



**T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ZAMANA GÖRE GECİKMELİ PSEUDO-PARABOLİK DENKLEM
İÇİN KARARLILIK EŞİTSİZLİKLERİ VE NÜMERİK ÇÖZÜMLER**

SEDA ÇATI TÜRK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. İLHAME AMİRALİ**

DÜZCE, 2020

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ZAMANA GÖRE GECİKMELİ PSEUDO-PARABOLİK DENKLEM
İÇİN KARARLILIK EŞİTSİZLİKLERİ VE NÜMERİK ÇÖZÜMLER**

Seda ÇATI TÜRK tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. İlhami AMİRALİ
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. İlhami AMİRALİ
Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. İsmet YILDIZ
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Mahmut AKYİĞİT
Sakarya Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 3 Eylül 2020

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

3 Eylül 2020

Seda ÇATI TÜRK

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Doç. Dr. İlhami AMİRALİ'ye en içten dileklerle teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca değerli katkılarını esirgemeyen kıymetli hocam Prof. Dr. Gabil AMİRALİ'ye de şükranlarımı sunarım.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme, eşime ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

3 Eylül 2020

Seda ÇATI TÜRK

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÇİZELGE LİSTESİ.....	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	5
2.1. TANIMLAR.....	5
3. PSEUDO-PARABOLİK BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMİ İÇİN KARARLILIK EŞİTSİZLİKLERİ	16
3.1. ÖRNEK.....	19
4. GECİKME TERİMİ İÇEREN PSEUDO-PARABOLİK DENKLEMLER İÇİN YÜKSEK MERTEBEDEN SONLU FARK METODU	20
4.1. DİSKRETİZASYON VE ŞEBEKE.....	24
4.1.1. Notasyon	24
4.2. FARK ŞEMASI	24
4.3. HATA DEĞERLENDİRMESİ	31
4.4. ÖRNEK.....	32
5. GECİKME TERİMİ İÇEREN PSEUDO-PARABOLİK BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMİ İÇİN KARARLILIK EŞİTSİZLİKLERİ	35
5.1. ÖRNEK.....	39
6. SONUÇLAR	40
7. KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ.....	44

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Çizelge 4.1. Sayısal sonuçlar $(0, 1) \times (0, 1)$	34
Çizelge 4.2. Sayısal sonuçlar $(0, 1) \times (1, 2)$	34



ÖZET

ZAMANA GÖRE GECİKMELİ PSEUDO-PARABOLİK DENKLEM İÇİN KARARLILIK EŞİTSİZLİKLERİ VE NÜMERİK ÇÖZÜMLER

Seda ÇATI TÜRK

Düzce Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. İlhami AMİRALİ

Eylül 2020, 43 sayfa

Bu çalışmada pseudo-parabolik ve gecikmeli pseudo-parabolik denklemler için başlangıç-sınır değer problemleri ele alınmıştır. Ele alınan problemler için başlangıç ve sağ taraf fonksiyonlarına göre kararlılık eşitsizlikleri elde edilmiştir. Daha sonra söz konusu problemlerin nümerik çözümlerinin bulunması için yüksek mertebeden sonlu fark metotları incelenmiş ve enerji eşitsizlikleri tekniği kullanılarak hata değerlendirmeleri elde edilmiştir. Teorik sonuçları destekleyen nümerik sonuçlar verilmiştir.

Anahtar sözcükler: Fark şeması, Hata eşitsizliği, Kararlılık eşitsizliği, Pseudo-parabolik denklem.

ABSTRACT

STABILITY INEQUALITIES AND THEIR NUMERICAL SOLUTIONS FOR PSEUDO-PARABOLIC EQUATIONS CONTAINING TIME-DELAY

Seda ÇATI TÜRK

Düzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Master Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İlhami AMİRALI

September 2020, 43 pages

This study deals with the initial boundary value problems for pseudo-parabolic and delay pseudo-parabolic equations. Stability inequalities in initial and right-side functions for the considered problems are obtained. Further, for the finding numerical solutions of handling problems, high order finite difference methods are studied and error estimates were obtained by using the energy inequalities technique. Numerical results are given to support the theoretical results.

Keywords: Difference scheme, Error estimate, Pseudo-parabolic equation, Stability inequality.

1. GİRİŞ

$\bar{Q} = \bar{\Omega} \times [0, T]$; $\bar{\Omega} = [0, l]$, $Q = \Omega \times (0, T]$, $\Omega = (0, l)$ aralığındaki gecikmeli pseudo-parabolik başlangıç-sınır değer problemini ele alalım:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a(t) \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t \partial x^2} = b(t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + c(t) u(x, t) + d(t) u(x, t - r) + f(x, t), (x, t) \in Q, \quad (1.1)$$

$$u(x, t) = \phi(x, t), (x, t) \in \bar{\Omega} \times [-r, 0], \quad (1.2)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, t \in (0, T], \quad (1.3)$$

burada $r > 0$ gecikme parametresi, $a \geq \alpha > 0$, b , c , d , f ve ϕ belirtilen regülerlik koşullarını sağlayan fonsiyonlardır.

(1.1)-(1.3) denklemlerine Sobolev denklemi veya pseudo-parabolik denklem denir. Bu denklemler sadece standart parabolik denklemlerin bir genellemesi olduğu için değil, doğada çok çeşitli uygulamalarda karşımıza çıktıkları için de ilgi çekicidirler. Pseudo-parabolik denklemlerle matematik ve fiziğin birçok alanında, örneğin; termodinamik sıcaklık ve iletken sıcaklık içeren ısı iletimi, gözenekli ortam akışları, çatlamış kayalardaki homojen sıvı akışı, topraktaki nem taşıma problemlerinde vs. karşılaşılmaktadır [1]-[5]. Pseudo-parabolik denklemler incelenirken çeşitli fark şemaları ortaya konmuştur [6]-[13]. Örneğin, [8]'de sınır katlarına sahip lineer pseudo-parabolik denklemler için başlangıç-sınır değer problemi incelenmiştir. Çalışmada uygun eksponansiyel fark şeması geliştirilmiş ve onların ayrık enerji değerlendirmeleri elde edilmiştir. Fark şeması, eksponansiyel baz fonsiyonları, ağırlık fonsiyonu ve kalan terimleri integral şeklinde olan interpolasyon kuadratür formülleri kullanılarak integral özdeşlikleri metoduyla kurulmuştur. [12]'de pseudo-parabolik Burger denkleminin çözümü için parçalı, lineer sonlu elemanlar metodu kullanılarak zamana göre açık ve kapalı diskretizasyon şemaları oluşturulmuştur. [7]'de ekstrapolasyon katsayılı Crank-Nicolson-Galerkin yaklaşımı, lineer olmayan pseudo-parabolik denklemlerin üç

durumu için, Galerkin metodunun her adımında karşılaşılan farklı lineer cebirsel denklem sistemlerini çözmek için kullanılan uygun eşlenik gradyan iterasyon yöntemi yardımıyla incelenmiştir. [9]'da yazarlar konveksiyon baskın terimli lineer Sobolev denklemleri için sonlu fark akış çizgisi difüzyon metodunun genişletmesini kullanarak, yapay difüzyon parametresine bağlı iki fark şeması sunmuşlardır. Bu şemalardan her biri iteratif prosedürden elde edilebilen tek çözüme sahiptir. [13]'de pseudo-parabolik denklemler için tek (bir) boyutlu başlangıç-sınır değer problemi incelenmiştir. Yazarlar, Shishkin şebekesinde zaman değişkenine göre kapalı şemayı ve düzgün şebekede uzay değişkenine göre sonlu fark diskretizasyonunu birleştiren nümerik metod (yöntem) geliştirmişlerdir. [14]-[16]'da pseudo-parabolik denklemlerin varlık ve tekliği tartışılmıştır.

Yukarıda bahsettiğimiz çalışmalar gecikme terimi bulunmayan pseudo-parabolik denklemlerle ilgiliydi. Gecikme parametresi bulunduran pseudo-parabolik denklemler de birçok yazar tarafından ele alınmıştır [17].

Gecikmeli kısmi diferansiyel denklemler, nüfus artışı, biyoloji, kontrol teorisi, mekanik ve diğer mühendislik alanlarında karşımıza çıkmaktadır. [18]-[19]'da gecikme terimlerinin sadece kesin çözümlerin dinamik özellikleri üzerinde büyük etkisinin olmadığı, aynı zamanda analitik çözümleri bulmada da zorluk oluşturduğu görülebilmektedir. Bu, teorik çalışmaların bazı eksikliklerinin giderilmesi için gecikmeli kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik olarak çözülebilmesini sağlayan çok iyi nümerik algoritmaların bulunması çalışmalarına yardımcı olmaktadır [20]-[22].

Gecikmeli kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleriyle ilgili birçok çalışma vardır. Gecikmeli pseudo-parabolik denklemlerin varlık-tekliği ve uygulamaları [23]-[24]'de ele alınmıştır. [25]'de tek boyutlu gecikmeli pseudo-parabolik başlangıç-sınır değer probleminin çözümü için dördüncü mertebeden diferansiyel fark şeması sunularak hata değerlendirmesi elde edilmiştir. Ayrıca ortaya çıkan diferansiyel fark probleminin realizasyonu için dördüncü mertebeden düzgünlüğe sahip Runge-Kutta metodu kullanılmıştır. [26]'da yazarlar quasilineer gecikmeli pseudo-parabolik denklemler için açık sonlu fark metodu sunarak, tamamen ayrık şemanın kesin kararlı ve uzay değişkenine göre ikinci, zaman değişkenine göre birinci mertebeden yakınsak olduğunu ispatlamışlardır.

Bu tez çalışmasında, zamana göre gecikmeli pseudo-parabolik denklemler için tek boyutlu başlangıç-sınır değer problemini incelenerek, bu problem için kararlılık eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Bu çalışmanın amacı, katsayılar uzay değişkeninden bağımsızken verilen problemin yaklaşımı için yüksek mertebeden fark metodu geliştirmektir. Enerji eşitsizlikleri metodu ve gecikme terimli Gronwall eşitsizliğinin fark benzeri kullanılarak tamamen ayrık şemanın uzaya göre dördüncü, zamana göre de ikinci mertebeden yakınsak olduğu gösterilmiştir. Teori nümerik örneklerle doğrulanmıştır.

Tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde konu ile ilgili literatür bilgisine yer verilmiştir. İkinci bölümde tez çalışmasında kullanılan genel bilgiler verilmiştir. Çalışmanın üçüncü bölümünde

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(t) \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = b(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(t)u + f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(x, 0) = \phi(x),$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad a(t) \geq \alpha > 0$$

pseudo-parabolik denklemini için $\bar{Q} = \bar{\Omega} \times [0, T]$; $\bar{\Omega} = [0, l]$, $Q = \Omega \times (0, T]$, $\Omega = (0, l)$ aralığında tanımlı başlangıç-sınır değer problemi ele alınmış ve problemin çözümü için bir değerlendirme elde edilerek nümerik sonuçlar verilmiştir. Dördüncü bölümde $\bar{Q} = \bar{\Omega} \times [0, T]$; $\bar{\Omega} = [0, l]$, $Q = \Omega \times (0, T]$, $\Omega = (0, l)$ aralığında verilmiş

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a(t) \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t \partial x^2} = b(t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + c(t)u(x, t) + d(t)u(x, t-r) + f(x, t), \quad (x, t) \in Q,$$

$$u(x, t) = \phi(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\Omega} \times [-r, 0],$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in (0, T]$$

(burada $r > 0$ gecikme parametresi, $a \geq \alpha > 0$, b , c , d , f ve ϕ verilmiş yeterince düzgün fonksiyonlardır) gecikmeli pseudo-parabolik denklem için başlangıç-sınır değer problemi ele alınmıştır. Problemin çözümü için yüksek mertebeden sonlu fark tekniği uygulanarak, teori nümerik sonuçlarla desteklenmiştir.

