

**T.C.  
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

**ZAYIF TEKİL ÇEKİRDEĞE SAHİP FREDHOLM VOLTERRA  
İNTEGRO-DİFERANSİYEL VE İNTEGRAL DENKLEMLERİN  
SAYISAL ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE**

**MWANGELWA MWABA**

**Danışman  
Prof. Dr. Ali KONURALP**



**MANİSA-2025**

## TEZ ONAYI

MWANGELWA MWABA tarafından hazırlanan "**Zayıf Tekil Çekirdeğe Sahip Fredholm Volterra İntegro-Diferansiyel ve İntegral Denklemlerin Sayısal Çözümleri Üzerine**" adlı tez çalışması 21.11.2025 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

|                 |                                                                  |       |
|-----------------|------------------------------------------------------------------|-------|
| <b>Danışman</b> | <b>Prof. Dr. Ali KONURALP</b><br>Manisa Celal Bayar Üniversitesi | ..... |
|-----------------|------------------------------------------------------------------|-------|

|                   |                                                                        |       |
|-------------------|------------------------------------------------------------------------|-------|
| <b>Jüri Üyesi</b> | <b>Prof. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR</b><br>Manisa Celal Bayar Üniversitesi | ..... |
|-------------------|------------------------------------------------------------------------|-------|

|                   |                                                             |       |
|-------------------|-------------------------------------------------------------|-------|
| <b>Jüri Üyesi</b> | <b>Doç. Dr. Meltem ADIYAMAN</b><br>Dokuz Eylül Üniversitesi | ..... |
|-------------------|-------------------------------------------------------------|-------|

## **TAAHHÜTNAME**

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

**21.11.2025**

**MWANGELWA MWABA**



## İÇİNDEKİLER

|                                                            |      |
|------------------------------------------------------------|------|
| İÇİNDEKİLER . . . . .                                      | I    |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ . . . . .                   | II   |
| ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . .                                  | III  |
| TEŞEKKÜR . . . . .                                         | IV   |
| ÖZET . . . . .                                             | VI   |
| ABSTRACT . . . . .                                         | VIII |
| 1. GİRİŞ . . . . .                                         | 1    |
| 2. GENEL BİLGİLER . . . . .                                | 3    |
| 2.1. Gama Fonksiyonu . . . . .                             | 3    |
| 2.2. Riemann-Liouville Kesirli İntegrali . . . . .         | 3    |
| 2.3. Caputo Kesirli Türevi . . . . .                       | 5    |
| 3. CHELYSHKOV DALGACIKLARI . . . . .                       | 6    |
| 3.1. Chelyshkov Polinomları . . . . .                      | 6    |
| 3.2. Chelyshkov Dalgacıkları . . . . .                     | 7    |
| 3.3. Kesirli İntegrasyon için Operasyonel Matris . . . . . | 9    |
| 4. ZAYIF TEKİL İNTEGRAL İÇİN SAYISAL YÖNTEM . . . . .      | 13   |
| 5. ÇÖZÜM YÖNTEMİ . . . . .                                 | 15   |
| 6. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA . . . . .               | 17   |
| 7. SONUÇ VE ÖNERİLER . . . . .                             | 49   |
| KAYNAKLAR . . . . .                                        | 50   |
| 8. ÖZGEÇMİŞ . . . . .                                      | 52   |

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

|                     |                                                                     |
|---------------------|---------------------------------------------------------------------|
| $b_i(t)$            | Blok Darbe Fonksiyonu                                               |
| $\mathbf{B}(t)$     | Blok Fonksiyonlardan Oluşan Vektör                                  |
| $\mathbf{C}$        | Katsayı Vektörü                                                     |
| $D_*^\alpha$        | Kesirli Mertebeden Caputo Türevi                                    |
| $\mathbf{F}^\alpha$ | Blok Darbe Fonksiyonlarının Kesirli İntegrasyon Operasyonel Matrisi |
| $H_{M,m}(t)$        | Chelyshkov Polinomları                                              |
| $J^\alpha$          | Riemann-Liouville Kesirli İntegrali Operatörü                       |
| $k(t, s)$           | Çekirdek Fonksiyonu                                                 |
| $\mathbf{P}^\alpha$ | Dalgacıkların Kesirli İntegrasyon Operasyonel Matrisi               |
| $u(t)$              | Bilinmeyen Fonksiyonu                                               |
| $\mathbf{W}$        | Çekirdeğin Sayısal Karşılığı Olan Matris                            |
| $\psi_{nm}(t)$      | Chelyshkov Dalgacıkları                                             |
| $\Psi(t)$           | Psi Vektörü                                                         |
| $\Phi$              | Dalgacık Taban Matrisi                                              |

