tag{4.8}$$

üçüncü terimden

$$\begin{aligned}
2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial H}{\partial v_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial v_j} &= - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial H}{\partial v_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial v_j} \right) + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial H}{\partial v_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial v_j} \right) \\
&+ \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial v_j} \left(\frac{\partial H}{\partial v_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial v_i \partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial v_j} \\
&- \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial v_i \partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial v_j} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial v_i \partial v_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j},
\end{aligned} \tag{4.9}$$

ve beşinci terimden

$$\begin{aligned}
-2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial v_i \partial v_j} &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial v_i} \frac{\partial u}{\partial v_j} \right) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial v_j} \right) \\
&- \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial v_j} \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial v_i} \right) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u}{\partial v_i} \frac{\partial u}{\partial v_j} \\
&+ \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial v_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial v_j} + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial v_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial v_i}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

elde edilir. (4.8)-(4.10) bağıntıları

$$\begin{aligned}
&2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial v_j} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \{H, u\} + I_1(u) \right) \right] \\
&= 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial v_j} \frac{\partial u}{\partial t} + 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial v_i \partial v_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} + 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial H}{\partial v_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial v_j} \\
&- 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial v_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial v_i} - 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial v_i \partial v_j} \\
&+ 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial v_j} \left(\int_G \Phi(x, v, t, v') u(x, v', t) dv \right)
\end{aligned}$$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial v_j} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \{H, u\} + I_1(u) \right) \right] \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial v_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial v_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial v_j} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right) \\
&+ 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial v_i \partial v_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial H}{\partial v_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial v_j} \right) + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial H}{\partial v_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial v_j} \right) \\
&+ \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial v_j} \left(\frac{\partial H}{\partial v_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial v_i \partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial v_j} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial v_i \partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial v_j} \\
&- \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial v_i \partial v_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial v_i} \frac{\partial u}{\partial v_j} \right) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial v_j} \right) \\
&- \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial v_j} \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial v_i} \right) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u}{\partial v_i} \frac{\partial u}{\partial v_j} + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial v_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial v_j} \\
&+ \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial v_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial v_i} + 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial v_j} \left(\int_G \Phi(x, v, t, v') u(x, v', t) dv \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 H}{\partial v_i \partial v_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u}{\partial v_i} \frac{\partial u}{\partial v_j} \right) \\
&+ \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial v_j} \left[\frac{\partial u}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial v_i} - \frac{\partial u}{\partial v_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) \right] \\
&- \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u}{\partial v_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial v_i} - \frac{\partial u}{\partial v_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) \right] \\
&+ \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial H}{\partial v_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial v_j} \right) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial v_j} \right) \\
&+ \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial v_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial v_j} \right) + \frac{\partial}{\partial v_j} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \right] \\
&+ 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial v_j} \left(\int_G \Phi(x, v, t, v') u(x, v', t) dv' \right) = 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u \frac{\partial \lambda}{\partial v_j} \right) \tag{4.11}
\end{aligned}$$

bulunur.

Ω_T bölgesinin geometrisi ve $\partial\Omega_T$ sınırında $u = 0$ koşulu dikkate alınır (4.5) ve (4.11) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_T} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial v_i \partial v_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u}{\partial v_i} \frac{\partial u}{\partial v_j} \right) d\Omega_T \\
& + 2 \sum_{j=1}^n \int_{\Omega_T} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \int_G \frac{\partial}{\partial v_j} \Phi(x, v, t, v') u(x, v', t) dv' \right) d\Omega_T \\
& = 2 \sum_{j=1}^n \int_{\Omega_T} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u \frac{\partial \lambda}{\partial v_j} \right) d\Omega_T = 0
\end{aligned} \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.12)'de $2ab \geq -(a^2 + b^2)$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& 2 \int_{\Omega_T} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \int_G \frac{\partial \Phi}{\partial v_j} u dv' \right) d\Omega_T \\
& \geq - \int_{\Omega_T} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 + \left(\int_G \frac{\partial \Phi}{\partial v_j} u dv' \right)^2 \right) d\Omega_T
\end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitsizliğin sağ tarafında Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
& 2 \int_{\Omega_T} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \int_G \frac{\partial \Phi}{\partial v_j} u dv' \right) d\Omega_T \\
& \geq - \int_{\Omega_T} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 d\Omega_T - \int_D \int_G \int_0^T \left(\int_G \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v_j} \right)^2 dv' \right) \left(\int_G (u)^2 dv' \right) dv dx dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Fubini teoreminden

$$\begin{aligned}
& 2 \int_{\Omega_T} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \int_G \frac{\partial \Phi}{\partial v_j} u dv' \right) d\Omega_T \\
& \geq - \int_{\Omega_T} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 d\Omega_T - \int_D \int_0^T \left(\int_G (u(x, v', t))^2 dv' \right) \beta_j(x, t) dx dt
\end{aligned} \tag{4.13}$$

yazılır. Burada

$$\beta_j(x, t) = \int_G \int_G \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v_j} \right)^2 dv' dv$$

olarak tanımlıdır. Steklov eşitsizliği göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
& - \int_D \int_0^T \left(\int_G (u)^2 dv' \right) \beta_j(x, t) dx dt \\
& \geq -C \left(\max_{x, t \in D} \beta_j(x, t) \right) \int_{\Omega_T} \left(\frac{\partial u}{\partial v_j} \right)^2 d\Omega_T
\end{aligned}$$

olduğu görülür. $\alpha_3 = C \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \max_{x,t \in D} \beta_j(x,t) \right\}$ olmak üzere

$$2 \int_{\Omega_T} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \int_G \frac{\partial \Phi}{\partial v_j} u dv' \right) d\Omega_T \geq - \int_{\Omega_T} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 d\Omega_T - \alpha_3 \int_{\Omega_T} \left(\frac{\partial u}{\partial v_j} \right)^2 d\Omega_T \quad (4.14)$$

elde edilir. (4.12) denklemi (4.3) koşulu ve (4.14) değerlendirmesi birlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_T} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial v_i \partial v_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u}{\partial v_i} \frac{\partial u}{\partial v_j} \right) d\Omega_T \\ & + 2 \sum_{j=1}^n \int_{\Omega_T} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \int_G \frac{\partial}{\partial v_j} \Phi(x, v, t, v') u(x, v', t) dv' \right) d\Omega_T \\ & \geq \alpha_1 \int_{\Omega_T} |\nabla_v u|^2 d\Omega_T + \alpha_2 \int_{\Omega_T} |\nabla_x u|^2 d\Omega_T - \int_{\Omega_T} |\nabla_x u|^2 d\Omega_T - \alpha_3 \int_{\Omega_T} |\nabla_v u|^2 d\Omega_T \end{aligned}$$

bulunur ve gerekli düzenlemeler ile

$$(\alpha_1 - 1) \int_{\Omega_T} |\nabla_x u|^2 d\Omega_T + (\alpha_2 - \alpha_3) \int_{\Omega_T} |\nabla_v u|^2 d\Omega_T \leq 0 \quad (4.15)$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.3) koşulundan dolayı $|\nabla_x u|^2 = |\nabla_v u|^2 = 0$ dir. $u|_{\partial\Omega_T} = 0$ olduğundan Ω_T bölgesinde $u = 0$ dir. Denklem (4.1)'den Ω_T bölgesinde $\lambda = 0$ olur ve teoremin ispatı tamamlanmış olur. ■

4.2 PROBLEM 4.1'İN ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞININ ARAŞTIRILMASI

Problem 4.1'in çözümünün varlığı Galerkin yöntemi kullanılarak araştırılacağından homojen sınır koşuluna sahip aşağıdaki problemi göz önünde bulunduralım:

Problem 4.2 $F \in H_2(\Omega_T)$ bilinen fonksiyon, $H \in C^2(\Omega_T)$ Hamiltonian fonksiyonu ve $\Phi \in C^1(D \times G \times G)$ verilen saçılım çekirdeği olmak üzere

$$Lu = \lambda(x, v, t) + F \quad (4.16)$$

denkleminde

$$u|_{\partial\Omega_T} = 0, \quad \hat{L}\lambda = 0 \quad (4.17)$$

koşulları altında (u, λ) çözümünün bulunması problemi.

Teorem 4.2 *Teorem 4.1'in kabulleri altında Problem 4.2'nin $(u, \lambda) \in H_1(\Omega_T) \times L_2(\Omega_T)$ olacak şekilde bir çözümü vardır.*

İspat. Ω_T bölgesinde,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial v_i} (Lu - F) = 0, \quad (4.18)$$

$$u|_{\partial\Omega_T} = 0 \quad (4.19)$$

bağıntılarından u nun bulunması yardımcı problemini ele alalım. $w_i \in C^3(\Omega_T)$ olmak üzere $\{w_i(x, v, t)\}_{i=1}^\infty$ sistemi $\overset{\circ}{H}_{2,1}(\Omega_T) = H_{2,1}(\Omega_T) \cap \overset{\circ}{H}_1(\Omega_T)$ uzayının bir bazı olsun. (4.18)-(4.19) probleminin bir yaklaşık çözümü

$$u_N = \sum_{j=1}^n \alpha_{N_j} w_j; \quad (\alpha_{N_1}, \dots, \alpha_{N_N}) \in \mathbb{R}^n$$

formunda aranacaktır. Burada bilinmeyen α_N vektörü

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial v_i} (Lu_N), w_j \right\rangle = \langle \mathcal{F}, w_j \rangle, \quad 1 \leq j \leq N, \quad (4.20)$$

$$\mathcal{F} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial v_i}$$

sisteminden belirlenecektir. Daha açık olarak (4.20), α_N bilinmeyen vektörü için bir lineer denklem sistemidir. (4.20) lineer denklem sisteminin homojen halinin sadece aşıkâr çözümü olduğundan her $\mathcal{F} \in L_2(\Omega_T)$ için (4.20) sisteminin bir tek u_N çözümü vardır. Bu çözüm için bir ön değerlendirme elde etmek için (4.20) denklem sisteminin j -nci denklemini $-2\alpha_{N_j}$ ile çarpılıp j ye göre 1 den N ye kadar toplanırsa $\partial\Omega_T$ sınırı üzerinde $u_N = 0$ koşulu göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned} -2 \langle \mathcal{F}, u_N \rangle &= -2 \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial v_i} (Lu_N), u_N \right\rangle \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} (Lu_N), (u_N)_{v_i} \right\rangle \\ &\geq \int_{\Omega_T} ((\alpha_1 - \alpha_3) |\nabla_x u_N|^2 + (\alpha_2 - 1) |\nabla_v u_N|^2) d\Omega_T \end{aligned}$$

yazılabilir. O halde C sabiti N den bağımsız olmak üzere

$$\int_{\Omega_T} |\nabla_{x,v} u_N|^2 d\Omega_T \leq C$$

bulunur. u_N yaklaşık çözümü için elde edilen bu ön değerlendirme kullanılarak Problem 4.2'nin çözümünün varlığı Amirov (2001)'deki Teorem (1.1.2)'nin ispatına benzer şekilde gösterilebilir. ■

4.3 PROBLEM 4.1'İN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bu kısımda, sonlu fark metoduna ek olarak saçılım terimini de diskritize edebilmek (ayrıştırılabilmek) amacıyla yamuk yöntemi kullanılacaktır.

Yamuk yöntemi,

$$\int_a^b f(x)dx$$

integraline yaklaşım için kullanılan temel bir sayısal çözüm metodudur. Bu yöntemde

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2} (f(x_0) + f(x_n)) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\Delta x \quad (4.21)$$

yaklaşım formülü kullanılır.

Sonlu fark formülleri ve (4.21)'de verilen yamuk yöntemi kullanılarak aşağıdaki problemin sayısal çözümü gerçekleştirilecektir.