Beşinci bölümde

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a(t) \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t \partial x^2} = b(t) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + c(t) \frac{\partial^2 u(x,t-r)}{\partial x^2} + d(t)u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in Q,$$

$$u(x,t) = \phi(x,t), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad -r \leq t \leq 0,$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad a(t) \leq \alpha \leq 0$$

(burada $r > 0$ gecikmeli parametresi $a \geq \alpha > 0$, b , c , d , f ve ϕ belirtilen regülerlik koşullarını sağlayan fonksiyonlardır) lineer pseudo-parabolik denklem için başlangıç-sınır değer problemi incelenmiştir. Enerji eşitsizlikleri metodu kullanılarak verilen problem için kararlılık elde edilmiş ve uygun örnekler verilmiştir. Altıncı bölümde ise tez çalışmasında yararlanılan kaynaklar verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. TANIMLAR

Diferansiyel Denklemler

Fen bilimleri ve mühendislikte, birçok olayın açıklanmasına yardımcı olmak üzere, matematiksel formüller veya matematiksel modeller geliştirilir. Bu modeller, bir bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun bazı türevlerini içeren bir denklem olarak ortaya çıkar. Böyle denkleme diferansiyel denklem denir [27].

Adi Diferansiyel Denklem

Bir diferansiyel denklemde bilinmeyen fonksiyon yalnız bir bağımsız değişkene bağlı ise bu denkleme adi diferansiyel denklem denir.

Kısmi Diferansiyel Denklem

Eğer diferansiyel denklem bir tek bağımlı değişkenin iki veya daha fazla sayıda bağımsız değişken cinsinden türevlerini içeriyorsa bu diferansiyel denkleme kısmi diferansiyel denklem denir.

Parabolik, Hiperbolik, Eliptik Denklemler

İkinci mertebeden lineer denklem

$$A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + H(x, y, z, z_x, z_y) = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde dir. Burada $A, B, C \in D^2[D]$ ' dir. Diğer yandan

$$\Delta(x, y) := [B(x, y)]^2 - 4A(x, y)C(x, y)$$

olsun. O halde (2.1) denklemi

$$\Delta(x, y) > 0$$

ise hiperbolik,

$$\Delta(x, y) = 0$$

ise parabolik,

$$\Delta(x, y) < 0$$

ise eliptik tiptendir denir.

Lineer Denklem

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y^1 + a_0(x)y = b(x)$$

şeklindeki denkleme n . mertebeden lineer denklem denir. $b(x) = 0$ ise denkleme homojen lineer denklem denir.

Başlangıç ve Sınır Değer Problemi

Eğer bir diferansiyel denklemde şartlar, bağımsız değişkenin sadece bir tek değeri için fonksiyonun kendisinin ve bazı türev değerlerinin verilmesi şeklinde ise, başlangıç şartları, bağımsız değişkenin seçilmiş birden fazla değeri için fonksiyonun ya da türevlerinin değerlerinin verilmesi şeklinde ise, sınır şartları olarak adlandırılır. Bir diferansiyel denklemin başlangıç şartlarına uygun çözümünün bulunması problemine başlangıç-değer problemi, sınır şartlarını sağlayan çözümünün bulunmasına ise sınır-değer problemi denir.

Şebeke ve Şebeke Fonksiyonu

Düzgün Şebeke

$[0, l]$ aralığında tanımlanan düzgün şebeke

$$\bar{\omega}_h = \left\{ x_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, N; h = \frac{l}{N} \right\}$$

şeklinde dir. Burada h şebeke adımı, x_i -şebeke düğümü, $y = y_i = y(x_i)$, $\bar{\omega}_h$ 'da tanımlı şebeke fonksiyonudur.

Düzgün Olmayan Şebeke

ω_N , $[0, l]$ tanımlı herhangi bir düzgün olmayan şebeke

$$\bar{\omega}_N = \{0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = l\}$$

ve $\bar{\omega}_N = \omega_N \cup \{x = 0\}$ olsun. Her $i \geq 1$ için $h_i = x_i - x_{i-1}$ şebeke adımıdır.

Fark Türevleri

$[0, l]$ aralığında tanımlı $u(x)$ fonksiyonun düzgün şebeke için fark türevleri aşağıdaki gibidir[28]:

1. $u_{x,i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$; $u(x)$ fonksiyonunun x_i noktasındaki ileri fark türevi,
2. $u_{\bar{x},i} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$; $u(x)$ fonksiyonunun x_i noktasındaki geri fark türevi,
3. $u_{\circ x,i} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$; $u(x)$ fonksiyonunun x_i noktasındaki merkezi fark türevi,
4. $u_{\bar{x}x,i} = \frac{u_{x,i} - u_{\bar{x},i}}{h} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$; $u(x)$ fonksiyonunun x_i noktasındaki ikinci mertebeden merkezi fark türevi.

Ayrık Maksimum Norm

$$\bar{\omega}_h = \left\{ x_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, N; h = \frac{l}{N} \right\}$$

şebekesinde tanımlı ayrık maksimum norm

$$\|y\|_{\infty} \equiv \|y\|_{\infty, \bar{\omega}_h} \equiv \|y\|_{C(\bar{\omega}_h)} = \max_{0 \leq i \leq N} |y(x_i)|$$

şeklindedir.

Süreklili Maksimum Norm

$[0, l]$ aralığındaki sürekli maksimum norm

$$\|u\|_{\infty} \equiv \|u\|_{\infty, [0, l]} \equiv \|u\|_{C[0, l]} = \max_{0 \leq x \leq l} |u(x)|$$

şeklindedir.

Öklid normu

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vektörü için Öklid norm

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

L_2 -iç çarpımı ve $\|u, v\| \in L_2(0, l)$ için

$$(u, v) = \int_0^l u(x)v(x)dx$$

ve

$$\|u\|_2 = \left(\int_0^l u(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklindedir.

Düzgün Yakınsaklık

$u(x)$ diferansiyel problemin çözümü, y_i uygun fark probleminin çözümü, $\|\cdot\|$ da belli bir şebeke normu olsun. Eğer h 'dan bağımsız bir C sabiti için

$$\|y - u\| \leq Ch^p, \quad p > 0$$

şeklinde bir eşitsizlik söz konusu ise, bu durumda yaklaşık çözüm kesin çözüme $O(h^p)$ hızıyla *yakınsaktır* denir.

Kararlılık

Lineer

$$Lu = f(x), \quad x \in G \tag{2.2}$$

denkleminin

$$lu = \mu(x), \quad x \in \Gamma \tag{2.3}$$

şartını sağlayan çözümünü bulalım. Burada $f(x)$, $\mu(x)$ belirli fonksiyonlar, l diferansiyel operatördür.

$$\bar{G} = G \cup \Gamma$$

bölgesinde herhangi bir

$$\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$$

şebekesinin oluşturulduğu varsayalım. (2.2)-(2.3) problemine karşılık gelen fark problemi

$$L_h y = \varphi_h, \quad x \in \omega_h \quad (2.4)$$

$$l_h y = \chi_h, \quad x \in \gamma_h \quad (2.5)$$

şeklindedir. Bu problemin belli sınırlardan olan her bir φ_h , χ_h başlangıç veri fonksiyonları ve yeteri kadar küçük $h \leq h_0$ için bir tek çözüme sahip olduğunu varsayalım. (2.2)-(2.3) probleminin başlangıç veri fonksiyonları $\bar{\varphi}_h$, $\bar{\chi}_h$ olan çözümü $\bar{y}$ ile belirlensin. Yeteri kadar küçük h için

$$\|\bar{y} - y\|_1 = C_1 \|\bar{\varphi}_h - \varphi_h\|_2 + C_2 \|\bar{\chi}_h - \chi_h\|_3$$

eşitsizliği varsa, yani (2.4)-(2.5) varsa fark şeması sağ tarafa ve sınır şartına göre *kararlıdır* denir. Kararlılık, fark şemasının çözümünün başlangıç veri fonksiyonlarına sürekli şekilde bağlı olduğunu, hem de bu bağlılığın h 'a göre düzgün olduğunu ifade eder.

Kuadratr Formülleri

Fark şemalarının kurulmasında ve incelemesinde aşağıdaki kuadratr formülleri kullanılacaktır [29] .

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \left[\int_a^b p(x)dx \right] \{ \sigma f(b) + (1 - \sigma)f(a) \} + f[a, b] \int_a^b \left(x - x^{(\sigma)} \right) p(x)dx + R_n(f),$$

burada σ reel parametre, $p(x) \in C[a, b]$ ağırlık fonksiyonu, f belirli bir fonksiyondur.

$$R_n(f) = \int_a^b p(x)dx \int_a^b f^n(\xi) K_{n-1}(x, \xi) d\xi, \quad f \in C^n, \quad n = 1 \text{ veya } 2 \quad (2.6)$$

$$K_s(x, \xi) = T_s(x - \xi) - (b - a)^{-1}(x - a)(b - \xi)^s, \quad s = 0, 1$$

$$x^{(\sigma)} = \sigma b + (1 - \sigma)a, \quad f[a, b] = (f(b) - f(a))/(b - a)$$

$$T_s(\lambda) = \lambda^s/s!, \quad \lambda \geq 0; \quad T_s(\lambda) = 0, \quad \lambda < 0$$

$$\int_a^b p(x)f'(x)dx = f[a,b] \int_a^b p(x)dx + R_n^*(f),$$

$$R_n^*(f) = - \int_a^b p'(x)dx \int_a^b f^n(\xi)K_{n-1}(x,\xi)d\xi, \quad f \in C^n, \quad n = 1 \text{ veya } 2 \quad (2.7)$$

$$R_n^*(f) = - \int_a^b p(x)dx \int_a^b f''(\xi)K_0(\xi,x)d\xi, \quad f \in C^2. \quad (2.8)$$

(2.7)-(2.8) formüllerinde aynı $K_s(x, \xi)$ fonksiyonunun bulunduğunu belirtelim.

Ayrıca

$$K_0(a, \xi) = K_0(b, \xi) = 0,$$

$$K_1(a, \xi) = K_1(b, \xi) = K_1(x, a) = K_1(x, b) = 0,$$

$$K_1(x, \xi) = K_1(\xi, x),$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} K_1(x, \xi) = -K_0(x, \xi), \quad \frac{\partial}{\partial \xi} K_1(x, \xi) = -K_0(\xi, x)$$

olduğu kolayca görülebilir.