## ŞEKİLLER DİZİNİ

|             |                                                                                                                                                                              |    |
|-------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 3.1.  | $M = 3$ için Chelyshkov Polinomlarının Grafiği . . . . .                                                                                                                     | 7  |
| Şekil 3.2.  | Örnek 3.2: $[0, 0.5)$ aralığında $\psi_{00}, \psi_{01}, \psi_{02}$ ve $[0.5, 1)$ aralığında $\psi_{10}, \psi_{11}, \psi_{12}$ Chelyshkov dalgacıklarının grafikleri. . . . . | 9  |
| Şekil 6.1.  | Örnek 6.1: $k = 1$ ve $M = 2$ için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması . . . . .                                                                                  | 21 |
| Şekil 6.2.  | Örnek 6.1: $k = 2$ ve $M = 2$ için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması . . . . .                                                                                  | 21 |
| Şekil 6.3.  | Örnek 6.1: $k = 3$ ve $M = 2$ için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması . . . . .                                                                                  | 22 |
| Şekil 6.4.  | Örnek 6.2: $k = 1$ ve $M = 2$ için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması . . . . .                                                                                  | 26 |
| Şekil 6.5.  | Örnek 6.2: $k = 2$ ve $M = 2$ için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması . . . . .                                                                                  | 27 |
| Şekil 6.6.  | Örnek 6.2: $k = 3$ ve $M = 2$ için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması . . . . .                                                                                  | 27 |
| Şekil 6.7.  | Örnek 6.3: $k = 1$ ve $M = 2$ için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması . . . . .                                                                                  | 32 |
| Şekil 6.8.  | Örnek 6.3: $k = 2$ ve $M = 2$ için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması . . . . .                                                                                  | 32 |
| Şekil 6.9.  | Örnek 6.3: $k = 3$ ve $M = 2$ için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması . . . . .                                                                                  | 33 |
| Şekil 6.10. | Örnek 6.4: $\alpha = 1.25, k = 1$ ve $M = 2$ için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması . . . . .                                                                   | 37 |
| Şekil 6.11. | Örnek 6.4: $\alpha = 1.25, k = 2$ ve $M = 2$ için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması . . . . .                                                                   | 37 |
| Şekil 6.12. | Örnek 6.4: $\alpha = 1.25, k = 3$ ve $M = 2$ için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması . . . . .                                                                   | 38 |
| Şekil 6.13. | Örnek 6.5: $k = 1$ ve $M = 2$ için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması . . . . .                                                                                  | 42 |
| Şekil 6.14. | Örnek 6.5: $k = 2$ ve $M = 2$ için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması . . . . .                                                                                  | 42 |
| Şekil 6.15. | Örnek 6.5: $k = 3$ ve $M = 2$ için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması . . . . .                                                                                  | 43 |
| Şekil 6.16. | Örnek 6.6: $k = 1$ ve $M = 2$ için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması . . . . .                                                                                  | 47 |
| Şekil 6.17. | Örnek 6.6: $k = 2$ ve $M = 2$ için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması . . . . .                                                                                  | 47 |
| Şekil 6.18. | Örnek 6.6: $k = 3$ ve $M = 2$ için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması . . . . .                                                                                  | 48 |

## TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana öneren, tez süresince değerli bilgi, rehberlik ve yakın ilgileriyle her zaman yanımda olan sayın hocam Prof. Dr. Ali KONURALP'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca öğrenim hayatım boyunca katkılarını esirgemeyen tüm Matematik Bölümü hocalarıma, desteğini her zaman hissettiren aileme ve arkadaşlarıma yürekten teşekkür ederim.

Mwangelwa MWABA  
Manisa, 2025



## ÖZET

### Yüksek Lisans Tezi

### Zayıf Tekil Çekirdeğe Sahip Fredholm Volterra İntegro-Diferansiyel ve İntegral Denklemlerin Sayısal Çözümleri Üzerine

MWANGELWA MWABA

Manisa Celal Bayar Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ali KONURALP

Bu tezde, zayıf tekil çekirdekli kesirli integro-diferansiyel denklemleri Chelyshkov Dalgacık Yaklaşım Yöntemi ile çözmeyi amaçlıyoruz.