Problem 4.3 $\Omega_T = \{ (x, v, t) \mid x \in (a, b) \subset \mathbb{R}, v \in (c, d) \subset \mathbb{R}, t \in (e, f) \subset \mathbb{R} \}$ bölgesinde

$$\begin{aligned} &u_t(x, v, t) + H_v(x, v, t)u_x(x, v, t) - H_x(x, v, t)u_v(x, v, t) \\ &+ \int_c^d \Phi(x, v, t, v')u(x, v', t)dv' = \lambda(x, v, t) \end{aligned} \quad (4.22)$$

denkleminde

$$\begin{aligned} u(x, v, t)|_{\partial\Omega_T} &= u_0(x, v, t), \\ \widehat{L}\lambda &= \frac{\partial^2 \lambda}{\partial v \partial x} = 0 \end{aligned}$$

şartları altında $u(x, v, t)$ ve $\lambda(x, v, t)$ fonksiyonlarının bulunması problemini ele alalım.

(4.22) denkleminin her iki tarafına $\widehat{L} = \frac{\partial^2}{\partial v \partial x}$ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} &u_{txv} + u_{xvx}H_v - u_{vvx}H_x + u_{xx}H_{vv} - u_{vv}H_{xx} + u_{xv}H_{vx} - u_{vx}H_{xv} + u_xH_{vvx} \\ &- u_vH_{xvx} + \int_c^d \Phi_x u_v dv' + \int_c^d \Phi u_{xv} dv' + \int_c^d \Phi_{xv} u dv' + \int_c^d \Phi_v u_x dv' = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $u_{xv}H_{vx} = u_{vx}H_{xv}$ eşitliğinden ve integralli terimin içerdiği $u(x, v', t)$ fonksiyonu v değişkeninden bağımsız olduğu için

$$u_{txv} + u_{xvx}H_v - u_{vvx}H_x + u_{xx}H_{vv} - u_{vv}H_{xx} + u_xH_{vvx} - u_vH_{xvx} \quad (4.23)$$

$$+ \int_c^d \Phi_{xv} u dv' + \int_c^d \Phi_v u_x dv' = 0 \quad (4.24)$$

yazılır. Böylece ele alınan problem, üçüncü mertebeden kısmi diferensiyel denklem için bir Dirichlet problemine indirgenmiş olur. Diğer taraftan $u|_{\partial\Omega_T} = u_0$ sınır koşulu için

$$\tilde{u}_{0,j}^k = u(a, v_j, t_k), \tilde{u}_{I+1,j}^k = u(b, v_j, t_k), \quad j = 0, 1, \dots, J+1, \quad k = 0, 1, \dots, K+1,$$

$$\tilde{u}_{i,0}^k = u(x_i, c, t_k), \tilde{u}_{i,J+1}^k = u(x_i, d, t_k), \quad i = 0, 1, \dots, I+1, \quad k = 0, 1, \dots, K+1,$$

$$\tilde{u}_{i,j}^0 = u(x_i, v_j, e), \tilde{u}_{i,j}^{K+1} = u(x_i, v_j, f), \quad i = 0, 1, \dots, I+1, \quad j = 0, 1, \dots, J+1$$

yazılır.

$I, J, K \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\Delta x = \frac{(b-a)}{(I+1)}$, $\Delta v = \frac{(d-c)}{(J+1)}$ ve $\Delta t = \frac{(f-e)}{(K+1)}$ sırasıyla x , v ve t bağımsız değişkenlerine göre adım büyüklüklerini göstermektedir. Burada (a, b) , (c, d) (e, f) aralıkları sırasıyla $(I+1)$, $(J+1)$, $(K+1)$ adet eşit alt aralığa bölünmüştür. Bu aralıkların kesim noktaları olan örgü noktalarında $u(x, v, t)$ fonksiyonunun değerleri bulunmaktadır. Burada $u(x_i, v_j, t_k) = u(a + i\Delta x, c + j\Delta v, e + k\Delta t)$,

$$H(x_i, v_j, t_k) = H(a + i\Delta x, c + j\Delta v, e + k\Delta t),$$

$\Phi(x_i, v_j, t_k, v'_j) = \Phi(a + i\Delta x, c + j\Delta v, e + k\Delta t, c + j\Delta v)$ fonksiyonları için sonlu fark yaklaşımları sırasıyla $\tilde{u}_{i,j}^k$, $h_{i,j}^k$, $\varphi_{i,j}^k$ ile gösterilmiştir.

Eğer (4.21) formülü (4.24) denklemindeki integralli terimlere uygulanırsa

$$\begin{aligned} \int_c^d \Phi_{xv} u dv' &\approx \frac{\Delta v}{2} (\Phi_{xv}(x, c, t, v)u(x, c, t) + \Phi_{xv}(x, d, t, v)u(x, d, t)) \\ &+ \sum_{j=1}^J (\Delta v) \Phi_{xv}(x, v, t, v_j)u(x, v_j, t) \\ &= k_{10} + \sum_{j=1}^J (\Delta v) \Phi_{xv}(x, v, t, v_j)u(x, v_j, t), \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned}
\int_c^d \Phi_v u_x dv' &\approx \frac{\Delta v}{2} (\Phi_v(x, v, t, c) u_x(x, c, t) + \Phi_v(x, v, t, d) u_x(x, d, t)) \\
&+ \sum_{j=1}^J (\Delta v) \Phi_v(x, v, t, v_j) u_x(x, v_j, t) \\
&= k_{11} + \sum_{j=1}^J (\Delta v) \Phi_v(x, v, t, v_j) u_x(x, v_j, t)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

elde edilir. Burada sınır değerleri bilindiğinden

$$\begin{aligned}
k_{10} &= \frac{\Delta v}{2} (\Phi_{xv}(x, v, t, c) u(x, c, t) + \Phi_{xv}(x, v, t, d) u(x, d, t)), \\
k_{11} &= \frac{\Delta v}{2} (\Phi_v(x, v, t, c) u_x(x, c, t) + \Phi_v(x, v, t, d) u_x(x, d, t))
\end{aligned}$$

bilinen terimlerdir. Üçüncü bölümde elde edilen sonlu fark formülleri ve (4.25)-(4.26) yaklaşımları (4.24) denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
&\frac{(\tilde{u}_{i+1,j+1}^{k+1} - \tilde{u}_{i+1,j+1}^{k-1} - \tilde{u}_{i+1,j-1}^{k+1} + \tilde{u}_{i+1,j-1}^{k-1} - \tilde{u}_{i-1,j+1}^{k+1} + \tilde{u}_{i-1,j+1}^{k-1} + \tilde{u}_{i-1,j-1}^{k+1} - \tilde{u}_{i-1,j-1}^{k-1})}{8\Delta x \Delta v \Delta t} \\
&+ \frac{(2\tilde{u}_{i,j-1}^k - 2\tilde{u}_{i,j+1}^k + \tilde{u}_{i+1,j+1}^k + \tilde{u}_{i-1,j+1}^k - \tilde{u}_{i+1,j-1}^k - \tilde{u}_{i-1,j-1}^k)}{2(\Delta x)^2(\Delta v)} \frac{(h_{i,j+1}^k - h_{i,j-1}^k)}{2(\Delta v)} \\
&- \frac{(2\tilde{u}_{i-1,j}^k - 2\tilde{u}_{i+1,j}^k + \tilde{u}_{i+1,j+1}^k - \tilde{u}_{i-1,j+1}^k + \tilde{u}_{i+1,j-1}^k - \tilde{u}_{i-1,j-1}^k)}{2(\Delta x)(\Delta v)^2} \frac{(h_{i+1,j}^k - h_{i-1,j}^k)}{2(\Delta x)} \\
&+ \frac{(\tilde{u}_{i+1,j}^k - 2\tilde{u}_{i,j}^k + \tilde{u}_{i-1,j}^k)}{(\Delta x)^2} \frac{(h_{i,j+1}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i,j-1}^k)}{(\Delta v)^2} \\
&- \frac{(\tilde{u}_{i,j+1}^k - 2\tilde{u}_{i,j}^k + \tilde{u}_{i,j-1}^k)}{(\Delta v)^2} \frac{(h_{i+1,j}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i-1,j}^k)}{(\Delta x)^2} \\
&+ \frac{(\tilde{u}_{i+1,j}^k - \tilde{u}_{i-1,j}^k)}{2\Delta x} \frac{(h_{i+1,j+1}^k - 2h_{i+1,j}^k + h_{i+1,j-1}^k - h_{i-1,j+1}^k + 2h_{i-1,j}^k - h_{i-1,j-1}^k)}{2(\Delta x)(\Delta v)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(\tilde{u}_{i,j+1}^k - \tilde{u}_{i,j-1}^k)}{2\Delta v} \frac{(h_{i+1,j+1}^k - 2h_{i,j+1}^k + h_{i-1,j+1}^k - h_{i+1,j-1}^k + 2h_{i,j-1}^k - h_{i-1,j-1}^k)}{2(\Delta x)^2(\Delta v)} \\
& + k_{10} + k_{11} + \sum_{j=1}^J (\Delta v) \frac{(\varphi_{i+1,j+1}^k - \varphi_{i+1,j-1}^k - \varphi_{i-1,j+1}^k + \varphi_{i-1,j-1}^k)}{4(\Delta x)(\Delta v)} u_{i,j}^k \\
& + \sum_{j=1}^J (\Delta v) \frac{(\varphi_{i,j+1}^k - \varphi_{i,j-1}^k)}{2(\Delta v)} \frac{(\tilde{u}_{i+1,j}^k - \tilde{u}_{i-1,j}^k)}{2(\Delta x)} = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlik düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8\Delta x \Delta v \Delta t} (\tilde{u}_{i+1,j+1}^{k+1} - \tilde{u}_{i+1,j+1}^{k-1} - \tilde{u}_{i+1,j-1}^{k+1} + \tilde{u}_{i+1,j-1}^{k-1} - \tilde{u}_{i-1,j+1}^{k+1} + \tilde{u}_{i-1,j+1}^{k-1} \\
& + \tilde{u}_{i-1,j-1}^{k+1} - \tilde{u}_{i-1,j-1}^{k-1}) \\
& + \frac{(h_{i,j+1}^k - h_{i,j-1}^k)}{4(\Delta x)^2(\Delta v)^2} (2\tilde{u}_{i,j-1}^k - 2\tilde{u}_{i,j+1}^k + \tilde{u}_{i+1,j+1}^k + \tilde{u}_{i-1,j+1}^k - \tilde{u}_{i+1,j-1}^k - \tilde{u}_{i-1,j-1}^k) \\
& - \frac{(h_{i+1,j}^k - h_{i-1,j}^k)}{4(\Delta x)^2(\Delta v)^2} (2\tilde{u}_{i-1,j}^k - 2\tilde{u}_{i+1,j}^k + \tilde{u}_{i+1,j+1}^k - \tilde{u}_{i-1,j+1}^k + \tilde{u}_{i+1,j-1}^k - \tilde{u}_{i-1,j-1}^k) \\
& + \frac{(h_{i,j+1}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i,j-1}^k)}{(\Delta x)^2(\Delta v)^2} (\tilde{u}_{i+1,j}^k - 2\tilde{u}_{i,j}^k + \tilde{u}_{i-1,j}^k) \\
& - \frac{(h_{i+1,j}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i-1,j}^k)}{(\Delta x)^2(\Delta v)^2} (\tilde{u}_{i,j+1}^k - 2\tilde{u}_{i,j}^k + \tilde{u}_{i,j-1}^k) \\
& + \frac{(h_{i+1,j+1}^k - 2h_{i+1,j}^k + h_{i+1,j-1}^k - h_{i-1,j+1}^k + 2h_{i-1,j}^k - h_{i-1,j-1}^k)}{4(\Delta x)^2(\Delta v)^2} (\tilde{u}_{i+1,j}^k - \tilde{u}_{i-1,j}^k) \\
& - \frac{(h_{i+1,j+1}^k - 2h_{i,j+1}^k + h_{i-1,j+1}^k - h_{i+1,j-1}^k + 2h_{i,j-1}^k - h_{i-1,j-1}^k)}{4(\Delta x)^2(\Delta v)^2} (\tilde{u}_{i,j+1}^k - \tilde{u}_{i,j-1}^k) \\
& + k_{10} + k_{11} + \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{i+1,j+1}^k - \varphi_{i+1,j-1}^k - \varphi_{i-1,j+1}^k + \varphi_{i-1,j-1}^k}{4(\Delta x)} u_{i,j}^k \\
& + \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{i,j+1}^k - \varphi_{i,j-1}^k}{4(\Delta x)} (\tilde{u}_{i+1,j}^k - \tilde{u}_{i-1,j}^k) = 0
\end{aligned}$$

bulunur.

Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
& (-k_2 + k_1) \tilde{u}_{i-1,j-1}^k + (2k_2 - k_3 + k_5) \tilde{u}_{i,j-1}^k + (-k_1 - k_2) \tilde{u}_{i+1,j-1}^k \\
& + (-2k_1 + k_4 - k_6) \tilde{u}_{i-1,j}^k + (-2k_4 + 2k_3) \tilde{u}_{i,j}^k + (2k_1 + k_4 + k_6) \tilde{u}_{i+1,j}^k \\
& + (k_1 + k_2) \tilde{u}_{i-1,j+1}^k + (-2k_2 - k_3 - k_5) \tilde{u}_{i,j+1}^k + (k_2 - k_1) \tilde{u}_{i+1,j+1}^k \\
& + (k_7)(\tilde{u}_{i+1,j+1}^{k+1} - \tilde{u}_{i-1,j+1}^{k+1} - \tilde{u}_{i+1,j-1}^{k+1} + \tilde{u}_{i-1,j-1}^{k+1} - \tilde{u}_{i+1,j+1}^{k-1} + \tilde{u}_{i-1,j+1}^{k-1} \\
& + \tilde{u}_{i+1,j-1}^{k-1} - \tilde{u}_{i-1,j-1}^{k-1}) + k_{10} + k_{11} + \sum_{j=1}^J k_8 (\tilde{u}_{i,j}^k) + \sum_{j=1}^J k_9 (\tilde{u}_{i+1,j}^k - \tilde{u}_{i-1,j}^k) = 0, \\
& i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, K;
\end{aligned} \tag{4.27}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{(h_{i+1,j}^k - h_{i-1,j}^k)}{4(\Delta x)^2(\Delta v)^2}, k_2 = \frac{(h_{i,j+1}^k - h_{i,j-1}^k)}{4(\Delta x)^2(\Delta v)^2}, \\
k_3 &= \frac{(h_{i+1,j}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i-1,j}^k)}{(\Delta x)^2(\Delta v)^2}, k_4 = \frac{(h_{i,j+1}^k - 2h_{i,j}^k + h_{i,j-1}^k)}{(\Delta x)^2(\Delta v)^2}, \\
k_5 &= \frac{(h_{i+1,j+1}^k - 2h_{i,j+1}^k + h_{i-1,j+1}^k - h_{i+1,j-1}^k + 2h_{i,j-1}^k - h_{i-1,j-1}^k)}{4(\Delta x)^2(\Delta v)^2}, \\
k_6 &= \frac{(h_{i+1,j+1}^k - 2h_{i+1,j}^k + h_{i+1,j-1}^k - h_{i-1,j+1}^k + 2h_{i-1,j}^k - h_{i-1,j-1}^k)}{4(\Delta x)^2(\Delta v)^2}, \\
k_7 &= \frac{1}{8(\Delta x)(\Delta v)(\Delta t)}, k_8 = \frac{(\varphi_{i+1,j+1}^k - \varphi_{i+1,j-1}^k - \varphi_{i-1,j+1}^k + \varphi_{i-1,j-1}^k)}{4(\Delta x)(\Delta v)}, \\
k_9 &= \frac{(\varphi_{i,j+1}^k - \varphi_{i,j-1}^k)}{4(\Delta x)(\Delta v)}
\end{aligned}$$

olarak tanımlıdır.

Böylece Problem 4.3'ün yaklaşık çözümü olan $\tilde{u}_{i,j}^k$ değerleri Ω_T bölgesinin $I \times J \times K$ tane örgü noktasında

$$\tilde{A}\tilde{\mathbf{u}} = \mathcal{F} \tag{4.28}$$

matris denklemi çözülerek elde edilir.

Burada $\tilde{A}$ üçlü blok bant matrisidir:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}^{(1)} & \mathcal{B}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ \mathcal{C}^{(2)} & \mathcal{A}^{(2)} & \mathcal{B}^{(2)} & \ddots & \vdots \\ 0 & \mathcal{C}^{(3)} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathcal{B}^{(I-1)} \\ 0 & \dots & 0 & \mathcal{C}^{(I)} & \mathcal{A}^{(I)} \end{bmatrix}_{IJK \times IJK} . \quad (4.29)$$

(4.29) matrisinde yer alan $\mathcal{A}^{(i)}$, $\mathcal{B}^{(i)}$, $\mathcal{C}^{(i)}$ matrisleri aşağıda verilmiştir:

$$\mathcal{A}^{(i)} = \begin{bmatrix} A_1^{(i,1)} & A_2^{(i,1)} & A_4^{(i,1)} & \dots & A_4^{(i,1)} & A_4^{(i,1)} \\ A_3^{(i,2)} & A_1^{(i,2)} & A_2^{(i,2)} & A_4^{(i,2)} & \ddots & \vdots \\ A_4^{(i,3)} & A_3^{(i,3)} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & A_4^{(i,J-2)} \\ A_4^{(i,J-1)} & \dots & A_4^{(i,J-1)} & \ddots & \ddots & A_2^{(i,J-1)} \\ A_4^{(i,J)} & \dots & \dots & A_4^{(i,J)} & A_3^{(i,J)} & A_1^{(i,J)} \end{bmatrix}_{JK \times JK}, \quad i = 1, 2, \dots, I;$$

$$\mathcal{B}^{(i)} = \begin{bmatrix} B_1^{(i,1)} & B_2^{(i,1)} & B_4^{(i,1)} & \dots & B_4^{(i,1)} & B_4^{(i,1)} \\ B_3^{(i,2)} & B_1^{(i,2)} & B_2^{(i,2)} & B_4^{(i,2)} & \ddots & \vdots \\ B_4^{(i,3)} & B_3^{(i,3)} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & B_4^{(i,J-2)} \\ B_4^{(i,J-1)} & \dots & B_4^{(i,J-1)} & \ddots & \ddots & B_2^{(i,J-1)} \\ B_4^{(i,J)} & \dots & \dots & B_4^{(i,J)} & B_3^{(i,J)} & B_1^{(i,J)} \end{bmatrix}_{JK \times JK}, \quad i = 1, 2, \dots, I-1;$$

$$\mathcal{C}^{(i)} = \begin{bmatrix} C_1^{(i,1)} & C_2^{(i,1)} & C_4^{(i,1)} & \dots & C_4^{(i,1)} & C_4^{(i,1)} \\ C_3^{(i,2)} & C_1^{(i,2)} & C_2^{(i,2)} & C_4^{(i,2)} & \ddots & \vdots \\ C_4^{(i,3)} & C_3^{(i,3)} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & C_4^{(i,J-2)} \\ C_4^{(i,J-1)} & \dots & C_4^{(i,J-1)} & \ddots & \ddots & C_2^{(i,J-1)} \\ C_4^{(i,J)} & \dots & \dots & C_4^{(i,J)} & C_3^{(i,J)} & C_1^{(i,J)} \end{bmatrix}_{JK \times JK}, \quad i = 2, 3, \dots, I.$$

$$A_s^{(i,j)} = \begin{bmatrix} f_s(i,j) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_s(i,j) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & f_s(i,j) \end{bmatrix}_{K \times K},$$

$$B_s^{(i,j)} = \begin{bmatrix} g_s(i,j) & \frac{(-1)^s(s-1)}{(s-1)!}a & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{(-1)^{(s+1)(s-1)}a}{(s-1)!} & g_s(i,j) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{(-1)^s(s-1)}{(s-1)!}a \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{(-1)^{(s+1)(s-1)}a}{(s-1)!} & g_s(i,j) \end{bmatrix}_{K \times K},$$

$$C_s^{(i,j)} = \begin{bmatrix} h_s(i,j) & \frac{(-1)^{(s+1)(s-1)}a}{(s-1)!} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{(-1)^s(s-1)}{(s-1)!}a & h_s(i,j) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{(-1)^{(s+1)(s-1)}a}{(s-1)!} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{(-1)^s(s-1)}{(s-1)!}a & h_s(i,j) \end{bmatrix}_{K \times K},$$

$$s = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, \dots, J,$$

$$A_4^{(i,j)} = \begin{bmatrix} k_8(i,j) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_8(i,j) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_8(i,j) \end{bmatrix}_{K \times K},$$

$$B_4^{(i,j)} = \begin{bmatrix} k_9(i,j) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_9(i,j) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_9(i,j) \end{bmatrix}_{K \times K},$$

$$C_4^{(i,j)} = \begin{bmatrix} -k_9(i,j) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_9(i,j) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -k_9(i,j) \end{bmatrix}_{K \times K}$$

ve

$$\begin{aligned} f_1(i, j) &= -2k_4 + 2k_3 + k_8, \quad f_2(i, j) = -2k_2 - k_3 - k_5 + k_8, \quad f_3(i, j) = 2k_2 - k_3 + k_5 + k_8, \\ h_1(i, j) &= -2k_1 + k_4 - k_6 - k_9, \quad h_2(i, j) = k_1 + k_2 - k_9, \quad h_3(i, j) = k_1 - k_2 - k_9, \\ g_1(i, j) &= 2k_1 + k_4 + k_6 + k_9, \quad g_2(i, j) = -k_1 + k_2 + k_9, \quad g_3(i, j) = -k_1 - k_2 + k_9, \quad a = k_7 \end{aligned}$$

olarak tanımlıdır. Ayrıca (4.28) denkleminde

$$\mathcal{F}; \tilde{u}_{0,j}^k, \tilde{u}_{I+1,j}^k, \tilde{u}_{i,0}^k, \tilde{u}_{i,J+1}^k, \tilde{u}_{i,j}^0, \tilde{u}_{i,j}^{K+1}, (i = 0, 1, \dots, I+1, j = 0, 1, \dots, J+1, k = 0, 1, \dots, K+1)$$

bilinen sınır değerlerini içeren bir sütun matrisi ve $\tilde{\mathbf{u}}$ ise

$$\begin{aligned} &\tilde{u}_{1,1}^1, \tilde{u}_{1,1}^2, \dots, \tilde{u}_{1,1}^K, \tilde{u}_{1,2}^1, \tilde{u}_{1,2}^2, \dots, \tilde{u}_{1,2}^K, \dots, \tilde{u}_{1,J}^1, \tilde{u}_{1,J}^2, \dots, \tilde{u}_{1,J}^K, \\ &\tilde{u}_{2,1}^1, \tilde{u}_{2,1}^2, \dots, \tilde{u}_{2,1}^K, \tilde{u}_{2,2}^1, \tilde{u}_{2,2}^2, \dots, \tilde{u}_{2,2}^K, \dots, \tilde{u}_{2,J}^1, \tilde{u}_{2,J}^2, \dots, \tilde{u}_{2,J}^K, \\ &\vdots \quad \vdots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \vdots \\ &\tilde{u}_{I,1}^1, \tilde{u}_{I,1}^2, \dots, \tilde{u}_{I,1}^K, \tilde{u}_{I,2}^1, \tilde{u}_{I,2}^2, \dots, \tilde{u}_{I,2}^K, \dots, \tilde{u}_{I,J}^1, \tilde{u}_{I,J}^2, \dots, \tilde{u}_{I,J}^K \end{aligned}$$

bilinmeyen değerlerini içeren $IJK \times 1$ tipinde bir çözüm vektörüdür.