Bazı uygulamalarda (2.6) formülü, sağ tarafındaki ikinci terime kalan terimin dahil edilmiş aşağıdaki şekliyle kullanılmaktadır:

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \left[\int_a^b p(x)dx \right] \{ \sigma f(b) + (1 - \sigma)f(a) \} + \bar{R}_n(f),$$

burada

$$\bar{R}_n(f) = f[a,b] \int_a^b \left(x - x^{(\sigma)} \right) p(x) + R_n(f).$$

$n = 0$ durumu için $\bar{R}_n(f)$ kalan terimi, daha kısa şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\bar{R}_n(f) = \int_a^b dx p(x) \int_a^b f'(\xi) [T_0(x - \xi) - \sigma] d\xi.$$

Ayrıca $n = 0$, $p(x) = 1$ için

$$\bar{R}_1(f) = \int_a^b f'(\xi) [b - \xi - \sigma(b - a)] d\xi$$

olur. $p(x) \equiv 1$ için

$$\bar{R}_n(f) = (b-a)^2 \left(\frac{1}{2} - \sigma \right) f[a, b] + \int_a^b \left[\frac{(b-\xi)^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{1}{2}(b-\xi)^n(b-a) \right] f^{n+1}(\xi) d\xi$$

ve

$$n = 1, \sigma = \frac{1}{2}, p(x) = 1$$

durumu için

$$\bar{R}_n(f) = \frac{1}{2} \int_a^b f''(\xi) [(a-\xi)(b-\xi)] d\xi$$

yazılabilmektedir.

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = \left(\int_a^b p(x)dx \right) f(x^{(\sigma)}) + R_n,$$

burada

$$\begin{aligned} R_n &\equiv \int_a^b p(x)dx \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) K_n^*(x, \xi) d\xi + n f'(x^{(\sigma)}) \int_a^b (x-x^{(\sigma)}) p(x) dx \\ &\equiv \int_a^b p(x)dx \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) \bar{K}_n^*(x, \xi) d\xi + n f[a, b] \int_a^b (x-x^{(\sigma)}) p(x) dx, \quad n = 0, 1 \end{aligned}$$

$$K_n^*(x, \xi) = (x-\xi)^n \left[T_0(x-\xi) - T_0(x^{(\sigma)}-\xi) \right],$$

$$\bar{K}_n^*(x, \xi) = K_n^*(x, \xi) - n \left(x-x^{(\sigma)} \right) K_0 \left(\xi, x^{(\sigma)} \right)$$

olduğundan

$$R_n \equiv T_n(x-\xi) - T_n \left(x^{(\sigma)} - \xi \right) - n(b-a)^{-1}(b-\xi)^n \left(x^{(\sigma)} - x \right)$$

olur. Asimptotik değerlendirmelerin bulunmasında bazen aşağıdaki diferansiyelleme formülünden yararlanılır:

$$g'(x) = g(\alpha_0; \alpha_1) - \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} K_0(\xi, x) g''(\xi) d\xi, \quad g \in C^2, \quad \alpha_0 \leq x \leq \alpha_1.$$

Klasik Fark Şeması

Lineer problem için fark şeması bir lineer cebirsel denklem sistemidir.

Herhangi bir fark probleminin uygulanmasında aşağıdaki aşamalar söz konusu oluyor:

1. Fark şemasının kurulması,
2. Ele alınan problemin çözümünün varlığı ve tekliği,
3. Fark şemasının kararlılığı,
4. Fark probleminin yakınsaklığı ve yakınsama hızının belirlenmesi,
5. Fark problemi için uygun bir realizasyon algoritmasının belirlenmesi.

Fark şemasının önemli özelliklerinden biri diferansiyel problemin sağladığı özelliklerin ayrık benzerini sağlamasıdır.

Sonlu Fark Yöntemleri

Diferansiyel denklemlerin sonlu farklar metodu ile çözümünde klasik fark şemalarının düzgün şebekedeki uygulanması kapalı bölgede kesin çözümün belli türevlerinin sınırlı olmasını gerektirir. Fakat aşağıda belirtilen örnekler dahil, bazı durumlarda birinci türevler bile genelde sınırlı olmayabilir. Bu nedenle de klasik fark şemalarının düzgün şebekede uygulanışı ya kararsız ya da ıraksak olabilir. Verilen bir diferansiyel problemde türevlerin belli bir yolla fark problemine dönüştürülmesi sonucu elde edilen metoda sonlu fark metodu denir.

Euler Şeması

Birinci mertebeden

$$\varepsilon u' + f(x, u) = 0, \quad 0 < x < l$$

$$u(0) = A$$

başlangıç-değer problemi için klasik fark şemalarını ele alalım.

Burada $u(x)$ çözüm, $f(x, u)$ verilen fonksiyon, A sabit ve $\frac{\partial f}{\partial u} \geq a > 0$.

Açık Euler Şeması

$$\varepsilon \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + f(x_i, y_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

$$y_0 = A$$

şeklindedir.

Burada y_i , x_i düğüm noktalarındaki yaklaşık çözümdür. Bu şemanın kapalı aralıkta yakınsak olabilmesi için $|u''(x)| \leq C$ olmalıdır. Fakat biz, kapalı aralıkta birinci türevlerin bile sınırsız olduğunu biliyoruz.

Kapalı Euler Şeması

$$\varepsilon \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + f(x_i, y_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

$$y_0 = A$$

şeklindedir. Bu her bir i için bir nonlinear skaler denklemdir ve nonlinear eşitlikler için uygun algoritma uygulanarak çözülebilir. Bu şema mutlak kararlıdır, fakat yakınsak değildir. Yakınsak olması için şemanın kararlı ve kalan teriminin sıfıra gitmesi gerekmektedir.

Cranck-Nicolson Şeması

$$\varepsilon \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + \frac{1}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i-1}, y_{i-1})] = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

şeklindedir.

Bu şemanın hatası daha az, kararlılık performansı ve kesinliği daha yüksektir.

Üstel Katsayılı Fark Şemaları

$$\varepsilon u'(x) + a(x)u = f(x)$$

$$u(0) = A$$

başlangıç-değer problemine karşılık kurulan

$$L_N y_i = \varepsilon \theta_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + a_i y_i = f_i, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\theta_i = \frac{\rho a_i}{1 - \exp(-\rho a_i)}, \quad \rho = \frac{h}{\varepsilon}$$

fark şeması küçük parametreye göre düzgün yakınsak şemadır. Yaklaşım hatası R_i ($Lu_i + R_i = f_i$)

$$R_i = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [a(x) - a(x_i)] u(x) \varphi_i(x) dx + \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_i)] \varphi_i(x) dx$$

şeklindedir. Burada baz fonksiyonları

$$\varphi_i(x) = \exp \left\{ -\frac{a_i}{\varepsilon} (x_i - x) \right\}, \quad i = 1, \dots, N$$

şeklindedir. Hata değerlendirmesi için

$$\|y - u\| \leq Ch$$

eşitsizliği doğrudur.

Gronwall Eşitsizliği

Verilmiş sürekli $p(t)$ fonksiyonu için $v(t)$ fonksiyonu

$$v(t) \leq C + \int_0^t p(s) v(s) ds, \quad p(t) \geq 0, \quad C = sbt$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda

$$v(t) \leq C e^{\int_0^t p(s) ds}$$

olur.

$$v(t) \leq g(t) + \int_0^t h(\tau) v(\tau) d\tau$$

(burada $g(t)$ ve $h(t) \geq 0$ sürekli) ise, bu durumda

$$v(t) \leq g(t) + \int_0^t g(\tau)h(\tau)e^{\int_0^t h(s)ds} d\tau$$

olur. Ayrıca eğer $g(t)$ azalmayan ise

$$v(t) \leq g(t)e^{\int_0^t h(s)ds}$$

olur.

μ -eşitsizliği

$$|ab| \leq \mu a^2 + \frac{1}{4\mu} b^2, \quad \mu > 0.$$

Ortalama Değer Teoremi

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli ve $g(x)$ bu aralıkta pozitif ise bu durumda

$$\int_a^b f(x)g(x) = f(c) \int_a^b g(x)$$

olacak biçimde bir $c \in [a, b]$ noktası vardır.

3. PSEUDO-PARABOLİK BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMİ İÇİN KARARLILIK EŞİTSİZLİKLERİ

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(t) \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = b(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(t)u + f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad (3.2)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad a(t) \geq \alpha > 0 \quad (3.3)$$

pseudo-parabolik denklemi için $\bar{Q} = \bar{\Omega} \times [0, T]$; $\bar{\Omega} = [0, l]$, $Q = \Omega \times (0, T]$, $\Omega = (0, l)$ aralığında tanımlı başlangıç-sınır değer problemini ele alalım ve bu problemin çözümü için bir değerlendirme elde edelim (burada $r > 0$ gecikmeli parametresi, $a \geq \alpha > 0$, b , c , d , f ve ϕ belirtilen regülerlik koşullarını sağlayan yeterince düzgün fonsiyonlardır).

Teorem 3.1. a , b , $c \in C[0, T]$, $f \in C(\bar{Q})$ ve $\phi \in C^1(\bar{\Omega})$ olsun (3.1)-(3.3) başlangıç-sınır değer probleminin çözümü için aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur:

$$\alpha \|u\|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 = 2 \left(\alpha \|\phi\|^2 + \|\phi'\|^2 + 2\alpha T \int_0^T \|f\|^2 ds \right) e^{c_0 t} \quad (3.4)$$

burada $c_0 = T \max(4\bar{c}^2, 2\bar{b}^2)$.

İspat. Aşağıdaki özdeşlikle başlayalım:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) - a(t) \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) &= b(t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ &+ c(t) \left(u, \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \left(f(t), \frac{\partial u}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Her bir terim için

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) &= \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2, \\ \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) = \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right\|^2, \end{aligned}$$

$$\left| b(t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right| = \left| b(t) \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) \right| \leq \mu_1 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right\|^2 + \frac{b^2(t)}{4\mu_1} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2,$$

$$\left| c(t) \left(u, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right| \leq \mu_2 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \frac{c^2(t)}{4\mu_2} \|u\|^2,$$

ve

$$\left| f(t), \frac{\partial u}{\partial t} \right| \leq \mu_3 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \frac{1}{4\mu_3} \|f\|^2$$

ifadelerini yazabiliriz. Bu ifadeleri (3.5)'de yerine koyarsak

$$(1 - \mu_2 - \mu_3) \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + (a(t) - \mu_1) \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right\|^2 \leq \frac{b^2(t)}{4\mu_1} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 + \frac{c^2(t)}{4\mu_2} \|u\|^2 + \frac{1}{4\mu_3} \|f\|^2$$

elde ederiz.