Birinci bölüm, integro-diferansiyel denlemler, dalgacıkların ve kesirli integrasyonun tarihine ve bunların kesirli integro-diferansiyel denklemlerin çözümündeki rollerine dair kısa bir giriş sunmaktadır.

İkinci Bölüm’de, kesirli integrasyon ve türev alma konularına ilişkin bazı temel bilgiler sunulmuştur. Bu kapsamda, Gamma fonksiyonu, Riemann–Liouville kesirli integrali ve Caputo türevi ele alınmıştır.

Üçüncü Bölüm, Chelyshkov polinomları ve dalgacıkları kapsamaktadır. Yapılan kapsamlı literatür taraması, Chelyshkov dalgacıklarının zayıf tekil çekirdekli kesirli meriteden integro-diferansiyel denklemlerin çözümünde daha önce kullanılmadığını ortaya koymakta ve böylece bu tezin özgünlüğünü ortaya koymaktadır. Ayrıca bölüm, kesirli integrasyon için operasyonel matris kavramını tanıtmakta ve bir fonksiyonun kesirli integrasyonunun matris tabanlı bir yaklaşımla nasıl elde edilebileceğini göstermektedir.

Dördüncü bölümde, blok darbe fonksiyonlarının özelliklerinden yararlanılarak zayıf tekil çekirdekli kesirli integrallerin çözümü için bir sayısal yöntem önerilmektedir.

Beşinci bölüm, zayıf tekil çekirdekli kesirli integro-diferansiyel çözmek için dalgacık yöntemini sunmaktadır. Bu formülasyonda Volterra bileşeni, önceki bölümde tanıtilen yöntem kullanılarak çözülen zayıf tekil bir çekirdek içerir. Fredholm bileşeni ise bir çekirdek matrisinin, psi-fonksiyonlarından oluşturulan bir vektörün ve kesirli integrasyonun operasyonel matrisinin kullanılmasıyla ele alınmaktadır.

Altıncı bölümde, yaklaşık ve tam çözümler arasındaki mutlak hataları ile L-sonsuz hatalarını gösteren tablolar sunulmuştur. Bu tezde yalnızca altı temsili örneğe yer verilmiş olup, yaklaşık çözümler Mathematica ve Pandas yazılımı kullanılarak elde edilmiştir. Yöntemin doğruluğu bu altı sayısal örnekle doğrulanmış; Ek olarak, iki örneklerden, CAS dalgacığı ile karşılaştırılıp mutlak hata ve L-sonsuz hataları gösterilmiştir.



**Anahtar Kelimeler:** Chelyshkov dalgacıkları, Kesirli Analiz, Zayıf tekil çekirdek, Blok darbe fonksiyonları, ortogonal polinomları.

**2025, 52 sayfa**



## **ABSTRACT**

**M. Sc. Thesis**

### **On the Numerical Solutions of Fredholm-Volterra Integro-Differential and Integral Equations with Weakly Singular Kernel**

**MWANGELWA MWABA**

**Manisa Celal Bayar University  
Graduate School of Applied and Natural Sciences  
Department of Mathematics**

**Supervisor: Prof. Dr. Ali KONURALP**

In this thesis, we aim to solve a fractional integro-differential equation with a weakly singular kernel using the Chelyshkov Wavelets Collocation Method.

Chapter One presents the historical background and fundamental Integro-differential equations, concepts of fractional calculus and wavelet methods, as well as their roles in fractional integro-differential equations. The aim is to present the reasoning behind the wavelet-based method and to clarify its place within the scope of this thesis.

Chapter Two presents some information about Fractional integration and differentiation. This includes the Gamma function, Riemann-Liouville fractional integral and Caputo-derivative.

Chapter Three provides an overview of Chelyshkov polynomials and wavelets. A thorough literature review reveals that Chelyshkov wavelets have not previously been applied to the solution of fractional-order integro-differential equations with weakly singular kernels, thereby establishing the originality of this thesis. Furthermore, the chapter introduces the concept of an operational matrix for fractional integration, demonstrating how the fractional integration of a function can be achieved through a matrix-based approach.

Chapter Four presents a numerical method for solving fractional integrals with a weakly singular kernel using properties of block pulse functions.