Son olarak (4.24) denkleminde merkezi fark formülleri ve yamuk yönteminin formülü yazılarak elde edilen

$$\frac{(\tilde{u}_{i,j}^{k+1} - \tilde{u}_{i,j}^{k-1})}{2(\Delta t)} + k_2 \frac{(\tilde{u}_{i+1,j}^k - \tilde{u}_{i-1,j}^k)}{2(\Delta x)} - k_1 \frac{(\tilde{u}_{i,j+1}^k + \tilde{u}_{i,j-1}^k)}{2(\Delta v)} + k_{12} + (\Delta v) \sum_{j=1}^J (\varphi_{i,j}^k) (\tilde{u}_{i,j}^k) = \tilde{\lambda}_{i,j}^k,$$

$i = 1, 2, \dots, I; j = 1, 2, \dots, J; k = 1, 2, \dots, K$ denkleminin çözülmesiyle

$\lambda(x_i, v_j, t_k) = \lambda(a + i\Delta x, c + j\Delta v, e + k\Delta t)$ fonksiyonu için $\tilde{\lambda}_{i,j}^k$ yaklaşık çözümü elde edilir. Burada sınır değerleri bilindiğinden

$$k_{12} = \frac{(\Delta v)}{2} (\Phi(x, v, t, c)u(x, c, t) + \Phi(x, v, t, d)u(x, d, t))$$

bilinen değerdir.

4.3.1 Sayısal Örnekler

Bu bölümde önerilen sayısal yöntemi test etmek amacıyla (4.16)-(4.17) formunda üç adet ters problem ele alınmıştır. Bu ters problemler, verilen bölgede denklemi ve koşulları sağlayacak şekilde farklı yapıda fonksiyonlar seçilerek oluşturulmuştur. Hesaplamalar Intel(R) Core(TM) i7-7700HQ CPU 2.80GHz işlemciye, 16 Gb Ram belleğe sahip Windows 10 işletim sistemli bir bilgisayarda MATLAB R2014a programı kullanılarak yapılmıştır. Bulunan yaklaşık çözümler, kesin çözümler ile grafikler ve çizelgeler yardımıyla karşılaştırılmıştır.

Örnek 4.1

$$H(x, v, t) = \ln x + v,$$

$$\Phi(x, v, t, s) = e^{v-s}$$

ve

$$\begin{aligned} F = & (1176v^3)/(x^2(t-3)) - (1568v^3)/(x(t-3)) + (784v^4)/(x(t-3)) \\ & - (588v^4)/(x^2(t-3)) - (2058v^2 \ln(t-3))/x + (4704v^2 \ln(t-3))/x^2 \\ & + (1820v^3 \ln(t-3))/x - (3528v^2 \ln(t-3))/x^3 - (1904v^3 \ln(t-3))/x^2 \\ & - (224v^4 \ln(t-3))/x - (616v^4 \ln(t-3))/x^2 + (1176v^4 \ln(t-3))/x^3 \\ & - (353.4633 \ln(t-3)e^v)/(x) + (265.0975 \ln(t-3)e^v)/(x^2) - (98v^3x)/(t-3) \\ & + (49v^4x)/(t-3) + 28v^3x \ln(t-3) - 14v^4x \ln(t-3) - (22.0915x \ln(t-3)e^v) \\ & - (32t^2v^3)/(x(t-3)) + (24t^2v^3)/(x^2(t-3)) + (16t^2v^4)/(x(t-3)) \\ & - (12t^2v^4)/(x^2(t-3)) - (42t^2v^2 \ln(t-3))/x + (96t^2v^2 \ln(t-3))/x^2 \\ & + (28t^2v^3 \ln(t-3))/x - (72t^2v^2 \ln(t-3))/x^3 - (32t^2v^3 \ln(t-3))/x^2 \\ & - (16t^2v^4 \ln(t-3))/x^2 + (24t^2v^4 \ln(t-3))/x^3 - (7.2135t^2 \ln(t-3)e^v)/(x) \\ & + (5.4102t^2 \ln(t-3)e^v)/(x^2) + (28tv^3x)/(t-3) - (14tv^4x)/(t-3) \\ & - 4tv^3x \ln(t-3) + 2tv^4x \ln(t-3) + (6.3118tx \ln(t-3)e^v) \\ & + (448tv^3)/(x(t-3)) - (336tv^3)/(x^2(t-3)) - (224tv^4)/(x(t-3)) \\ & - (2t^2v^3x)/(t-3) + (168tv^4)/(x^2(t-3)) + (t^2v^4x)/(t-3) \\ & + (588tv^2 \ln(t-3))/x - (1344tv^2 \ln(t-3))/x^2 - (456tv^3 \ln(t-3))/x \\ & + (1008tv^2 \ln(t-3))/x^3 + (496tv^3 \ln(t-3))/x^2 + (32tv^4 \ln(t-3))/x \\ & + (200tv^4 \ln(t-3))/x^2 - (336tv^4 \ln(t-3))/x^3 + (100.9895t \ln(t-3)e^v)/(x) \\ & - (75.7421t \ln(t-3)e^v)/(x^2) - (0.4508t^2x \ln(t-3)e^v) \end{aligned}$$

verilen fonksiyonlar olmak üzere $\Omega_T = (2, 3) \times (0, 2) \times (4, 7)$ bölgesinde (4.16) denklemini (4.17) koşulları altında sağlayan (u, λ) çözüm ikilisinin bulunması problemini ele alalım.

Problemin kesin çözümünün

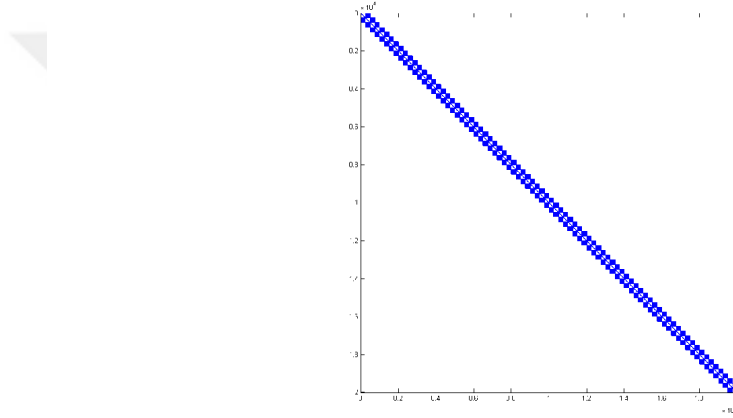
$$u(x, v, t) = v^3(x-3)(v-2)\left(\frac{2}{x} - 1\right)^2(t-7)^2 \ln(t-3),$$

$$\begin{aligned}\lambda(x, v, t) = & \left(\frac{1}{(t-3)}\right)((14t^2 - 196t + 686)v^3) - ((7t^2 - 98t + 343)v^4) \\ & + (\ln(t-3))(v^2(294 - 490v + 147v^2) + tv^2(6t - 6tv + tv^2 - 84 + 112v) \\ & - 28tv^4 + (-4116 - 84t^2 + 1176t + (31556 - 9016t + 644t^2)e^{(-2)})e^v)\end{aligned}$$

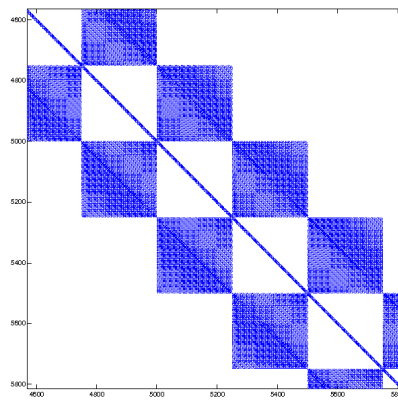
olduğu bilinmektedir.

Burada $I = 80$, $J = 50$, $K = 5$ alınarak en fazla 20000 adet örgü noktasında u ve λ değerleri hesaplanmıştır.

Şekil 4.1 de, Örnek 4.1 deki $\tilde{A}$ matrisinin yapısının 20000×20000 tipinde üçlü blok bant matris olduğu gösterilmiştir. Şekil 4.1'in yakından görünümü Şekil 4.2 de yer almaktadır.



Şekil 4.1 Örnek 4.1 de $\tilde{A}$ matrisinin yapısı.



Şekil 4.2 Şekil 4.1'in yakından görünümü.

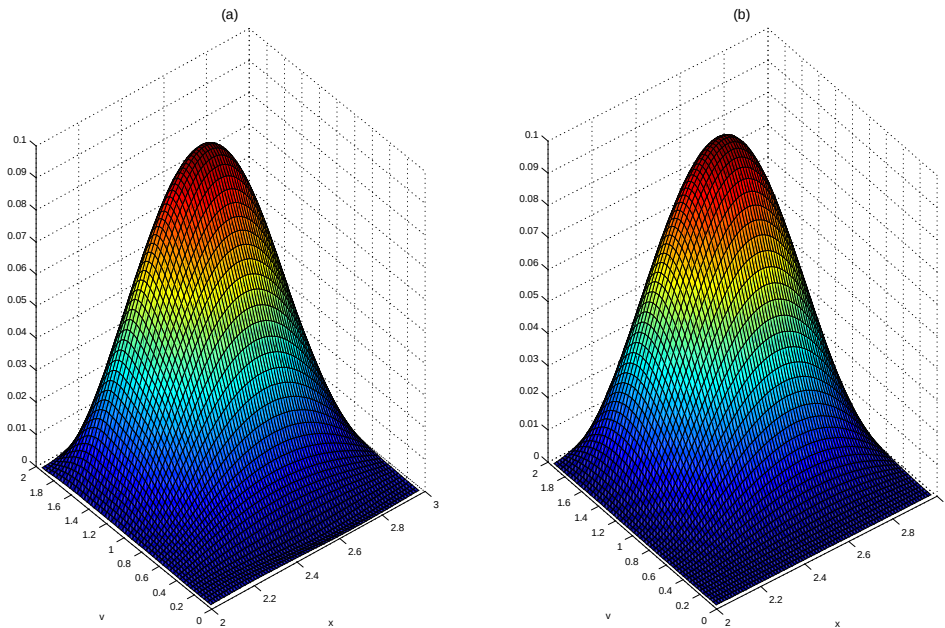
Örnek 4.1 de farklı sayıdaki örgü noktaları için u ve λ fonksiyonlarının hesaplanan yaklaşık değerlerinde ortaya çıkan maksimum ve minimum hata miktarları ve hesaplama süreleri

Çizelge 4.1 de gösterilmiştir. Bu çizelgede verilen maksimum ve minimum hatalar; u ve λ fonksiyonlarının bulunduğu örgü noktasındaki kesin değeri ile hesaplanan yaklaşık değeri arasındaki farkın mutlak değeri olarak tanımlanmıştır.

Çizelge 4.1 Örnek 4.1 için hata çizelgesi.

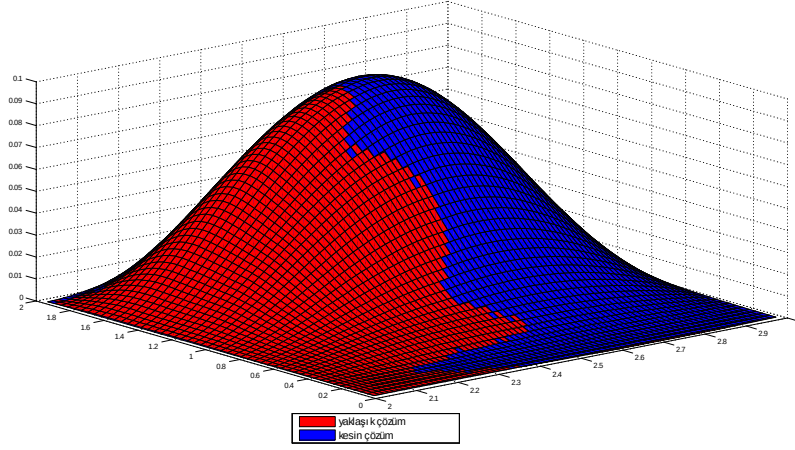
	$I = 25, J = 20,$ $K = 10$	$I = 35, J = 25,$ $K = 15$	$I = 80, J = 50,$ $K = 5$
Örgü noktalarının sayısı	5000	13125	20000
Hesaplama süresi	1617.02s	4762.10s	27114.78s
u için minimum hata	$1.86E - 07$	$8.85E - 08$	$1.29E - 09$
u için maksimum hata	0.007306	0.007556	0.008327
λ için minimum hata	$5.51E - 07$	$1.15E - 08$	$5.79E - 07$
λ için maksimum hata	0.073985	0.066805	0.086971

Şekil 4.3 de, u fonksiyonu için hesaplanan yaklaşık değerler ve kesin çözüm $t = 5$ alınarak karşılaştırmalı olarak gösterilmiştir.