Bu eşitsizlikte $\mu_1 = \frac{\alpha}{2}$, $\mu_2 = \mu_3 = \frac{1}{4}$ seçilirse

$$\frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \frac{\alpha}{2} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right\|^2 \leq \frac{\bar{b}^2}{2\alpha} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 + \bar{c}^2 \|u\|^2 + \|f\|^2 \quad (3.6)$$

olur, burada $\bar{b} = \max_{[0,T]} |b(t)|$, $\bar{c} = \max_{[0,T]} |c(t)|$. (3.6) denklemini düzenlendiğinde

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \alpha \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right\|^2 \leq \frac{\bar{b}^2}{\alpha} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 + 2\bar{c}^2 \|u\|^2 + 2\|f\|^2 \quad (3.7)$$

elde edilir. (3.7) eşitsizliğinin $(0, t)$ aralığında integralini alıp

$$g(t) = g(0) + \int_0^t g'(s) ds$$

özdeşliği ve

$$(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$$

eşitsizliğini kullanırsak

$$g^2(t) \leq 2g^2(0) + 2 \left(\int_0^t g'(s) ds \right)^2$$

olur.

Burada da

$$\left(\int_b^a f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_b^a f^2(x)dx \int_b^a g^2(x)dx$$

eşitsizliğini kullanırsak,

$$g^2(t) \leq 2g^2(0) + 2 \left(\int_0^t g'(s)ds \right)^2 \leq 2g^2(0) + 2t \int_0^t |g'(s)|^2 ds \leq 2g^2(0) + 2T \int_0^t |g'(s)|^2 ds$$

buluruz.

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 ds \geq \frac{1}{2T} \|u\|^2 - \frac{1}{T} \|\phi\|^2$$

ve

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right\|^2 ds \geq \frac{1}{2T} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 - \frac{1}{T} \|\phi'\|^2$$

eşitsizliklerini (3.7)'de yerine yazalım:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} \|u\|^2 + \frac{1}{2\alpha T} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 &\leq \frac{1}{T} \|\phi\|^2 + \frac{1}{\alpha T} \|\phi'\|^2 + 2\bar{c}^2 \int_0^t \|u\|^2 ds \\ &\quad + \frac{\bar{b}^2}{\alpha} \int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 ds + 2 \int_0^t \|f\|^2 ds. \end{aligned}$$

Bu ifadeyi $2\alpha T$ ile çarparsak,

$$\alpha \|u\|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 \leq 4\alpha T \bar{c}^2 \int_0^t \|u\|^2 ds + 2T \bar{b}^2 \int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 ds + A$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada

$$A = 2\alpha \|\phi\|^2 + 2\|\phi'\|^2 + 4\alpha T \int_0^t \|f\|^2 ds,$$

$$\delta(t) = \alpha \|u\|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2$$

olsun. O halde

$$\delta(t) \leq A + c_0 \int_0^t \delta(s) ds.$$

Gronwall eşitsizliğine göre

$$\delta(t) \leq A e^{c_0 t}$$

olur. Buradan (3.4)'ün doğruluğu kolayca görülür. □

3.1. ÖRNEK

$$\frac{\partial u}{\partial x} - (1+t)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = e^{-t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + tu + t \sin \pi x, \quad 0 < t < 1, \quad 0 < x < 1$$

$$u(x, 0) = \sin \pi x$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

başlangıç-sınır değer problemi için bir değerlendirme elde edelim.

Çözüm. Burada $\alpha = 1$, $\phi(x) = \sin \pi x$, $\phi'(x) = \pi \cos \pi x$. Bu denklemin kesin çözümü $f(x, t) = t \sin \pi x$ şeklindedir.

Ayrıca $b(t) = e^{-t}$, $c(t) = t$, $\bar{b} = 1$, $\bar{c} = 1$, $T = 1$, $c_0 = \max(4, 2) = 4$.

Aşağıdakileri yazabiliriz:

$$\|\phi\|^2 = \int_0^1 \sin^2 \pi x dx = \int_0^1 \frac{1 - \cos 2\pi x}{2} dx = \frac{1}{2},$$

$$\|\phi'\|^2 = \pi^2 \int_0^1 \frac{1 + \cos 2\pi x}{2} dx = \frac{\pi^2}{2},$$

$$\int_0^1 \|f\|^2 dt = \int_0^1 \int_0^1 t^2 \sin^2 \pi x dx dt = \frac{1}{6}.$$

Bu ifadeleri (3.4) denkleminde yerine yazarsak

$$\|u\|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 \leq 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{3} \right) e^{4t} = \left(\pi^2 + \frac{5}{3} \right) e^{4t}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

elde ederiz.

4. GECİKME TERİMİ İÇEREN PSEUDO-PARABOLİK DENKLEMLER İÇİN YÜKSEK MERTEBEDEN SONLU FARK METODU

Bu bölümde $\bar{Q} = \bar{\Omega} \times [0, T]$; $\bar{\Omega} = [0, l]$, $Q = \Omega \times (0, T]$, $\Omega = (0, l)$ bölgesinde tanımlı aşağıdaki gecikmeli pseudo-parabolik diferansiyel denklem için başlangıç-sınır değer probleminin yüksek mertebeden sonlu fark metoduyla çözümünü ele aldık:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a(t) \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t \partial x^2} &= b(t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + c(t) u(x, t) \\ &+ d(t) u(x, t - r) + f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$u(x, t) = \phi(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\Omega} \times [-r, 0], \quad (4.2)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in (0, T], \quad (4.3)$$

burada $r > 0$ gecikme parametresi, $a \geq \alpha > 0$, b , c , d , f ve ϕ belirtilen regülerlik koşullarını sağlayan yeterince düzgün fonsiyonlardır.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) - a(t) \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) &= b(t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) + c(t) \left(u, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ &+ d(t) \left(u(x, t - r), \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \left(f, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

özdeşliğinde

$$- \left(\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t \partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right\|^2$$

ve

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) = - \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)$$

olarak düzenleyelim.

$$|b(t)| \leq b^*, \quad |c(t)| \leq c^*, \quad |d(t)| \leq d^*$$

olsun. μ - eşitsizliği kullanılırsa,

$$\left| b(t) \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) \right| \leq \mu_1 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right\|^2 + \frac{1}{4\mu_1} (b^*)^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2,$$

$$\left| c(t) \left(u, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right| \leq \mu_2 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \frac{1}{4\mu_2} (c^*)^2 \|u\|^2,$$

$$\left| d(t) \left(u(x, t-r), \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right| \leq \mu_3 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \frac{1}{4\mu_3} (d^*)^2 \|u(x, t-r)\|^2,$$

$$\left| \left(f, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right| \leq \mu_4 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \frac{1}{4\mu_4} \|f\|^2$$

elde edilir. (4.4)'den

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + a(t) \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right\|^2 &\leq \mu_1 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right\|^2 + \frac{1}{4\mu_1} (b^*)^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 + \mu_2 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 \\ &+ \frac{1}{4\mu_2} (c^*)^2 \|u\|^2 + \mu_3 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \frac{1}{4\mu_3} (d^*)^2 \|u(x, t-r)\|^2 + \mu_4 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \frac{1}{4\mu_4} \|f\|^2, \\ (1 - \mu_2 - \mu_3 - \mu_4) \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + (a(t) - \mu_1) \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right\|^2 &\leq \frac{1}{4\mu_1} (b^*)^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 \\ &+ \frac{1}{4\mu_2} (c^*)^2 \|u\|^2 + \frac{1}{4\mu_3} (d^*)^2 \|u(x, t-r)\|^2 + \frac{1}{4\mu_4} \|f\|^2 \end{aligned}$$

yazabiliriz.

$$a(t) \leq \alpha, \quad \mu_1 = \frac{\alpha}{4}, \quad \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 < 1, \quad \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \frac{1}{4}$$

seçelim:

$$\frac{1}{4} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \frac{\alpha}{2} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right\|^2 \leq \frac{1}{4\alpha} (b^*)^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 + (c^*)^2 \|u\|^2 + (d^*)^2 \|u(x, t-r)\|^2 + \|f\|^2.$$

Herhangi bir türevlenebilir $v(t)$ fonksiyonu için

$$v(t) = v(0) + \int_0^t v'(s) ds$$

eşitliğini yazabiliriz. Her iki tarafın karesini alırsak,

$$|v(t)|^2 \leq 2v^2(0) + 2 \left(\int_0^t v'(s) ds \right)^2 \leq 2v^2(0) + 2t \int_0^t |v'(s)|^2 ds \leq 2v^2(0) + 2T \int_0^t |v'(s)|^2 ds,$$

eşitsizliğini elde ederiz. İntegral için Cauchy eşitsizliğini uygularsak,

$$\int_0^t |v'(s)|^2 ds \geq \frac{1}{2T} |v(t)|^2 - \frac{1}{T} |v(0)|^2$$

elde ederiz. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \frac{\alpha}{2} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right\|^2 &\leq \frac{1}{4\alpha} (b^*)^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 + (c^*)^2 \|u\|^2 + (d^*)^2 \|u(\cdot, t-r)\|^2 + \|f\|^2, \\ \frac{1}{8T} \|u\|^2 - \frac{1}{4T} \|\varphi\|^2 + \frac{\alpha}{4T} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 - \frac{\alpha}{2T} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2\alpha} (b^*)^2 \int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 ds + (c^*)^2 \int_0^t \|u\|^2 ds + (d^*)^2 \int_0^t \|u(\cdot, t-r)\|^2 ds + \int_0^t \|f\|^2 ds \end{aligned}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Buradan

$$\delta(t) = \frac{1}{8T} \|u\|^2 + \frac{\alpha}{4T} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2,$$

$$\delta(t) \leq c_0 + \int_0^t (c_1 \delta(s) + c_2 \delta(s-r)) ds,$$

$$\delta(t) \leq \frac{1}{4T} \|\varphi\|^2 + \frac{\alpha}{2T} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\|^2 + \left(\int_0^t (c_1 \delta(s) + c_2 \delta(s-r)) ds \right) + \int_0^t \|f\|^2 ds \quad (4.5)$$

olur. Burada

$$c_0 = \frac{1}{4T} \|\varphi\|^2 + \frac{\alpha}{2T} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\|^2 + \int_0^t \|f\|^2 ds,$$

$$c_1 = \max \left\{ \frac{2T}{\alpha^2} (b^*)^2, 8T(c^*)^2 \right\},$$

$$c_2 = 8T(d^*)^2.$$

Ayrıca eğer $g(t)$ azalmayan ise

$$v(t) \leq g(t) e^{\int_0^t h(s) ds} \quad (4.6)$$

olur. (4.5)-(4.6)'dan

$$\delta(t) \leq c_0 + \int_0^t c_2 \delta(s-r) ds + \int_0^t \left[c_0 + \int_0^t c_2 \delta(\tau-r) d\tau \right] c_1 e^{\int_\tau^t c_1 ds} d\tau,$$

$$\delta(t) \leq \left(c_0 + c_2 \int_0^t \delta(s-r) ds \right) e^{c_1(t-\tau)} \leq c_0 e^{c_1 T} + c_2 e^{c_1 T} \int_0^t \delta(s-r) ds$$

elde ederiz. $s-r = \eta$ dersek, $ds = d\eta$ olur. Buradan

$$\delta(t) \leq c_0 e^{c_1 T} + c_2 e^{c_1 T} \int_{-r}^{t-r} \delta(\eta) d\eta, \quad t \leq r,$$

$$\delta(t) \leq c_0 e^{c_1 T} + c_2 e^{c_1 T} \int_{-r}^0 \delta(\eta) d\eta + c_2 e^{c_1 T} \int_0^{t-r} \delta(\eta) d\eta$$

elde edilir.

$$c_2 e^{c_1 T} \int_0^{t-r} \delta(\eta) d\eta \leq c_2 e^{c_1 T} \int_0^t \delta(\eta) d\eta$$

olduğu bilindiğinden

$$\delta(t) \leq \delta_0 + c_2 e^{c_1 T} \int_0^t \delta(\eta) d\eta \tag{4.7}$$

yazılabilir. Burada

$$\delta_0 = c_0 e^{c_1 T} + c_2 e^{c_1 T} \int_{-r}^0 \left(\frac{1}{4T} \|\varphi\|^2 + \frac{\alpha}{2T} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\|^2 \right) d\eta.$$

(4.7)'de Gronwall eşitsizliği kullanılırsa,

$$\delta(t) \leq \delta_0 \exp(c_2 \exp(c_1 T) t)$$

bulunur. Bu da teoremin doğruluğunu kanıtlar.