Chapter Five presents the wavelet collocation method for solving fractional-order integro-differential equations. In this formulation, the Volterra component involves a weakly singular kernel, which is addressed using the technique introduced in the preceding chapter. The Fredholm component is handled through the construction of a kernel matrix, a vector formed from psi-functions, and an operational matrix of fractional integration.

Chapter six presents tables showing the absolute errors between the approximate and exact solutions and L-infinity errors. This thesis includes only six representative examples, with the approximate solutions obtained using Mathematica and Pandas software. The accuracy of the method has been verified through these seven numerical examples.

les. Furthermore, two examples have been compared with CAS wavelet using the absolute error and L-infinity errors.

**Keywords:** Chelyshkov wavelets, Fractional Calculus, Weakly singular kernel, block pulse functions, Orthogonal polynomials.

**2025, 52 pages**



## 1. GİRİŞ

İntegral denklemleri, bilinmeyen fonksiyon  $u(x)$ 'in integral işareti altında yer aldığı denklemler olarak tanımlanır. 1900'lerin başlarında Volterra, nüfus dinamiklerini incelerken bu yapıların türev içeren yeni bir türünü geliştirmiş ve bunlara integro-diferansiyel denklemler adı verilmiştir. Bu denklemlerde bilinmeyen fonksiyon bir tarafta türevli biçimde yer alırken, diğer tarafta integral işareti altında bulunur. Fizik ve biyolojide karşılaşılan birçok problem bu tür denklemlerle modellenebilir. Ayrıca, diferansiyel denklemlerden integral denklemlere geçiş sürecinde, integro-diferansiyel denklemler doğal bir ara aşama olarak karşımıza çıkar [18].

Örneğin aşağıdaki denklemler, integro-diferansiyel yapılara tipik örneklerdir:

$$(i) \quad u'(x) = x - \int_0^x (x-t)u(t) dt, \quad u(0) = 0$$

$$(ii) \quad u'(x) = x - \int_0^1 e^{x-t}u(t) dt, \quad u(0) = 0$$

Burada, integral sınırlarının değişken olduğu denklemler Volterra tipi, sabit sınırlarla verilenler ise Fredholm tipi olarak adlandırılır.

Kesirli analiz, fonksiyonların yalnızca tam sayı mertebelerinde değil, kesirli mertebelerde de türev ve integralini inceleyen bir matematik dalıdır. Başka bir deyişle, “yarım türev” veya “kesirli integral” gibi kavramların ne anlama geldiğini araştırır. Bu fikir ilk kez 1695'te L'Hôpital'ın Leibniz'e yazdığı bir mektupta ortaya çıkmıştır. L'Hôpital, bir fonksiyonun yarım mertebeden türevinin ne olacağını sormuş; Leibniz ise, “İlk bakışta bir paradoks gibi görünse de, bir gün faydalı olabilir” diyerek yanıtlamıştır. Zamanla bu merak pek çok matematikçinin ilgisini çekmiş ve 1819'da Lacroix, kesirli türev kavramını içeren ilk akademik yayını yapmıştır [13–15].

Dalgacık yöntemleri ise fonksiyonları ve verileri farklı ölçeklerde temsil etmeye yarayan güçlü araçlardır. Fourier analizinin ani değişimleri yakalamakta yetersiz kaldığı durumlarda, dalgacıklar daha esnek ve başarılı çözümler sunar. 1980'lerden itibaren gelişen modern dalgacık teorisi, sinyal işleme, görüntüleme, mühendislik, fizik ve diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri gibi birçok alanda yaygın bir uygulama alanı bulmuştur [8].

Dalgacık yöntemleri; adi, kısmi ve kesirli diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılmıştır. Son yıllarda yapılan çalışmalar, zayıf tekil çekirdekli kesirli integro-diferansiyel denklemlerin çözümünde dalgacık yöntemlerinin yüksek doğruluk ve düşük hesaplama maliyeti sağladığını göstermektedir. Bu kapsamda Cos ve Sin (CAS) dalgacık yöntemi [1, 2], Second Chebyshev wavelets (SCW) yöntemi [3], Taylor dalgacıkları temelli hızlı algoritmalar [4], Euler dalgacıkları yöntemi [5], Bell dalgacıkları temelli yöntem [6] ve Legendre dalgacıkları yöntemi [7] gibi çeşitli yaklaşımlar geliştirilmiştir.

Bu tezde, zayıf tekil çekirdekli kesirli integro-diferansiyel denklemler Chelyshkov dalgacık yöntemi kullanarak el alınacaktır.