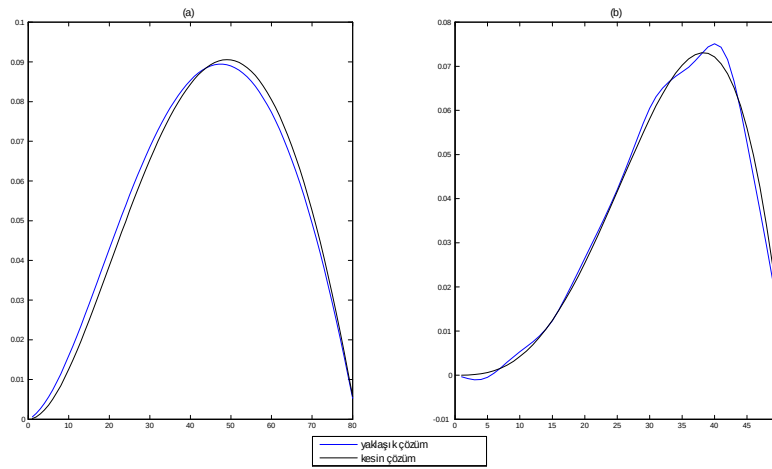
Şekil 4.3 Örnek 4.1 de u için (a) yaklaşık ve (b) kesin çözüm.

Şekil 4.4 de, bu iki çözümün grafikleri aynı grafik üzerinde gösterilmiştir.



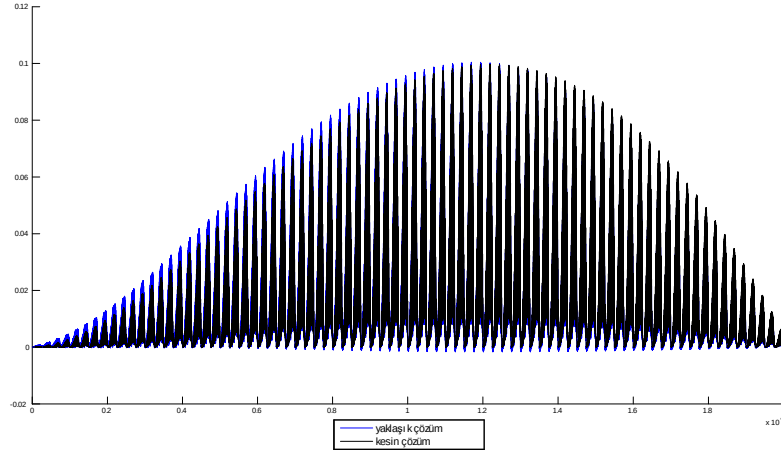
Şekil 4.4 Örnek 4.1 de u fonksiyonu için yaklaşık ve kesin çözümlerin birlikte gösterimi.

Şekil 4.5 de, u fonksiyonu için Şekil 4.3 de verilen yaklaşık ve kesin çözümlerin kesitsel grafikleri verilmiştir.

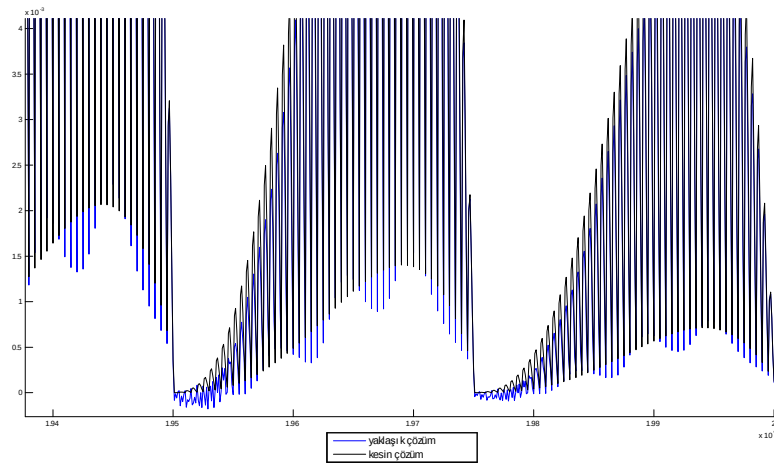


Şekil 4.5 Örnek 4.1 de u fonksiyonu için kesitsel görüntüm
(a) v, t sabit, (b) x, t sabit.

Şekil 4.6 da, u çözüm vektörünün tüm bileşenleri karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Şekil 4.6'nın yakından görünümü Şekil 4.7 de verilmiştir.

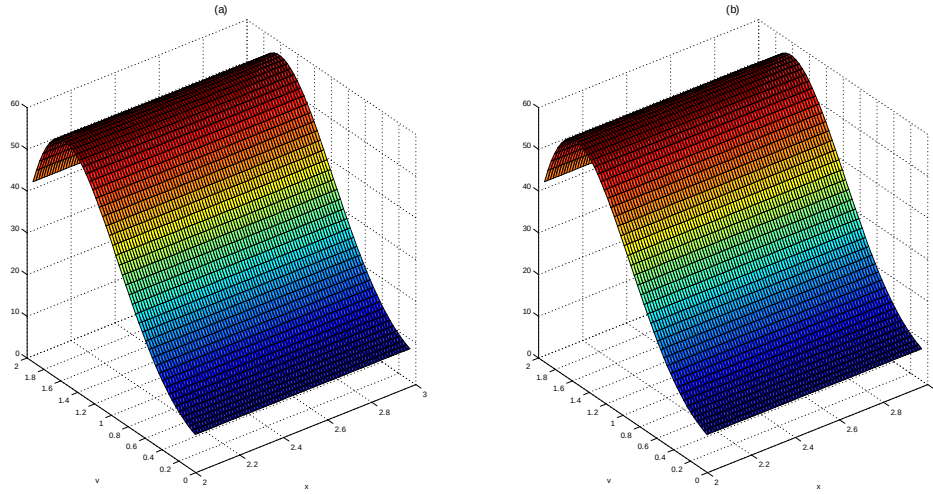


Şekil 4.6 Örnek 4.1 de u çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel gösterimi.



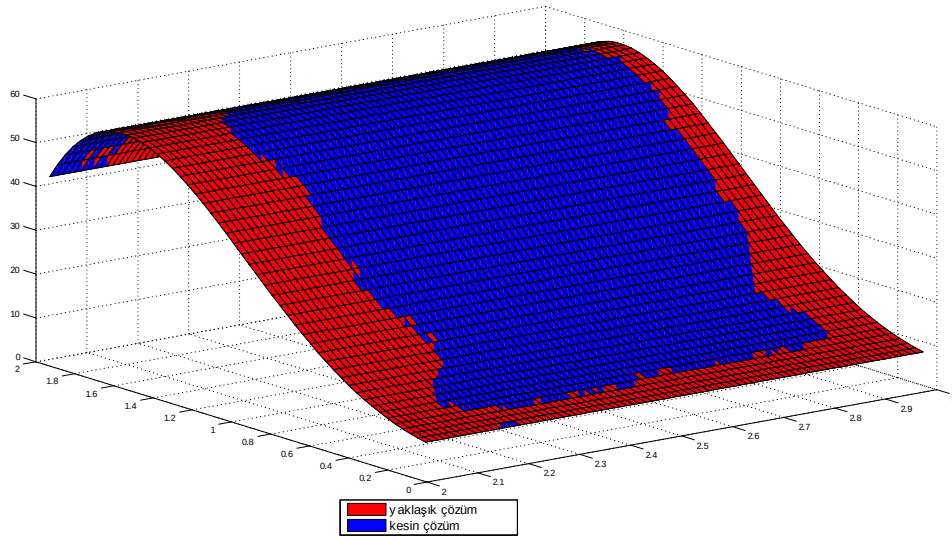
Şekil 4.7 Şekil 4.6'nın yakından görünümü.

Şekil 4.8 de, $\lambda(x, v, t)$ fonksiyonu için yaklaşık ve kesin çözüm $t = 5$ alınarak karşılaştırılmalı olarak sunulmuştur.



Şekil 4.8 Örnek 4.1 de λ için (a) yaklaşık çözüm ve (b) kesin çözüm.

Şekil 4.8 de grafiği gösterilen bu iki çözüm, Şekil 4.9 da aynı grafik üzerinde birleştirilerek verilmiştir.



Şekil 4.9 Örnek 4.1 de λ için yaklaşık ve kesin çözümlerin aynı grafikte gösterimi.

Örnek 4.2 Saçılım çekirdeği

$$\Phi(x, v, t, s) = s + t,$$

Hamiltonian fonksiyonu

$$H(x, v, t) = -x^2$$

ve

$$F = vx(408t - 14v + 21x + 4t^2x^2 + 4tv - 62tx - 7vx - 28tx^2 + 8t^2x - 60t^2 + 2tvx + 42)$$

olmak üzere $\Omega_T = (-5, 3) \times (0, 3) \times (0, 7)$ bölgesinde (4.16) denklemini (4.17) koşulları altında sağlayan (u, λ) çözüm ikilisinin bulunması problemini ele alalım.

Problemin kesin çözümünün

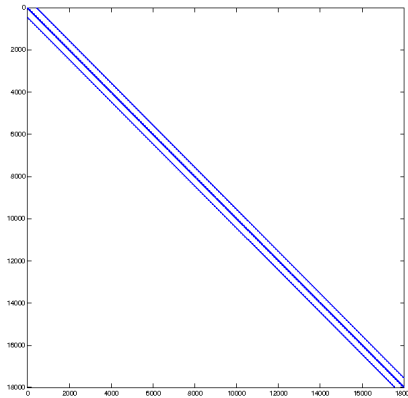
$$u(x, v, t) = (x^2 + 2x - 15)(v^2 - 3v)(t^2 - 7t),$$

$$\begin{aligned} \lambda = & -9t^3x - 6t^2x^3 - 30tv^2 + 90tv + 42tx^3 + 105v^2 - 315v \\ & + \frac{1}{4}(51t^2x^2 - 1485t^2 + 525tx^2 - 2835t) - \frac{1}{2}(9t^3x^2 - 135t^3 - 279t^2x + 1071tx) \end{aligned}$$

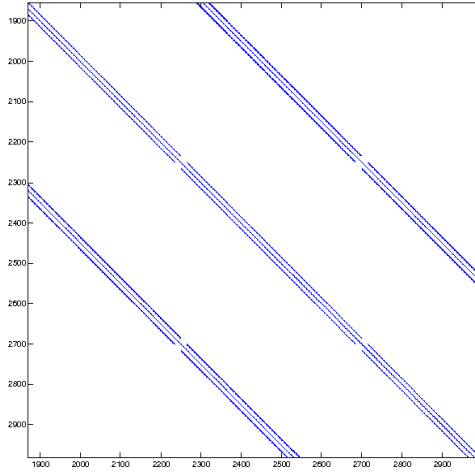
olduğu bilinmektedir.

Burada $I = 40$, $J = 30$, $K = 15$ alınarak en fazla 18000 adet örgü noktasında, u ve λ değerlerinin yaklaşık çözümleri hesaplanmıştır.

Şekil 4.10 da, $\tilde{A}$ matrisinin yapısının 18000×18000 tipinde üçlü blok bant matris olduğu gösterilmiştir. Şekil 4.10'un yakından görünümü Şekil 4.11 da verilmiştir.



Şekil 4.10 Örnek 4.2 de $\tilde{A}$ matrisinin yapısı.



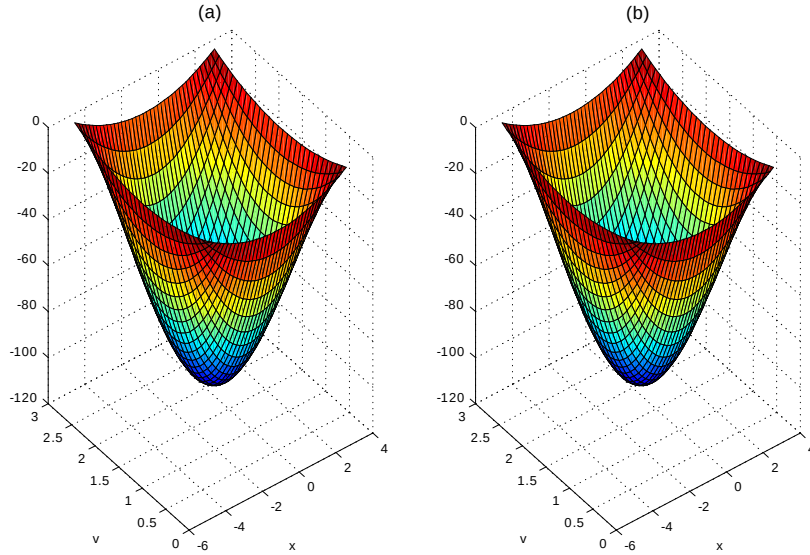
Şekil 4.11 Şekil 4.10'un yakından görünümü.