4.1. DİSKRETİZASYON VE ŞEBEKE

4.1.1. Notasyon

$\omega = \omega_N \times \omega_{N_0}$ olmak üzere aşağıdaki şebekeleri tanımlayalım:

$$\omega_N = \{x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N-1, h = l/N\},$$

$$\omega_{N^+} = \omega_N \cup \{x_N = l\}, \quad \bar{\omega}_N = \omega_N \cup \{x_0 = 0, x_N = l\},$$

$$\omega_{N_0} = \{t_j = j\tau, j = 1, 2, \dots, N_0, \tau = T/N_0 = r/n_0\},$$

$$\bar{\omega}_{N_0} = \omega_{N_0} \cup \{t_0 = 0\}, \quad \bar{\omega} = \bar{\omega}_N \times \bar{\omega}_{N_0},$$

$$\omega_{n_0} = \{t_j = j\tau, j = 1, 2, \dots, n_0, \tau = r/n_0\},$$

$$\omega_{n_0^-} = \{t_j = j\tau, j = -n_0, \dots, 0, \tau = r/n_0\}.$$

$\bar{\omega}$ şebekesinde herhangi bir v_i^j şebeke fonksiyonu için aşağıdaki fark türevlerini ve gösterimleri tanımlayalım:

$$v_{\bar{x},i}^j = \frac{v_i^j - v_{i-1}^j}{h}, \quad v_{\bar{x}\bar{x},i}^j = \frac{v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j}{h^2}, \quad v_{\bar{t},i}^j = \frac{v_i^j - v_i^{j-1}}{\tau},$$

$$v_{\bar{t}\bar{t},i}^j = \frac{v_i^{j+1} - 2v_i^j + v_i^{j-1}}{\tau^2}, \quad v_i^{(0.5)j} = \frac{v_i^j + v_i^{j-1}}{2}, \quad v_i^{j-0.5} = v(x_i, t_j - \frac{\tau}{2}).$$

v_i ve w_i şebeke fonksiyonları için aşağıdaki iç çarpım ve normu tanımlayalım:

$$(v, w) = \sum_{i=1}^{N-1} h v_i w_i, \quad \|v\|^2 = (v, v), \quad (v_0 = 0, v_N = 0).$$

4.2. FARK ŞEMASI

Fark şemasını oluşturmak için, herhangi bir $g(x) \in C^6(\bar{\Omega})$ için geçerli olan aşağıdaki eşitliği kullanacağız:

$$\frac{1}{12} [g''(x_{i+1}) + 10g''(x_i) + g''(x_{i-1})] = g_{\bar{x}\bar{x},i} + \bar{R}_i, \quad (4.8)$$

burada

$$\bar{R}_i = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\partial^6 g}{\partial x^6}(\xi) \Lambda(\xi) d\xi = \frac{h^4}{240} \frac{\partial^6 g}{\partial x^6}(\xi_i),$$

$$\Lambda(\xi) = \begin{cases} \frac{h}{72} (x_{i+1} - \xi)^3 - \frac{h^{-1}}{120} (x_{i+1} - \xi)^5, & \xi > x_i \\ \frac{h}{72} (\xi - x_{i-1})^3 - \frac{h^{-1}}{120} (\xi - x_{i-1})^5, & \xi < x_i \end{cases}, \quad \xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$$

olduğu biliniyor.

$$f(x) = \frac{\partial^6 g}{\partial x^6}(\xi), \quad g(x) = \Lambda(\xi)$$

olarak seçildiğinde

$$\begin{aligned} \bar{R}_i = h^{-1} \frac{\partial^6 g}{\partial x^6}(\xi) & \left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{h}{72} (\xi - x_{i-1})^3 - \frac{h^{-1}}{120} (\xi - x_{i-1})^5 \right) d\xi \right. \\ & \left. + \int_{x_{i+1}}^{x_i} \left(\frac{h}{72} (\xi - x_{i-1})^3 - \frac{h^{-1}}{120} (\xi - x_{i-1})^5 \right) d\xi \right\} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\bar{R}_i = \frac{\partial^6 g}{\partial x^6}(\xi) \frac{h^4}{240}$$

eşitliğinin kalan terimin ifadesi olduğu görülmektedir.

(4.1)'de $x = x_i$ yazılırsa ve (4.8) formülü kullanılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12} [u'_{i+1}(t) + 10u'_i(t) + u'_{i-1}(t)] - a(t)u'_{\bar{x}x,i}(t) = b(t)u_{\bar{x}x,i}(t) \\ & + \frac{c(t)}{12} [u_{i+1}(t) + 10u_i(t) + u_{i-1}(t)] + \frac{d(t)}{12} [u_{i+1}(t-r) \\ & + 10u_i(t-r) + u_{i-1}(t-r)] + \tilde{f}_i(t) + R_i^{(0)}(t), \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (4.9)$$

burada

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(t) &= \frac{1}{12} [f_{i+1}(t) + 10f_i(t) + f_{i-1}(t)], \\ R_i^{(0)}(t) &= a(t) \frac{h^4}{240} \frac{\partial^7 u(\xi_i, t)}{\partial t \partial x^6} + b(t) \frac{h^4}{240} \frac{\partial^6 u(\xi_i, t)}{\partial x^6}, \quad \xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1}). \end{aligned}$$

Aşağıdaki ifadeler dikkate alınır

$$\frac{1}{12}[u'_{i+1}(t) + 10u'_i(t) + u'_{i-1}(t)] = u'_i(t) + \frac{h^2}{12}u'_{\bar{x}x,i}(t),$$

$$\frac{c(t)}{12}[u_{i+1}(t) + 10u_i(t) + u_{i-1}(t)] = c(t)u_i(t) + \frac{h^2}{12}c(t)u_{\bar{x}x,i}(t),$$

$$\frac{d(t)}{12}[u_{i+1}(t-r) + 10u_i(t-r) + u_{i-1}(t-r)] = d(t)u_i(t-r) + \frac{h^2}{12}d(t)u_{\bar{x}x,i}(t-r),$$

(4.9) eşitliği

$$\begin{aligned} u'_i(t) - (a(t) - \frac{h^2}{12})u'_{\bar{x}x,i}(t) &= (b(t) + c(t)\frac{h^2}{12})u_{\bar{x}x,i}(t) + c(t)u_i(t) + d(t)u_i(t-r) \\ &+ d(t)\frac{h^2}{12}u_{\bar{x}x,i}(t-r) + \tilde{f}_i(t) + R_i^{(0)}(t), i = 1, 2, \dots, N-1, \quad t \in (0, T] \end{aligned} \quad (4.10)$$

şeklinde yazabiliriz. (4.10)'da $t = t_{j-0.5} = t_j - \frac{\tau}{2}$ olsun:

$$\begin{aligned} u'_i(t_{j-0.5}) - (a(t_{j-0.5}) - \frac{h^2}{12})u'_{\bar{x}x,i}(t_{j-0.5}) &= (b(t_{j-0.5}) + c(t_{j-0.5})\frac{h^2}{12})u_{\bar{x}x,i}(t_{j-0.5}) \\ &+ c(t_{j-0.5})u_i(t_{j-0.5}) + d(t_{j-0.5})u_i(t_{j-0.5}-r) \\ &+ d(t_{j-0.5})\frac{h^2}{12}u_{\bar{x}x,i}(t_{j-0.5}-r) + \tilde{f}_i^j + R_i^{(0)j}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, \dots, N_0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

$$u'_i(t_{j-0.5}) = u_{t,i}^j - \frac{\tau^2}{24} \frac{\partial^3 u(x_i, \eta_j^{(1)})}{\partial t^3}, \quad (4.12)$$

$$u'_{\bar{x}x,i}(t_{j-0.5}) = u_{\bar{x}x,i}^j - \frac{\tau^2}{24} \frac{\partial^5 u(\xi_i^{(1)}, \eta_j^{(2)})}{\partial t^3 \partial x^2}, \quad (4.13)$$

$$u_i(t_{j-0.5}) = \frac{u_i^j + u_i^{j-1}}{2} - \frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^2 u_i(x_i, \eta_j^{(4)})}{\partial t^2}, \quad (4.14)$$

$$u_{\bar{x}x,i}(t_{j-0.5}) = \frac{u_{\bar{x}x,i}^j + u_{\bar{x}x,i}^{j-1}}{2} - \frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^4 u(\xi_i^{(2)}, \eta_j^{(3)})}{\partial t^2 \partial x^2}, \quad (4.15)$$

$$u_i(t_{j-0.5}-r) = \frac{u_i^{j-n_0} + u_i^{j-n_0-1}}{2} - \frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^2 u(x_i, \bar{\eta}_j^{(1)})}{\partial t^2}, \quad (4.16)$$

$$u_{\bar{x}x,i}(t_{j-0.5}-r) = \frac{u_{\bar{x}x,i}^{j-n_0} + u_{\bar{x}x,i}^{j-n_0-1}}{2} + \frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^4 u(x_i, \bar{\eta}_j^{(2)})}{\partial t^2 \partial x^2}, \quad (4.17)$$

$$t_{j-1} < \eta_j^{(i)} < t_j, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad t_{j-n_0-1} < \bar{\eta}_j^{(i)} < t_{j-n_0}, \quad i = 1, 2.$$

$$u_{\bar{t},i}^j = \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\tau} \quad (4.18)$$

olduğunu biliyoruz. u_i^j ve u_i^{j-1} , in

$$u_i^j = u_i^{j-0.5} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j-0.5}) + \frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_{j-0.5}) + \frac{\tau^3}{48} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \vartheta_j^{(1)}),$$

$$u_i^{j-1} = u_i^{j-0.5} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j-0.5}) + \frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_{j-0.5}) - \frac{\tau^3}{48} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \vartheta_j^{(2)})$$

ifadeleri (4.18)'de yerine yazılırsa

$$\tau u_{\bar{t},i}^j = \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j-0.5}) + \frac{\tau^3}{48} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \vartheta_j^{(1)}) + \frac{\tau^3}{48} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \vartheta_j^{(2)})$$

elde edilir. Ara değer teoreminden

$$u_{\bar{t},i}^j = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j-0.5}) + \frac{\tau^2}{24} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \eta_j^{(1)})$$

yazılabilir. Böylece (4.12) elde edilir. Benzer şekilde u_i' yerine $u_{\bar{x}x,i}'$ yazılırsa (4.13)'e ulaşılır.