## 2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde Gama fonksiyonu, Riemann–Liouville kesirli integrali ve Caputo kesirli türevi tanımları verilmektedir.

### 2.1. Gama Fonksiyonu

Faktöriyel fonksiyonu, pozitif tamsayılar kümesinde,  $n \in \mathbb{Z}^+$ , tanımlı olup,

$$n! = \prod_{k=1}^n k$$

şeklinde ifade edilir.

Gama fonksiyonu ise,  $\Gamma(z)$ , faktöriyel kavramının analitik devamı olarak, tanım kümesini negatif tam sayılar hariç tüm karmaşık sayıları yani  $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$  kümesini kapsayacak şekilde genelleştirir. Fonksiyon, gerçel kısmı pozitif ( $\text{Re}(z) > 0$ ) olan  $z$  kompleks sayı değerleri için Euler’in ikinci tür integrali ile

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Bu iki fonksiyon arasındaki temel ilişki, herhangi bir pozitif  $n$  tamsayısı için geçerli olan

$$\Gamma(n+1) = n!$$

eşitliğidir.

### Temel Özellikler

(i)  $x \in \mathbb{R}^+$  için Gama fonksiyonu aşağıdaki tekrarlama bağıntısını sağlar.

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$$

(ii)  $x \in \mathbb{Z}^+$  için Gama fonksiyonu faktöriyel yardımıyla ifade edilebilir.

$$\Gamma(x) = (x-1)! \quad (2.2)$$

### 2.2. Riemann-Liouville Kesirli İntegrali

Tekrarlanan integrallerin bilimde, mühendislikte ve diğer alanlarda kullanımı son derece önemlidir. Augustin-Louis Cauchy [23] bu tür integralleri basitleştirerek indirgeme formülünü geliştirmiştir.

**Tanım 2.2.1.**  $u \in C([0, t])$  ve  $t > 0$  olmak üzere integrasyonun  $n \in \mathbb{N}$  kez uygulanması durumunda  $u(t)$ 'nin  $n$  katlı integrali, indirgeme formülüyle

$$\int_0^t \left( \int_0^{\tau_n} \left( \cdots \left( \int_0^{\tau_2} u(\tau_1) d\tau_1 \right) \cdots \right) d\tau_{n-1} \right) d\tau_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} u(\tau) d\tau,$$

$$J^n u(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} u(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

elde edilir. Bu eşitlik,  $n$  katlı tekrarlı integrali tek bir integral ile ifade etmeye yarar ve  $J^n$  operatörüyle gösterilebilir [15, 23].  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  için bu formül (2.2) ifadesi kullanılarak genelleştirilebilir ve Riemann–Liouville kesirli integrali

$$J^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} u(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

olarak elde edilir [1–4]. Bu tanım klasik tekrarlanan integrali keyfi pozitif mertebelere genelleştirir. Kesirli mertebe  $\alpha = 0$  olduğunda Riemann–kesirli integrali basitçe

$$J^0 u(t) = u(t)$$

olarak yazılır.

### Riemann–Liouville kesirli integralinin bazı özellikleri

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$  ve  $a, b \in \mathbb{R}$  için  $u, w \in C([0, t])$  olmak üzere [24]:

i) Doğrusallık özelliği

$$J^\alpha (au(t) + bw(t)) = aJ^\alpha u(t) + bJ^\alpha w(t)$$

ii) Yarı grup özelliği

$$J^\alpha [J^\beta u(t)] = J^{\alpha+\beta} u(t)$$

iii) Değişme özelliği

$$J^\alpha (J^\beta u(t)) = J^\beta (J^\alpha u(t))$$

### 2.3. Caputo Kesirli Türevi

$\alpha, t \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere kesirli operatör

$$D_*^\alpha u(t) = \begin{cases} \frac{d^r u(t)}{dt^r}, & \alpha = r \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{\Gamma(r-\alpha)} \int_0^t \frac{u^{(r)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-r+1}} d\tau, & 0 \leq r-1 < \alpha < r \end{cases} \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır ve bu operatör Caputo kesirli türevi olarak adlandırılır [1,3,16,17,23].

Riemann–Liouville kesirli integrali  $J^{r-\alpha}$  ile klasik türev  $D^r$  kullanılarak da

$$D_*^\alpha u(t) = J^{r-\alpha} D^r u(t) \quad (2.6)$$

ifade edilebilir ve  $D^r$ ,  $r$ . mertebeden standart türev operatörüdür.