Örnek 4.2 de farklı sayıdaki örgü noktaları için u ve λ fonksiyonlarının hesaplanan yaklaşık değerlerinde ortaya çıkan maksimum ve minimum hata miktarları ve hesaplama süreleri Çizelge 4.2 de gösterilmiştir. Bu çizelgede verilen maksimum ve minimum hatalar; u ve λ fonksiyonlarının bulunduğu örgü noktasındaki kesin değeri ile hesaplanan yaklaşık değeri arasındaki farkın mutlak değeri olarak tanımlanmıştır.

Çizelge 4.2 Örnek 4.2 için hata çizelgesi.

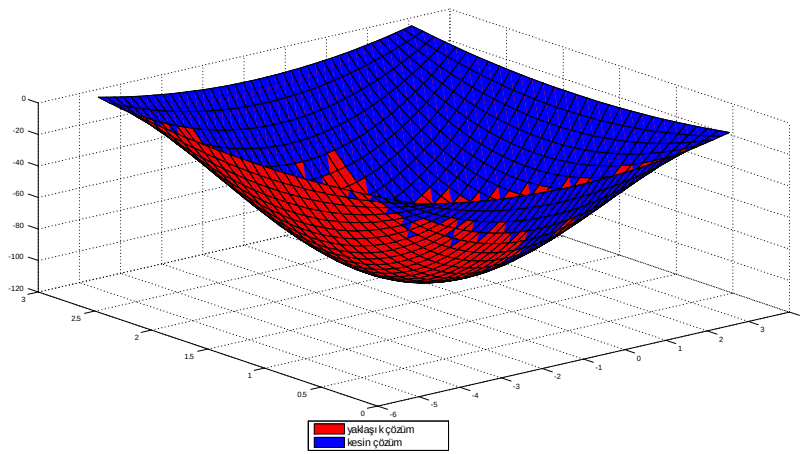
	$I = 25, J = 20,$ $K = 10$	$I = 25, J = 20,$ $K = 20$	$I = 40, J = 30,$ $K = 15$
Örgü noktalarının sayısı	5000	10000	18000
Hesaplama süresi	1101.91s	4242.65s	18607.76s
u için minimum hata	0	0	0
u için maksimum hata	$1.24E - 11$	$3.12E - 11$	$8.73E - 11$
λ için minimum hata	0.016864	0.005125	0.004342
λ için maksimum hata	264.7083	264.2209	176.5047

Şekil 4.12 de, u fonksiyonu için yaklaşık ve kesin çözüm grafikleri $t = 4$ alınarak karşılaştırılmalı olarak gösterilmiştir.



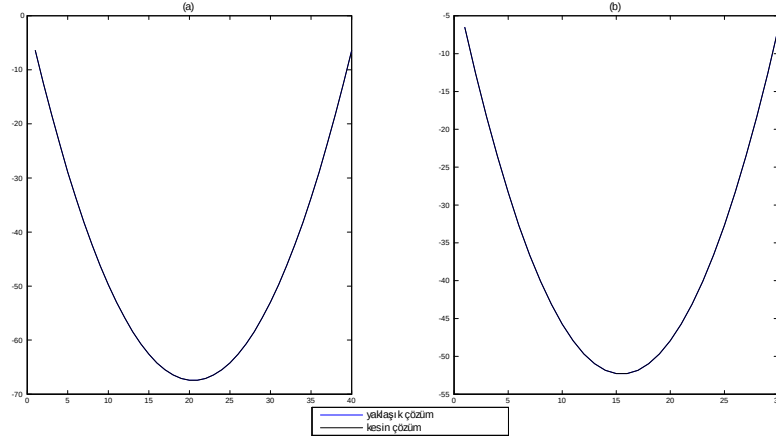
Şekil 4.12 Örnek 4.2 de u için (a) yaklaşık çözüm ve (b) kesin çözüm.

Bu iki çözüm, Şekil 4.13 de aynı grafik üzerinde birleştirilerek verilmiştir.



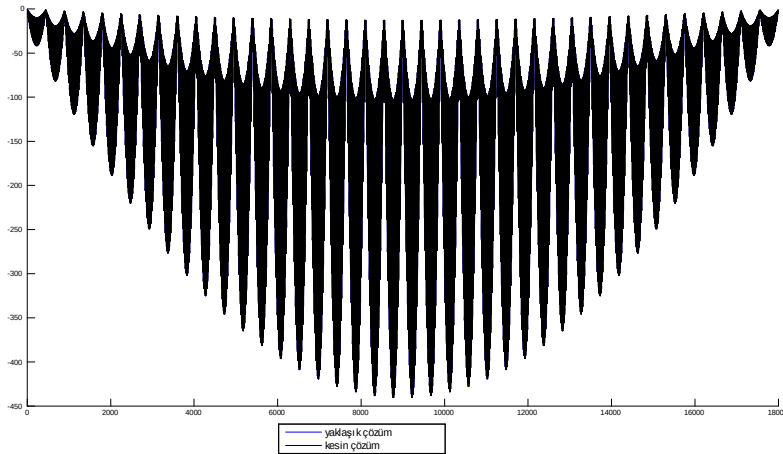
Şekil 4.13 Örnek 4.2 de u için yaklaşık ve kesin çözümlerin aynı grafikte gösterimi.

Şekil 4.14 de, u fonksiyonu için Şekil 4.12 de verilen yaklaşık ve kesin çözümlerin kesitsel grafikleri gösterilmiştir.

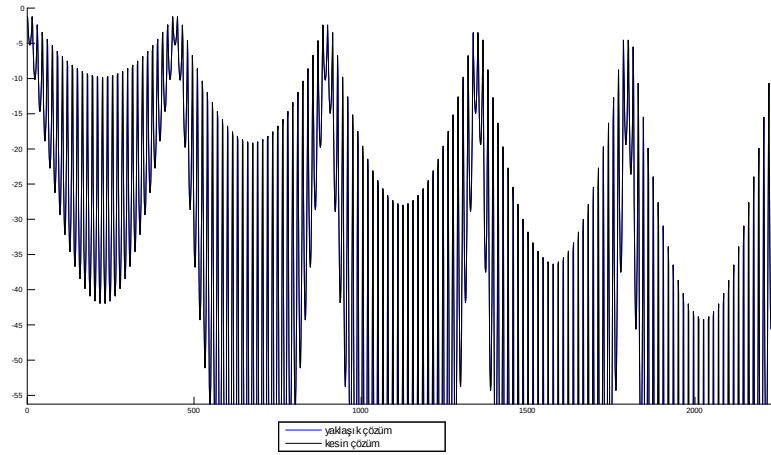


Şekil 4.14 Örnek 4.2 de u fonksiyonu için kesitsel görünümü
(a) v, t sabit; (b) x, t sabit.

Şekil 4.15 de, u çözüm vektörünün tüm bileşenleri karşılaştırmalı olarak grafiksel gösterimi sunulmuştur.

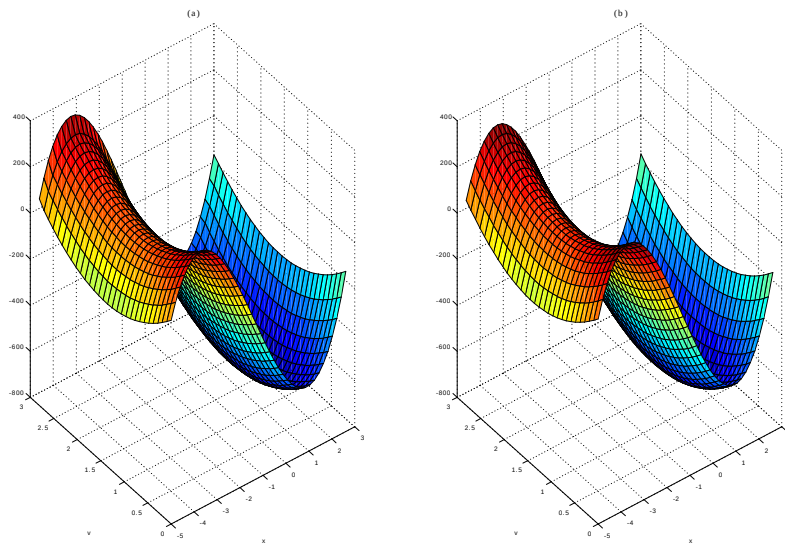


Şekil 4.15 Örnek 4.2 de u çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel gösterimi.



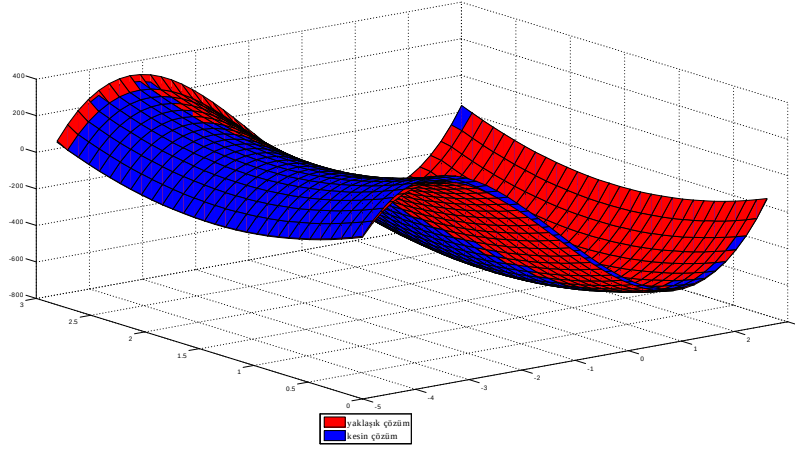
Şekil 4.16 Şekil 4.15'in yakından görünümü.

Şekil 4.17 de, $\lambda(x, v, t)$ fonksiyonu için yaklaşık ve kesin çözümlerin grafikleri $t = 4$ alınarak karşılaştırmalı olarak verilmiştir.



Şekil 4.17 Örnek 4.2 de λ için (a) yaklaşık çözüm, (b) kesin çözüm.

Şekil 4.17 de gösterilen bu iki çözüm, Şekil 4.18 de aynı grafikte birleştirilerek sunulmuştur.



Şekil 4.18 Örnek 4.2 de λ için yaklaşık ve kesin çözümlerin aynı grafikte gösterimi.

Örnek 4.3 *Hamiltonian fonksiyonu*

$$H(x, v, t) = -x^2,$$

saçılım çekirdeği

$$\Phi(x, v, t, s) = xv(s + t)$$

ve

$$\begin{aligned} F = & -(v \sin(\pi x)(2^x - 2)(v - 19.5833x + 4.7500tx + 3^t(1.0986t) + 3^t(4.4931v) \\ & - 0.1667t^2x + 3^t(19.5833x) - 3^t(4.4931) - 3^t(1.0986tv) - 3^t(4.7500tx) \\ & + 3^t(0.1667t^2x) - 1)) \end{aligned}$$

olmak üzere $\Omega_T = (1, 4) \times (0, 1) \times (0, 5)$ bölgesinde (4.16) denklemini (4.17) koşulları altında sağlayan (u, λ) fonksiyonlar çiftinin bulunması problemi.