(4.14) ve (4.15) için;

$$u_i^{(0.5)j} = \frac{u_i^j + u_i^{j-1}}{2} \quad (4.19)$$

eşitliğinde u_i^j ve u_i^{j-1} , in

$$u_i^j = u_i^{j-0.5} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j-0.5}) + \frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \vartheta_j^{(3)}),$$

$$u_i^{j-1} = u_i^{j-0.5} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j-0.5}) + \frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \vartheta_j^{(4)})$$

eşitlikleri (4.19)'da yerine yazılırsa

$$u_i^{j-0.5} = u_i^{(0.5)j} - \frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \eta_j^{(3)})$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.14)'de u_i yerine $u_{\bar{x}x,i}$ yazılırsa (4.15) bulunur.

(4.16) ve (4.17) eşitliklerini elde etmek için

$$u_i^{(0.5)(j-n_0)} = \frac{u_i^{j-n_0} + u_i^{j-n_0-1}}{2} \quad (4.20)$$

ifadesini kullanacağız. $u_i^{j-n_0}$ ve $u_i^{j-n_0-1}$ 'in

$$u_i^{j-n_0} = u_i^{j-n_0-0.5} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j-n_0-0.5}) + \frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \vartheta_j^{(5)}),$$

$$u_i^{j-n_0-1} = u_i^{j-n_0-0.5} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j-n_0-0.5}) + \frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \vartheta_j^{(6)})$$

eşitlikleri (4.20)'de yerine yazılırsa,

$$u_i(t_{j-0.5} - r) = u_i^{(0.5)(j-n_0)} - \frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \bar{\eta}_j^{(1)})$$

bulunur. Benzer şekilde, (4.16)'da u_i yerine $u_{\bar{x}x,i}$ yazılırsa (4.17) elde edilir.

Yukarıdaki ifadeler (4.11)'de dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} u_{\bar{t},i}^j - (a(t_{j-0.5}) - \frac{h^2}{12}) u_{\bar{t}\bar{x}x,i}^j &= (b(t_{j-0.5}) + c(t_{j-0.5}) \frac{h^2}{12}) u_{\bar{x}x,i}^{(0.5)j} \\ &+ c(t_{j-0.5}) u_i^{(0.5)j} + d(t_{j-0.5}) u_i^{(0.5)(j-n_0)} + d(t_{j-0.5}) \frac{h^2}{12} u_{\bar{x}x,i}^{(0.5)(j-n_0)} \\ &+ \tilde{f}_i^j + R_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, \dots, N_0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} R_i^j &= R_i^{(0)j} + R_i^{(1)j}, \\ R_i^{(1)j} &= -\frac{\tau^2}{24} \left(\frac{\partial^3 u(x_i, \eta_j^{(1)})}{\partial t^3} + \frac{\partial^5 u(\xi_i^{(1)}, \eta_j^{(2)})}{\partial t^3 \partial x^2} \right) \\ &- \frac{\tau^2}{8} \left(\frac{\partial^4 u(\xi_i^{(2)}, \eta_j^{(3)})}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i(x_i, \eta_j^{(4)})}{\partial t^2} \right) \\ &- \frac{\tau^2}{8} \left(\frac{\partial^2 u(x_i, \bar{\eta}_j^{(1)})}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u(x_i, \bar{\eta}_j^{(2)})}{\partial t^2 \partial x^2} \right). \\ v^{(0.5)j} &= v^{j-1} + \frac{\tau}{2} v_i^j \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
& (1 - c_{j-0.5} \frac{\tau}{2}) u_{i,i}^j - (a_{j-0.5} - \frac{h^2}{12} + \frac{\tau}{2} (b_{j-0.5} + c_{j-0.5} \frac{h^2}{12})) u_{i\bar{x}x,i}^j \\
& = (b_{j-0.5} + c_{j-0.5} \frac{h^2}{12}) u_{\bar{x}x,i}^{j-1} + c_{j-0.5} u_i^{j-1} + d_{j-0.5} u_i^{(0.5)(j-n_0)} \\
& + d_{j-0.5} \frac{h^2}{12} u_{\bar{x}x,i}^{(0.5)(j-n_0)} + \tilde{f}_i^j + R_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, \dots, N_0
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$u_i^j = \phi_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = -n_0, -n_0 + 1, \dots, 0, \tag{4.23}$$

$$u_0^j = u_N^j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N_0 \tag{4.24}$$

bulunur. (4.22)'de R_i^j kalan terimini ihmal edersek, (4.1)-(4.3)'ün yaklaşımı için aşağıdaki fark şemasını elde ederiz:

$$\begin{aligned}
& E^j y_{i,i}^j - A^j y_{i\bar{x}x,i}^j = B^j y_{\bar{x}x,i}^{j-1} + C^j y_i^{j-1} + D^j y_i^{(0.5)(j-n_0)} \\
& + \bar{D}^j y_{\bar{x}x,i}^{(0.5)(j-n_0)} + \tilde{f}_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, \dots, N_0,
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$y_i^j = \phi_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = -n_0, -n_0 + 1, \dots, 0, \tag{4.26}$$

$$y_0^j = y_N^j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N_0, \tag{4.27}$$

burada

$$\begin{aligned}
& E^j = (1 - c_{j-0.5} \frac{\tau}{2}), \quad A^j = a_{j-0.5} - \frac{h^2}{12} + \frac{\tau}{2} (b_{j-0.5} + c_{j-0.5} \frac{h^2}{12}), \\
& B^j = b_{j-0.5} + c_{j-0.5} \frac{h^2}{12}, \quad C^j = c_{j-0.5}, \quad D^j = d_i^{j-0.5}, \quad \bar{D}^j = d_{j-0.5} \frac{h^2}{12}.
\end{aligned}$$

(4.22)-(4.24) ve (4.25)-(4.27) ifadelerinden $z = y - u$ hata fonksiyonu için aşağıdaki fark problemini elde ederiz:

$$\begin{aligned}
& E^j z_{i,i}^j - A^j z_{i\bar{x}x,i}^j = B^j z_{\bar{x}x,i}^{j-1} + C^j z_i^{j-1} + D^j z_i^{(0.5)(j-n_0)} \\
& + \bar{D}^j z_{\bar{x}x,i}^{(0.5)(j-n_0)} + R_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, \dots, N_0,
\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$z_i^j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = -n_0, -n_0 + 1, \dots, 0, \tag{4.29}$$

$$z_0^j = z_N^j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N_0. \tag{4.30}$$

Yaklaşık çözüm için hata değerlendirmelerini vermeden önce, gecikmeli Gronwall eşitsizliğinin fark benzeri olarak da bilinen aşağıdaki Lemma'yı verelim:

Lemma 4.1. ω_{N_0} şebekesinde tanımlı $\delta \geq 0$ şebeke fonksiyonunun

$$\delta_j \leq \alpha + \tau \sum_{k=1}^j \{a\delta_k + b\delta_{k-1} + c\delta_{k-N} + d\delta_{k-N-1} + f_k\}, \quad j \geq 1 \quad (4.31)$$

$$\delta_j \leq \phi_j, \quad -N \leq j \leq 0, \quad \delta_0 \leq \alpha$$

eşitsizliğini sağladığını varsayalım. Burada $a, b, c, d, f_j \geq 0$ ve ϕ_j verilmiş fonksiyonlar, $N \geq 0$ tamsayı, $1 - \tau a > 0$.

Bu durumda

$$\delta_j \leq \tilde{\alpha} e^{\tau j} + \frac{\tau}{1 - \tau a} \sum_{k=1}^j f_k e^{\tau(j-k)} \quad (4.32)$$

olur. Burada

$$\tilde{\alpha} = \alpha + (c + d) \|\phi\|_1, \quad \gamma = \frac{a + b + c + d}{1 - \tau a}, \quad \|\phi\|_1 = \sum_{j=-N}^0 \tau \phi_j.$$

İspat. (4.31)'de $k - N + 1 = p$ ve $k - N = q$ yazarsak

$$\begin{aligned} y_j &\leq \alpha + \tau \sum_{k=1}^j \{ay_k + by_{k-1}\} + \tau \sum_{p=2-N}^{j-N+1} cy_{p-1} + \tau \sum_{q=1-N}^{j-N} dy_{q-1} + \tau \sum_{k=1}^j f_k \\ &\leq \alpha + \tau \sum_{k=1}^j \{ay_k + by_{k-1}\} + \tau \sum_{p=2-N}^1 cy_{p-1} \\ &\quad + \tau \sum_{p=1}^{j-N+1} cy_{p-1} + \tau \sum_{q=1-N}^1 dy_{q-1} + \tau \sum_{q=1}^{j-N} dy_{q-1} + \tau \sum_{k=1}^j f_k \\ &\leq (\alpha + (c + d) \|\phi\|_1) + \sum_{k=1}^j \{ay_k + (b + c + d)y_{k-1} + f_k\} \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu da Gronwall eşitsizliğinin fark benzerinden (3.2)'yi verir. □

4.3. HATA DEĞERLENDİRMESİ

Şimdi de bu bölümden elde ettiğimiz sonuçları verelim:

Teorem 4.2. $\frac{\partial^7 u}{\partial t \partial x^6}, \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2}$ türevleri $\bar{Q}$ aralığında sınırlı ve $E^j \geq \beta_* > 0, A^j \geq \alpha_* > 0$ olsun. O halde (4.25)-(4.27) probleminin hata değerlendirmesi için

$$\|y - u\| + \|y_{\bar{x}} - u_{\bar{x}}\| \leq C(h^4 + \tau^2) \quad (4.33)$$

eşitsizliği doğrudur. Burada C, h ve τ 'dan bağımsız bir sabittir.

İspat. Aşağıdaki özdeşliği ele alalım:

$$\begin{aligned} (E^j z_t^j, z_t^j) - (A^j z_{\bar{x}\bar{x}}^j, z_t^j) &= (B^j z_{\bar{x}\bar{x}}^{j-1}, z_t^j) + (C^j z_{j-1}, z_t^j) \\ &+ (D^j z_{(0.5)(j-n_0)}, z_t^j) + (\bar{D}^j z_{\bar{x}\bar{x}}^{(0.5)(j-n_0)}, z_t^j) + (R^j, z_t^j). \end{aligned}$$

Bir kaç işlemden sonra

$$\begin{aligned} \frac{\beta_*}{2} \|z_t^j\|^2 + \frac{\alpha_*}{2} \|z_{\bar{x}}^j\|^2 &\leq \alpha_*^{-1} (B^*)^2 \|z_{\bar{x}}^{j-1}\|^2 + \frac{3}{2} \beta_*^{-1} (C^*)^2 \|z^{j-1}\|^2 \\ &+ \frac{3}{4} \beta_*^{-1} (D^*)^2 (\|z^{j-n_0-1}\|^2 + \|z^{j-n_0}\|^2) \\ &+ \frac{1}{2} \alpha_*^{-1} (\bar{D}^*)^2 (\|z_{\bar{x}}^{j-n_0-1}\|^2 + \|z_{\bar{x}}^{j-n_0}\|^2) + \frac{3}{2} \beta_*^{-1} \|R^j\|^2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği $T\tau$ ile çarpıp $k = 1$ 'den j 'ye kadar toplayıp

$$v_j^2 \leq t_j \tau \sum_{k=1}^j v_{t,k}^2 \leq T\tau \sum_{k=1}^j v_{t,k}^2, (v_0 = 0)$$

eşitsizliğini de kullanırsak,

$$\begin{aligned} \beta_* \|z_j\|^2 + \alpha_* \|z_{\bar{x}}^j\|^2 &\leq T\tau \sum_{k=1}^j \left\{ 2(B^*)^2 \alpha_*^{-1} \|z_{\bar{x}}^{j-1}\|^2 + 3(C^*)^2 \beta_*^{-1} \|z^{j-1}\|^2 \right. \\ &+ \frac{3}{2} (D^*)^2 \beta_*^{-1} \|z^{j-n_0-1}\|^2 + (\bar{D}^*)^2 \alpha_*^{-1} \|z_{\bar{x}}^{j-n_0-1}\|^2 + \frac{3}{2} (D^*)^2 \beta_*^{-1} \|z^{j-n_0}\|^2 \\ &\left. + (\bar{D}^*)^2 \alpha_*^{-1} \|z_{\bar{x}}^{j-n_0}\|^2 + 3\beta_*^{-1} \|R^j\|^2 \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. δ_j 'yi

$$\delta_j = \beta_* \|z_j\|^2 + \alpha_* \|z_{\bar{x}}^j\|^2$$

ile belirtirsek,

$$\delta_j \leq \sum_{k=1}^j \tau \{c_1 \delta_{k-1} + c_2 \delta_{k-n_0} + c_2 \delta_{k-n_0-1} + \rho_k\}, \quad j \geq 1$$

olur. Burada

$$c_1 = T \max \{2(B^*)^2 \alpha_*^{-2}, 3(C^*)^2 \beta_*^{-2}\},$$

$$c_2 = T \max \left\{ (\bar{D}^*)^2 \alpha_*^{-2}, \frac{3}{2} (D^*)^2 \beta_*^{-2} \right\},$$

$$\rho = 3\beta_*^{-1} T \|R^j\|^2.$$

Şimdi de Lemma 4.1'i kullanırsak,

$$\beta_* \|z_j\|^2 + \alpha_* \|z_{\bar{x}}^j\|^2 \leq 3T\beta_*^{-1} \tau \sum_{k=1}^j e^{(c_1+2c_2)t_{j-k}} \|R^k\|^2 \quad (4.34)$$

buluruz. Buradan,

$$\tau \sum_{k=1}^{N_0} \|R^k\|^2 = O(h^4 + \tau^2)$$

varsayılan düzgünlük koşulu altında ve (4.34)'den Teorem'in ispatının tamamlandığı kolayca görülmektedir. $\square$

4.4. ÖRNEK

Aşağıdaki problemi ele alalım:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u(x, t-1) + f(x, t), \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, 2].$$

Problemin kesin çözümü

$$u(x, t) = e^{-t}(x \sinh(1) - \sinh(x)), \quad (x, t) \in [0, 1] \times [-1, 0],$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in (0, 2]$$

şeklindedir. Burada

$$f(x,t) = e^{-t}(2 \sinh(x) - x \sinh(1)) + e^{1-t}(x \sinh(1) - \sinh(x)).$$

Problemin nümerik sonuçları Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2’de verilmiştir.



Çizelge 4.1. Sayısal sonuçlar $(0, 1) \times (0, 1)$

Düğümler (x, t)	Kesin Çözüm	Nümerik Çözüm $h = 0.1, \tau = 0.1$	Hata $ y - u $
(0.1,0.1)	1.5702E-02	1.5683E-02	1.8976E-05
(0.2,0.2)	2.7595E-02	2.7296E-02	2.9880E-04
(0.3,0.3)	3.5589E-02	3.5210E-02	3.7897E-04
(0.4,0.4)	3.9769E-02	3.9370E-02	3.9898E-04
(0.5,0.5)	4.0337E-02	3.9855E-02	4.8280E-04
(0.6,0.6)	3.7576E-02	3.7188E-02	3.8775E-04
(0.7,0.7)	3.1810E-02	3.1447E-02	3.6290E-04
(0.8,0.8)	2.3390E-02	2.3111E-02	2.7896E-04
(0.9,0.9)	1.2670E-02	1.2652E-02	1.8633E-05

Çizelge 4.2. Sayısal sonuçlar $(0, 1) \times (1, 2)$

Düğümler (x, t)	Kesin Çözüm	Nümerik Çözüm $h = 0.1, \tau = 0.1$	Hata $ y - u $
(0.1,1.1)	5.7764E-03	5.7175E-03	5.8921E-05
(0.2,1.2)	1.0152E-02	1.0020E-02	1.3142E-04
(0.3,1.3)	1.3092E-02	1.2809E-02	2.8274E-04
(0.4,1.4)	1.4630E-02	1.4370E-02	2.5987E-04
(0.5,1.5)	1.4839E-02	1.4491E-02	3.4799E-04
(0.6,1.6)	1.3823E-02	1.3430E-02	3.9364E-04
(0.7,1.7)	1.1702E-02	1.1359E-02	3.4292E-04
(0.8,1.8)	8.6046E-03	8.3119E-03	2.9273E-04
(0.9,1.9)	4.6612E-03	4.5488E-03	1.1242E-04

Çizelgelerden nümerik sonuçların teorik sonuçlarla uyumlu olduğu açıkça görülmektedir.

5. GECİKME TERİMİ İÇEREN PSEUDO-PARABOLİK BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMİ İÇİN KARARLILIK EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde lineer pseudo-parabolik denklem için başlangıç-sınır değer problemi incelendi. Enerji eşitsizlikleri metodu kullanılarak ele alınan problem için kararlılık eşitsizlikleri elde edildi ve destekleyici örnekler verildi [30].

$\bar{Q} = \bar{\Omega} \times [0, T]$; $\bar{\Omega} = [0, l]$, $Q = \Omega \times (0, T]$, $\Omega = (0, l)$ aralığında gecikmeli pseudo-parabolik (Sobolev) denklemi için aşağıdaki başlangıç-sınır değer problemini ele alalım:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a(t) \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t \partial x^2} &= b(t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + c(t) \frac{\partial^2 u(x, t-r)}{\partial x^2} \\ &+ d(t)u(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$u(x, t) = \phi(x, t), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad -r \leq t \leq 0, \quad (5.2)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad a(t) \leq \alpha \leq 0, \quad (5.3)$$

burada $r > 0$ gecikme parametresi, $a \geq \alpha > 0$, b, c, d, f ve ϕ belirtilen regülerlik koşullarını sağlayan fonksiyonlardır. Bu bölümde enerji eşitsizlikleri metodunu kullanarak (5.1)-(5.2) problemi için kararlılık eşitsizliklerini elde edeceğiz.

Lemma 5.1. $\delta(t) \geq 0$ sürekli fonsiyon olsun, öyle ki;

$$\delta(t) \leq \delta_* + \int_0^t \{c_0 \delta(s) + c_1 \delta(s-r)\} ds, \quad t > 0,$$

$$\delta(t) = \varphi(t), \quad -r \leq t \leq 0,$$

burada δ_* , c_0 , c_1 negatif olmayan sabitler ve $\varphi \in C[-r, 0]$. O halde

$$\delta(t) \leq \delta_* \exp \left(c_0 + c_1 \int_{-r}^0 \varphi(s) ds \right).$$

İspat. $s - r = \eta$ dersek,

$$\int_0^t \delta(s-r)ds = \int_{-r}^{t-r} \delta(\eta)d\eta = \begin{cases} \int_{-r}^0 \varphi(t)dt, & 0 \leq t \leq r, \\ \int_{-r}^0 \varphi(t)dt + \int_0^{t-r} \delta(\eta)d\eta, & t \geq r \end{cases}$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan

$$\delta(t) \leq \delta_* + \left(c_0 + c_1 \int_{-r}^0 \varphi(t)dt \right) \int_0^t \delta(s)ds$$

olur. Bu da Gronwall eşitliğinin kullanımıyla ispatı tamamlar. $\square$

Teorem 5.2. $a, b, c, d \in C[0, T]$, $f \in C(\bar{Q})$ ve $\frac{\partial^k \phi}{\partial \phi^k} \in C(\bar{\Omega} \times [-r, 0])$, $k = 0, 1$ için (5.1)-(5.2) gecikmeli sınır-değer probleminin çözümü aşağıdaki kararlılık eşitsizliklerini sağlar:

$$\alpha \|u\|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 \leq \left[A + c_1 \int_{-r}^0 \left(\alpha \|u\|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 dt \right) \right] \exp(c_0 T + c_1 \exp(c_0 T)t),$$

$$0 \leq t \leq T. \quad (5.4)$$

Burada

$$(g, h) = \int_0^l g(x)h(x)dx, \quad \|g\|^2 = \int_0^l g^2(x)dx,$$

$$A = 2\alpha \|\phi\|^2 + \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\|^2 + 4\alpha T \int_0^T \|f\|^2 ds,$$

$$c_0 = T \max(4\bar{c}^2, 2\bar{b}^2),$$

$$c_1 = 4\alpha^{-2}\bar{d}^2 T,$$

$$\bar{g} = \max_{[0, T]} |g(t)|.$$

İspat.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) - a(t) \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) = b(t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ & + c(t) \left(\frac{\partial^2 u(\cdot, t-r)}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) + d(t) \left(u, \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \left(f(t), \frac{\partial u}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

özdeşliğini ele alalım.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2,$$

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) = \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right\|^2$$

eşitliklerini kullanırsak

$$\left| b(t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right| = \left| b(t) \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) \right| \leq \mu_1 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right\|^2 + \frac{\bar{b}^2(t)}{4\mu_1} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2,$$

ve

$$\begin{aligned} \left| c(t) \left(\frac{\partial^2 u(\cdot, t-r)}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right| &= \left| c(t) \left(\frac{\partial u(\cdot, t-r)}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) \right| \\ &\leq \mu_2 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right\|^2 + \frac{\bar{c}^2(t)}{4\mu_2} \left\| \frac{\partial u(\cdot, t-r)}{\partial x} \right\|^2, \\ \left| d(t) \left(u, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right| &\leq \mu_3 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \frac{\bar{d}^2(t)}{4\mu_3} \|u\|^2, \\ \left| \left(f(t), \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right| &\leq \mu_4 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \frac{1}{4\mu_4} \|f\|^2 \end{aligned}$$

elde ederiz.

Daha sonra (5.5)'den,

$$\begin{aligned} (1 - \mu_3 - \mu_4) \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + (a(t) - \mu_1 - \mu_2) \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right\|^2 &\leq \frac{\bar{b}^2}{4\mu_1} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 \\ &+ \frac{\bar{c}^2}{4\mu_2} \left\| \frac{\partial u(\cdot, t-r)}{\partial x} \right\|^2 + \frac{\bar{d}^2}{4\mu_3} \|u\|^2 + \frac{1}{4\mu_4} \|f\|^2 \end{aligned}$$

eşitsizliğini buluruz.