Problemin kesin çözümünün

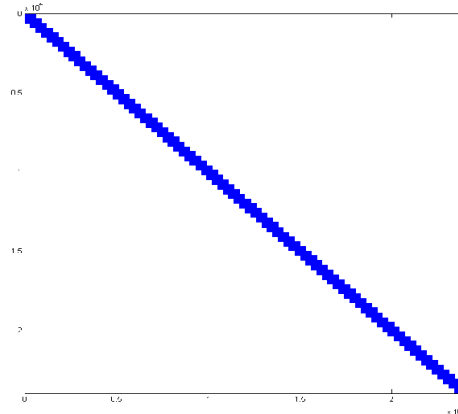
$$u(x, v, t) = v(v - 1)(t - 5)(3^t - 1)(2^x - 2) \sin(x\pi),$$

$$\lambda(x, v, t) = x \sin(\pi x)(20 - 20(3^t) - 10(2^x) - 4t + 10(2^x)(3^t) + 4t(3^t) + 2t(2^x) - 2t(2^x)(3^t))$$

olduğu bilinmektedir.

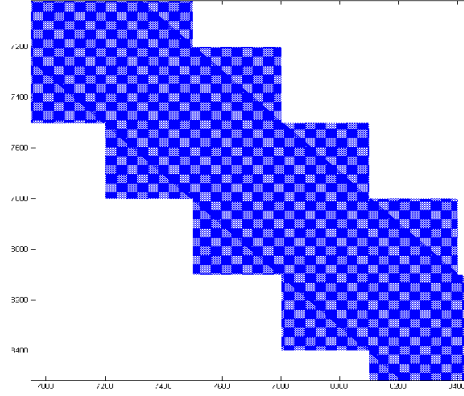
Burada $I = 80$, $J = 75$, $K = 4$ alınarak en fazla 24000 adet örgü noktasında, u ve λ değerlerinin yaklaşık çözümleri hesaplanmıştır.

Şekil 4.19 da, Örnek 4.3 deki $\tilde{A}$ matrisinin yapısının 24000×24000 tipinde üçlü blok bant matris olduğu gösterilmiştir.



Şekil 4.19 Örnek 4.3 de $\tilde{A}$ matrisinin yapısı.

Şekil 4.19'un yakınlaştırmış görünümü Şekil 4.20 de sunulmuştur.



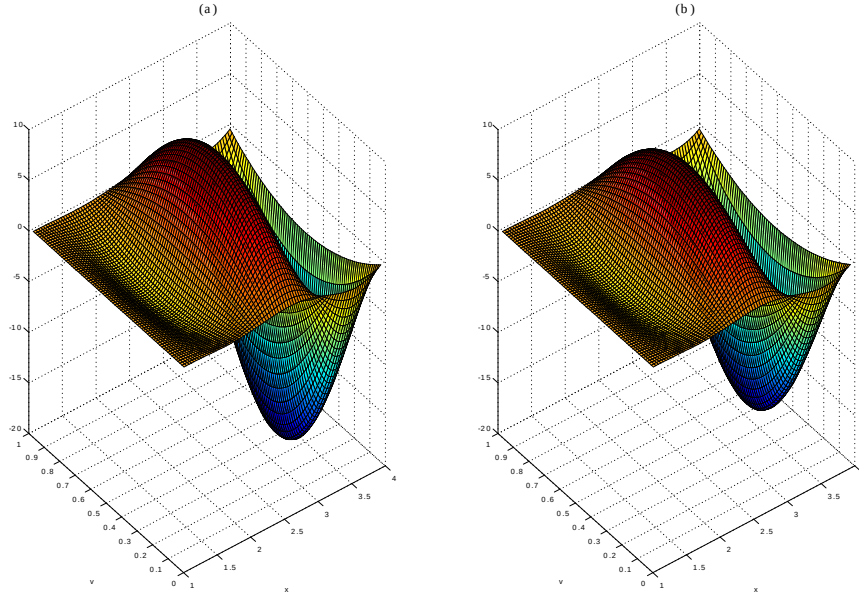
Şekil 4.20 Şekil 4.19'un yakından görünümü.

Örnek 4.3 de farklı sayıdaki örgü noktaları için u ve λ fonksiyonlarının hesaplanan yaklaşık değerlerinde ortaya çıkan maksimum ve minimum hata miktarları ve hesaplama süreleri Çizelge 4.3 de gösterilmiştir. Bu çizelgede verilen maksimum ve minimum hatalar; u ve λ fonksiyonlarının bir örgü noktasındaki kesin değeri ile hesaplanan yaklaşık değeri arasındaki farkın mutlak değeri kullanılarak hesaplanmıştır.

Çizelge 4.3 Örnek 4.3 için hata çizelgesi.

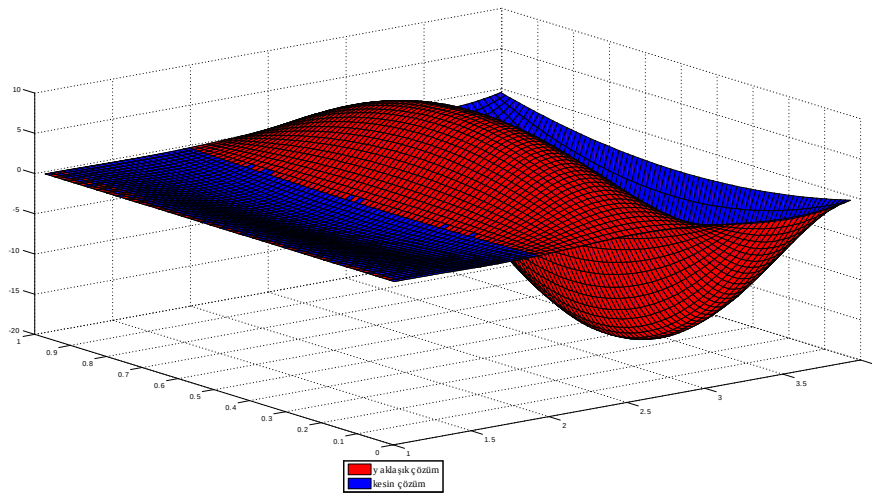
	$I = 50, J = 20,$ $K = 5$	$I = 50, J = 40,$ $K = 5$	$I = 80, J = 75,$ $K = 4$
Örgü noktalarının sayısı	5000	10000	24000
Hesaplama süresi	2406.77s	10565.90s	53439.74s
u için minimum hata	$9.16E - 06$	$9.17E - 06$	$4.35E - 06$
u için maksimum hata	8.323209	8.414764	6.945716
λ için minimum hata	0.001565	$5.67E - 06$	$1.60E - 04$
λ için maksimum hata	445.4387	321.2962	236.2767

Şekil 4.21 de, u fonksiyonu için yaklaşık ve kesin çözümlerin grafikleri $t = 3$ alınarak karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.



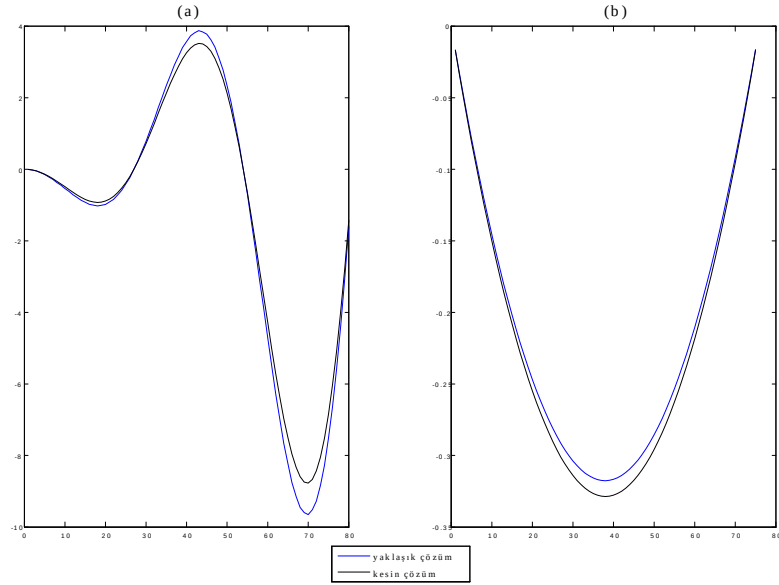
Şekil 4.21 Örnek 4.3 de u için (a) yaklaşık çözüm ve (b) kesin çözüm.

Şekil 4.22 de, bu iki çözüm birleştirilerek aynı grafik üzerinde gösterilmiştir.



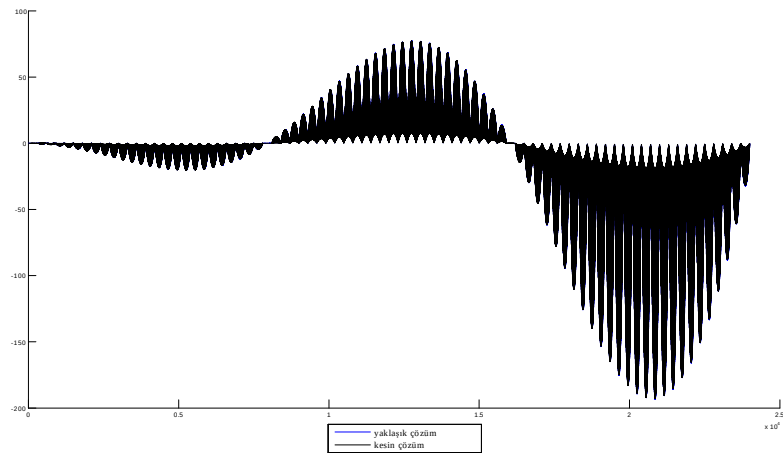
Şekil 4.22 Örnek 4.3 de u için yaklaşık ve kesin çözümlerin aynı grafikte gösterimi.

Şekil 4.23 de, u fonksiyonu için Şekil 4.21 de verilen yaklaşık ve kesin çözümlerin kesitsel grafikleri verilmiştir.

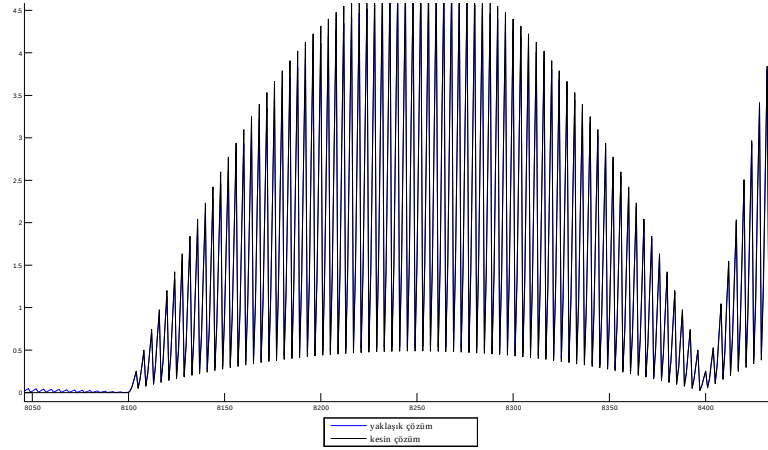


Şekil 4.23 Örnek 4.3 de u fonksiyonu için kesitsel görünümü
(a) v, t sabit, (b) x, t sabit.

Şekil 4.24 de, u çözüm vektörünün tüm bileşenleri karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.

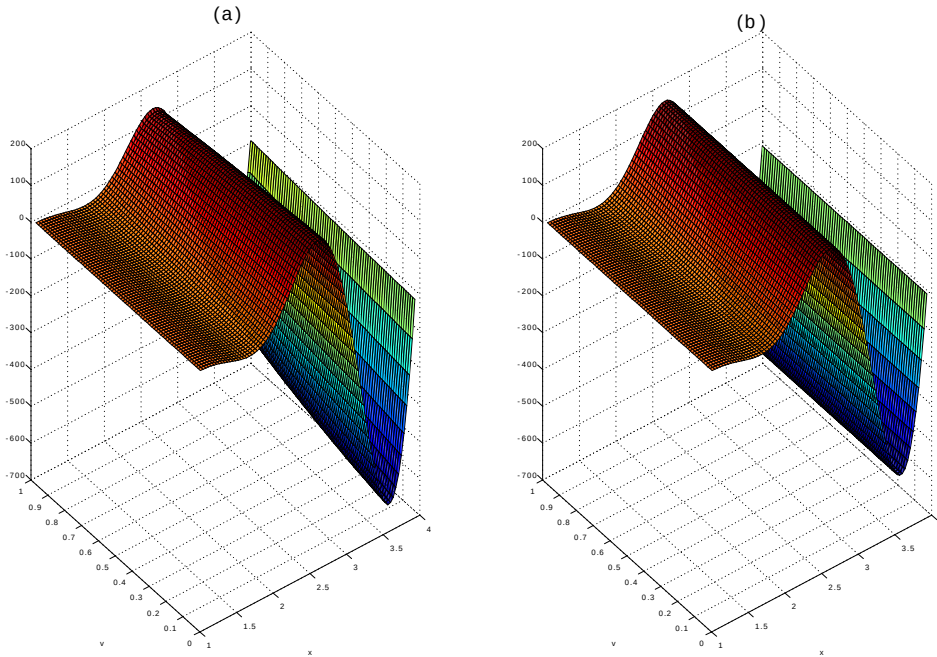


Şekil 4.24 Örnek 4.3 de u çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel görünümü.