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{\alpha}{4}, \quad \mu_3 = \mu_4 = \frac{1}{4}$$

seçersek

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \alpha \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right\|^2 \leq \frac{\bar{b}^2}{\alpha} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 + 2\bar{d}^2 \|u\|^2 + \frac{2\bar{c}^2}{\alpha} \left\| \frac{\partial u(\cdot, t-r)}{\partial x} \right\|^2 + 2\|f\|^2 \quad (5.6)$$

olur. (5.6) eşitsizliğini $(0, t)$ aralığında integralleyip

$$g^2(t) \leq 2g^2(0) + 2T \int_0^t |g'(s)|^2 ds$$

eşitsizliğini kullanırsak,

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 ds \geq \frac{1}{2T} \|u\|^2 - \frac{1}{T} \|\phi\|^2,$$

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right\|^2 ds \geq \frac{1}{2T} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 - \frac{1}{T} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\|^2$$

eşitsizliklerini elde ederiz.

Böylece (5.6) eşitsizliği

$$\begin{aligned} \alpha \|u\|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 &\leq 4\alpha T \bar{d}^2 \int_0^t \|u\|^2 ds + 2T \bar{b}^2 \int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 ds \\ &\quad + 4T \bar{c}^2 \int_0^t \left\| \frac{\partial u(\cdot, t-r)}{\partial x} \right\|^2 ds + A \end{aligned}$$

eşitsizliğine indirgenir.

$$\delta(t) = \alpha \|u\|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2$$

yazarsak

$$\delta(t) \leq A + c_0 \int_0^t \delta(s) ds + c_1 \int_0^t \delta(s-r) ds$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Buradan Lemma 5.1'e göre

$$\delta(t) \leq \left[A + c_1 \int_{-r}^0 \left(\alpha \|\phi\|^2 + \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\|^2 \right) dt \right] \exp(c_0 T + c_1 \exp(c_0 T) t)$$

bulunur. Bu da bize (5.4)'ü verir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

5.1. ÖRNEK

Teorimizi desteklemek amacıyla aşağıdaki örneği verelim:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (1+t)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = e^{-t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sqrt{2+t^2} \frac{\partial^2 u(x, t-1)}{\partial x^2} + tu + t \sin \pi x,$$

$$0 < t \leq 1, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(x, t) = te^{-t}, \quad 0 < x < 1, \quad -1 \leq t \leq 0$$

başlangıç-sınır değer problemi için değerlendirme elde edelim. Bu denklemin kesin çözümü $u(x, t) = te^{-t}$ şeklindedir. (5.5) eşitsizliğini kullanırsak,

$$\alpha = 1, \quad \bar{b} = 1, \quad \bar{c} = \sqrt{3}, \quad \bar{d} = 1,$$

$$\int_{-r}^0 |\phi|^2 dt = \int_{-r}^0 \frac{t}{2} (1 - e^{-2x}) dt = \frac{1 - e^{-2x}}{6},$$

$$\int_{-r}^0 \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|^2 dt = \frac{1 - e^{-2x}}{6},$$

$v(t) \geq 0$ için

$$\|u\|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 \leq \left[2 + 12 \left(\frac{1 - e^{-2x}}{6} \right) \right] \exp(4T + 12 \exp(4T)t).$$

eşitsizliğini elde ederiz.

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada, matematik ve fiziğin birçok alanında kullanılan pseudo-parabolik denklemler incelendi. Uygun ekspanansiyel fark şeması geliştirilip, onların ayrık enerji değerlendirmeleri elde edildi. Shishkin şebekesinde sonlu fark diskrizasyonunu birleştiren nümerik metod geliştirildi. Biyoloji, nüfus artışı, kontrol teorisi, mekanik ve diğer mühendislik alanlarında sıklıkla karşılaştığımız birçok problemin çözümüne katkı sağlayacak gecikmeli kısmi diferansiyel denklem ele alındı. Zamana göre gecikmeli pseudo-parabolik denklemler için tek boyutlu başlangıç-sınır değer problemini inceleyerek, bu problem için kararlılık eşitsizlikleri elde edildi. Devamında, katsayılar, uzay değişkeninden bağımsız verilen problemin yaklaşımı için yüksek mertebeden fark metodu geliştirildi. Enerji eşitsizlikleri metodu ve gecikmeli Gronwall eşitsizliğinin fark benzeri kullanılarak tamamen ayrık şemanın uzaya göre dördüncü, zamana göre de ikinci mertebeden yakınsak olduğu gösterildi.

Teorilerimiz nümerik örneklerle desteklendi.

7. KAYNAKLAR

- [1] P. J. Chen and M. E. Gurtin, "On a theory of heat conduction involving two temperatures," *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, vol. 19, no. 4, pp. 614–627, 1968.
- [2] R. Huilgol, "A second order fluid of the differential type," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 3, no. 4, pp. 471–482, 1968.
- [3] G. I. Barenblatt, V. M. Entov, and V. M. Ryzhik, "Theory of fluid flows through natural rocks," 1989.
- [4] M. Yang, "Analysis of second order finite volume element methods for pseudo-parabolic equations in three spatial dimensions," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 196, no. 1, pp. 94–104, 2008.
- [5] C. Van Duijn, Y. Fan, L. Peletier, and I. Pop, "Travelling wave solutions for degenerate pseudo-parabolic equations modelling two-phase flow in porous media," *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, vol. 14, no. 3, pp. 1361–1383, 2013.
- [6] W. H. Ford and T. Ting, "Uniform error estimates for difference approximations to nonlinear pseudo-parabolic partial differential equations," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 11, no. 1, pp. 155–169, 1974.
- [7] R. E. Ewing, "Time-stepping galerkin methods for nonlinear Sobolev partial differential equations," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 15, no. 6, pp. 1125–1150, 1978.
- [8] G. Amiraliyev and Y. D. Mamedov, "Difference schemes on the uniform mesh for singularly perturbed pseudo-parabolic equations," *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 19, pp. 207–222, 1995.
- [9] T. Sun and D. Yang, "The finite difference streamline diffusion methods for Sobolev equations with convection-dominated term," *Applied mathematics and computation*, vol. 125, no. 2-3, pp. 325–345, 2002.
- [10] G. Amiraliyev and I. Amiraliyeva, "Difference schemes for the singularly perturbed Sobolev equations," pp. 23–40, 2005.
- [11] G. Amiraliyev, H. Duru, and I. Amiraliyeva, "A parameter-uniform numerical method for a Sobolev problem with initial layer," *Numerical Algorithms*, vol. 44, no. 2, pp. 185–203, 2007.
- [12] C. Cuesta and I. Pop, "Numerical schemes for a pseudo-parabolic Burgers equation: discontinuous data and long-time behaviour," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 224, no. 1, pp. 269–283, 2009.

- [13] Y. Fan and I. S. Pop, "Equivalent formulations and numerical schemes for a class of pseudo-parabolic equations," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 246, pp. 86–93, 2013.
- [14] A. Bouziani, "Initial-boundary value problems for a class of pseudo-parabolic equations with integral boundary conditions," *Journal of mathematical analysis and applications*, vol. 291, no. 2, pp. 371–386, 2004.
- [15] M. Ptashnyk, "Nonlinear pseudoparabolic equations as singular limit of reaction–diffusion equations," *Applicable Analysis*, vol. 85, no. 10, pp. 1285–1299, 2006.
- [16] Y. Fan and I. Pop, "A class of pseudo-parabolic equations: existence, uniqueness of weak solutions, and error estimates for the euler-implicit discretization," *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 34, no. 18, pp. 2329–2339, 2011.
- [17] I. Amirali, "Analysis of higher order difference method for a pseudo-parabolic equation with delay," *Miskolc Mathematical Notes*, vol. 20, no. 2, pp. 755–766, 2019.
- [18] V. Kolmanovskii and A. Myshkis, *Introduction to the theory and applications of functional differential equations*. Springer Science & Business Media, 2013, vol. 463.
- [19] J. Wu, *Theory and applications of partial functional differential equations*. Springer Science & Business Media, 1996, vol. 119.
- [20] E. Shivanian and M. Aslefallah, "Stability and convergence of spectral radial point interpolation method locally applied on two-dimensional pseudo-parabolic equation," *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, vol. 33, no. 3, pp. 724–741, 2017.
- [21] Q. Liu, X. Wang, and D. De Kee, "Mass transport through swelling membranes," *International Journal of Engineering Science*, vol. 43, no. 19-20, pp. 1464–1470, 2005.
- [22] F. Bekkouché, W. Chikouché, and S. Nicaise, "Fully discrete approximation of general nonlinear Sobolev equations," *Afrika Matematika*, vol. 30, no. 1-2, pp. 53–90, 2019.
- [23] J. H. Lightbourne III and S. M. Rankin III, "A partial functional differential equation of Sobolev type," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 93, no. 2, pp. 328–337, 1983.
- [24] H. Di, Y. Shang, and X. Zheng, "Global well-posedness for a fourth order pseudo-parabolic equation with memory and source terms," *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B*, vol. 21, no. 3, p. 781, 2016.
- [25] P. Okcu and G. Amiraliyev, "Error estimates for differential difference schemes to pseudo-parabolic initial-boundary value problem with delay," *Mathematical and Computational Applications*, vol. 18, no. 3, pp. 283–292, 2013.

- [26] I. Amirali, G. Amiraliyev, M. Cakir, and E. Cimen, “Explicit finite difference methods for the delay pseudoparabolic equations,” *The Scientific World Journal*, vol. 2014, 2014.
- [27] M. Çağlıyan, N. Çelik, and S. Doğan, *Adi diferensiyel denklemler*. Nobel Yayın Dağıtım, 2007.
- [28] A. A. Samarskii, *The theory of difference schemes*. CRC Press, 2001.
- [29] G. Amirali and I. Amirali, *Nümerik Analiz:Teori ve Uygulamalarla*. Seçkin Yayıncılık, 2018.
- [30] I. Amirali, S. Cati, and G. M. Amiraliyev, “Stability inequalities for the delay pseudo-parabolic equations,” *International Journal of Applied Mathematics*, vol. 32, no. 2, pp. 289–294, 2019.



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Seda ÇATI TÜRK
Doğum Tarihi ve Yeri : 25 Temmuz 1994 - Beykoz
Yabancı Dili : İngilizce
Eposta : sedacati@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik Bölüm	DÜZCE Üniversitesi	2020
Lisans	Matematik Bölüm	DÜZCE Üniversitesi	2017
Lise	Sayısal	Çavuşbaşı Çok Programlı Lisesi	2012

A. Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler :

A1. I. Amirali, S.Cati, and G.M. Amiraliyev, “STABILITY INEQUALITIES FOR THE
DELAY PSEUDO- PARABOLIC EQUATIONS,” *International Journal of Applied
Mathematics*, vol.32, no. 2, pp. 289-294, 2019.