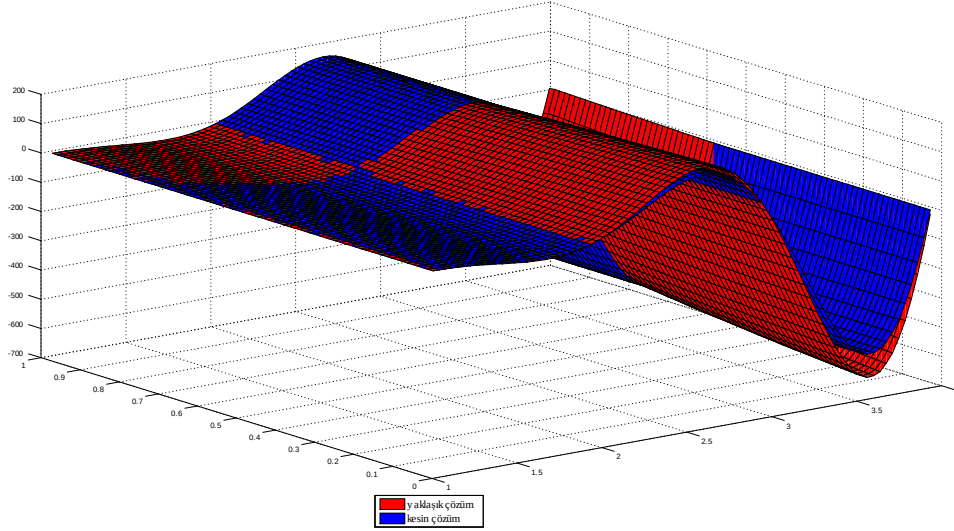
Şekil 4.25 Şekil 4.24'ün yakından görünümü.

Şekil 4.26 da, λ fonksiyonu için yaklaşık ve kesin çözümlerin grafikleri $t = 3$ alınarak karşılaştırmalı olarak gösterilmiştir.



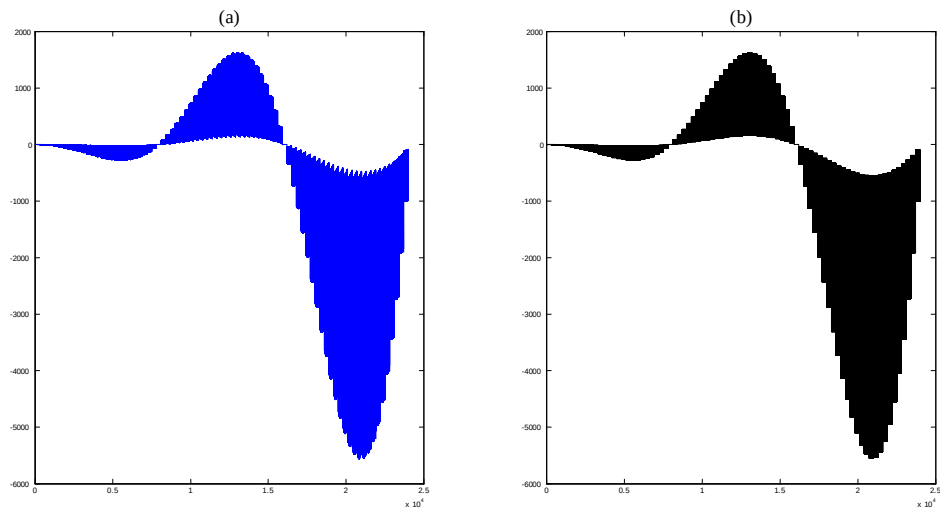
Şekil 4.26 Örnek 4.3 de λ için (a) yaklaşık çözüm ve (b) kesin çözüm.

Şekil 4.26 da gösterilen λ fonksiyonu için hesaplanan yaklaşık ve kesin çözümler, Şekil 4.27 de aynı grafik üzerinde birleştirilerek sunulmuştur.



Şekil 4.27 Örnek 4.3 de λ için yaklaşık ve kesin çözümlerin birlikte gösterimi.

Şekil 4.28 de, λ çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel gösterimi verilmiştir.



Şekil 4.28 Örnek 4.3 de λ fonksiyonu için (a) yaklaşık çözüm, (b) kesin çözüm.

BÖLÜM 5

SONUÇ

Bu çalışmada ilk olarak, Liouville denklemi için bir ters problemin çözülebilirliği ve sayısal çözümü araştırılmıştır. Sonlu fark metodu kullanılarak bir sayısal çözüm yöntemi önerilmiştir. Bu yöntem, üç adet ters problemde test edilerek grafikler ve çizelgeler aracılığıyla bilinen gerçek çözümler ile karşılaştırılmıştır.

İkinci olarak, zamana bağlı ve saçılım terimi içeren kinetik denklemler için bazı ters problemlerin çözülebilirliği ve sayısal çözümleri araştırılmıştır. Sayısal çözüm için sonlu fark metodu ve yamuk yöntemi temel alınarak bir yöntem verilmiştir. MATLAB yazılımı kullanılarak üç adet ters problem bu yöntem ile çözülmüştür. Bu ters problemlerin bilinen kesin çözümleri ile yaklaşık çözümleri grafikler ve çizelgeler yardımıyla karşılaştırılmıştır. Elde edilen yaklaşık çözümlerin, kesin çözümlere kabul edilebilir derecede yakın olduğu görülmüştür.

Ayrıca bu tez çalışması içerisinde ters problemler teorisinin bazı uygulamalarına yer verilmiş, bu kapsamda görüntüleme teknikleri ayrıntılı olarak tartışılmıştır.



KAYNAKLAR

- Adams R A and Fournier J J F** (2003) *Sobolev Spaces*. 2nd edition, Elsevier, Academic Press, Amsterdam, 305 pp.
- Alexeev B V** (1982) *Mathematical Theory of Reacting Gases*. Nauka, Moscow, 420 pp.
- Amirov A** (2001) *Integral Geometry and Inverse Problems for Kinetic Equations*. VSP, Utrecht The Netherlands, 201 pp.
- Amirov A** (1986) Existence and Uniqueness Theorems for the Solution of an Inverse Problem for the Transport Equation. *Siberian Mathematical Journal*, 27: 785-800.
- Amirov A** (1995) Inverse Problem for a Kinetic Equation. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 3 (5): 351-358.
- Amirov A, Gölgeleyen F and Rahmanova A** (2009) An Inverse Problem for the General Kinetic Equation and a Numerical Method. *CMES*, 43 (2): 131-147.
- Amirov A, Ustaoglu Z and Heydarov B** (2011) Solvability of a Two Dimensional Coefficient Inverse Problem for Transport Equation and a Numerical Method. *Transport Theory and Statistical Physics*, 40 (1): 1-22.
- Anikonov E and Amirov A** (1983) A Uniqueness Theorem for the Solution of an Inverse Problem for the Kinetic Equation. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 272 (6): 1292-1293.
- Anikonov Y E** (2001) *Inverse Problems for Kinetic and other Evolution Equations*. VSP, Utrecht The Netherlands, 270 pp.
- Aydoğdu A, Aydoğdu Y ve Yakıncı Z D** (2017) Temel Radyolojik İnceleme Yöntemlerini Tanıma. *İnönü Üniversitesi Sağlık Hizmetleri Meslek Yüksekokulu Dergisi*, 5 (2): 44-53.
- Evans L C** (1997) *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence RI, 662 pp.
- Fadugba S E, Edogbanya O H and Zelibe S C** (2013) Crank Nicolson Method for Solving Parabolic Partial Differential Equations. *International Journal of Applied Mathematics and Modeling IJA2M*, 1(3): 8-23.
- Gölgeleyen İ** (2013) An Inverse Problem for a Generalized Transport Equation in Polar Coordinates and Numerical Applications. *Inverse problems*, 29 (9): 095006.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Gölgeleyen İ** (2011) Bazı İntegral Geometri Problemlerinin Çözülebilirliğinin ve Yaklaşık Çözümlerinin Araştırılması. *Doktora Tezi*, Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Zonguldak, 111 s.
- Kaya T, Adapınar B ve Özkan R** (1997) *Temel Radyoloji Tekniği*. Güneş & Nobel Tıp Kitabevleri, Bursa, 489 s.
- Kaya T** (2010) *Tıp Öğrencileri İçin Temel Radyoloji Fiziği*. Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir, 17 s.
- Kolehmainen V, Siltanen S, Jarvenpaa S, Kaipio J P, Koistinen P, Lassas M, Pirttila J and Somersalo E** (2003) Statistical Inversion for Medical X-ray Tomography with Few Radiographs II: Application to Dental Radiology. *Physics in Medicine and Biology*, 48: 1465-1490.
- Lavrent'ev M M, Romanov V G and Shishatskii S P** (1986) *Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*. American Mathematical Society, Providence RI, 290 pp.
- Liboff R L** (2003) *Kinetic Theory: Classical, Quantum, and Relativistic Descriptions*. 3rd ed. Springer-Verlag, New York, 571 pp.
- Markowich P, Ringhofer C and Schmeiser C** (1990) *Semiconductor Equations*. Springer-Verlag Wien, New York, 248 pp.
- Mikhailov V P** (1978) *Partial Differential Equations*. Mir Publishers, Moscow, 402 pp.
- Prilepko A I, Orlovsky D G and Vasin I A** (2000) *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*. Marcel Dekker, Inc., New York, 709 pp.
- Pöschel T and Brilliantov N** (Eds.) (2003) *Granular Gas Dynamics, Lecture Notes in Physics*. Vol. 624, Springer-Verlag, Berlin, 369 pp.
- Ramm A G** (2005) *Inverse Problems: Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering*. Springer Science & Business Media, Inc., Boston, 442 pp.
- Reddy B D** (1998) *Introductory Functional Analysis*. Springer-Verlag, New York, 471 pp.
- Siltanen S and Mueller J L** (2012) *Linear and Nonlinear Inverse Problem with Practical Applications*. SIAM, Philadelphia, 351 pp.
- Vladimirov V S** (1971) *Equations of Mathematical Physics*. Marcel Dekker, Inc., New York, 418 pp.
- Zhenglu J** (2002) On the Liouville Equation. *Transport Theory and Statistical Physics*, 31 (3): 267-272.

ÖZGEÇMİŞ

Muhammed HASDEMİR, 1983 yılında Kırıkkale Sulakyurt'ta doğdu. İlk ve orta öğrenimini Ankara'da tamamladı. 2003 yılında Afyon Kocatepe Üniversitesi Radyoloji Bölümü'nden mezun oldu. 2009 yılında Anadolu Üniversitesi İktisat Fakültesi Kamu Yönetimi Bölümü'nden mezun oldu. 2016 yılında Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimini tamamladı. Aynı yıl, Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans programına başladı. Halen Uzunmehmet Göğüs Hastalıkları ve Meslek Hastalıkları Hastanesi'nde radyoloji teknikeri olarak görev yapmaktadır. Ayrıca evli ve üç çocuk babasıdır.

ADRES BİLGİLERİ:

Adres : Uzunmehmet Göğüs Hastalıkları ve Meslek Hastalıkları Hastanesi Röntgen Birimi
Merkez / ZONGULDAK

Tel : (535) 550 87 47

E-posta : mhast12@gmail.com