#### Caputo Kesirli Türevinin bazı özellikleri

$t, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$  ve  $u, w : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonları için aşağıdaki özellikler geçerlidir [15,24].

i) Doğrusallık özelliği

$$D_*^\alpha [a u(t) + b w(t)] = a D_*^\alpha u(t) + b D_*^\alpha w(t),$$

Burada  $a, b \in \mathbb{R}$  dir.

ii) Yarı grup özelliği

$$D_*^\alpha [D_*^\beta u(t)] = D_*^{\alpha+\beta} u(t).$$

Riemann–Liouville integral operatörü ile Caputo kesirli türev operatörü, aşağıda verilen iki temel ilişkiyi sağlar.

(iii)

$$D_*^\alpha J^\alpha u(t) = u(t). \quad (2.7)$$

(iv)

$$J^\alpha D_*^\alpha u(t) = u(t) - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{u^{(k)}(0^+) t^k}{k!}, \quad t > 0. \quad (2.8)$$



### 3. CHELYSHKOV DALGACIKLARI

#### 3.1. Chelyshkov Polinomları

Son zamanlarda Vladimir S. Chelyshkov tarafından tanıtılan Chelyshkov polinomları ortogonal polinomlar sınıfına aittir.

$$H_{M,m}(t) = \sum_{j=0}^{M-m} a_{j,m} t^{m+j}, \quad m = 0, 1, \dots, M \quad (3.1)$$

ile tanımlanan Chelyshkov polinomları

$$a_{j,m} = (-1)^j \binom{M-m}{j} \binom{M+m+j+1}{M-m} \quad (3.2)$$

katsayıları ile oluşturulur. Bu tanımdan,  $m$ -inci Chelyshkov polinomunun  $H_{M,m}(t)$  derecesinin her zaman  $M$  olduğu anlaşılmaktadır. Bu özellik, derecesi indisi  $m$  ile aynı olan Legendre polinomları gibi diğer klasik ortogonal polinomlardan Chelyshkov polinomlarını ayırmaktadır [9]. Chelyshkov polinomları  $[0, 1]$  aralığında ortogonal olup ortogonallik özelliği

$$\int_0^1 H_{M,m}(t) H_{M,n}(t) dt = \begin{cases} \frac{1}{m+n+1}, & m = n, \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (3.3)$$

şeklinde verilir.

**Örnek 3.1.**  $M = 3$  için Chelyshkov polinomlarını oluşturalım. Genel ifade

$$H_{M,m}(t) = \sum_{j=0}^{M-m} a_{j,m} t^{m+j}$$

şeklindedir.

Önce  $H_{3,0}(t)$  polinomunu hesaplayalım:

$$H_{3,0}(t) = \sum_{j=0}^3 a_{j,0} t^j.$$

Katsayılar aşağıdaki şekilde bulunur:

$$a_{0,0} = (-1)^0 \binom{3}{0} \binom{4}{3} = 4$$

$$a_{1,0} = (-1)^1 \binom{3}{1} \binom{5}{3} = -30$$

$$a_{2,0} = (-1)^2 \binom{3}{2} \binom{6}{3} = 60$$

$$a_{3,0} = (-1)^3 \binom{3}{3} \binom{7}{3} = -35.$$

Bu katsayılar yerine yazıldığında

$$H_{3,0}(t) = 4 - 30t + 60t^2 - 35t^3$$

elde edilir. Benzer hesaplamalar yapıldığında diğer polinomlar

$$H_{3,1}(t) = 10t - 30t^2 + 21t^3$$

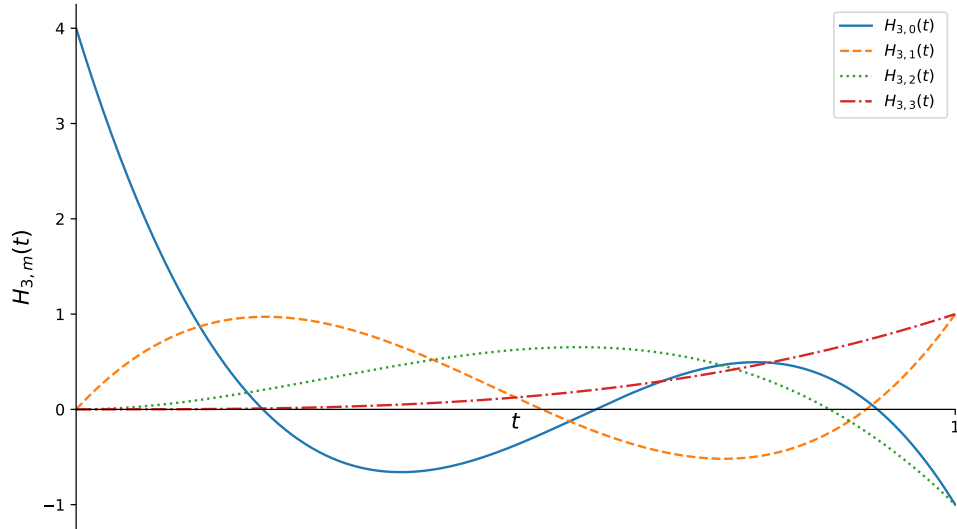
$$H_{3,2}(t) = 6t^2 - 7t^3$$

$$H_{3,3}(t) = t^3.$$

biçiminde bulunur. Dolayısıyla  $M = 3$  için Chelyshkov polinomları kümesi

$$\{H_{3,0}(t), H_{3,1}(t), H_{3,2}(t), H_{3,3}(t)\}$$

şeklindedir.



Şekil 3.1.  $M = 3$  için Chelyshkov Polinomlarının Grafiği

### 3.2. Chelyshkov Dalgacıkları

Chelyshkov dalgacıkları  $\psi_{nm}(t)$ , Chelyshkov polinomları  $H_{M,m}(t)$  kullanılarak

$$\psi_{nm}(t) = \begin{cases} \sqrt{2m+1} 2^{k/2} H_{M,m}(2^k t - n), & \frac{n}{2^k} \leq t < \frac{n+1}{2^k}, \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (3.4)$$

bu biçimde tanımlanır ve burada  $n = 0, 1, \dots, 2^k - 1$  öteleme parametresini,  $k \in \mathbb{N}$  genişleme parametresini,  $t \in [0, 1]$  normalleştirilmiş zaman değişkenini ifade etmektedir ve  $\sqrt{2m+1} 2^{k/2}$  normalizasyon faktörü, Chelyshkov dalgacıklarının  $[0, 1]$  aralığında ortonormal bir baz oluşturmasını sağlar [9–11].

Herhangi bir kare-integrallenebilir fonksiyon  $u(t) \in [0, 1]$  Chelyshkov dalgacıkları cinsinden

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}} C_{nm} \psi_{nm}(t) \quad (3.5)$$

ifade edilir.

Pratikte bu açılım katsayı vektörü  $\mathbf{C}$  ve dalgacık vektörü  $\Psi(t)$

$$\mathbf{C} = [C_{00} \ \cdots \ C_{0M} \ \cdots \ C_{(2^k-1)0} \ \cdots \ C_{(2^k-1)M}]^T \quad (3.6)$$

$$\Psi(t) = [\psi_{00}(t) \ \cdots \ \psi_{0M}(t) \ \cdots \ \psi_{(2^k-1)0}(t) \ \cdots \ \psi_{(2^k-1)M}(t)]^T \quad (3.7)$$

olmak üzere

$$u(t) \simeq u_{k,M}(t) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M C_{nm} \psi_{nm}(t) = \mathbf{C}^T \Psi(t) \quad (3.8)$$

şeklinde yazılır.

Her iki vektörün boyutları  $2^k(M+1) \times 1$  olup, katsayılar  $C_{nm}$  fonksiyon  $u(t)$  ile Chelyshkov dalgacıkları arasındaki iç çarpım kullanarak

$$C_{nm} = \langle u(t), \psi_{nm}(t) \rangle = \int_0^1 u(t) \psi_{nm}(t) dt \quad (3.9)$$

bulunur.

**Örnek 3.2.**  $M = 2$  ve  $k = 1$  için Chelyshkov dalgacıklarını oluşturalım

Toplam dalgacık sayısı

$$m' = 2^k(M+1) = 2 \times 3 = 6$$

Öteleme parametresi  $n = 0, 1$  değerlerini alırken, indeks  $m = 0, 1, 2$  değerlerini alır. Dalgacık tanımına yerleştirildiğinde

$$\psi_{00}(t) = \begin{cases} \sqrt{2} (3 - 24t + 40t^2), & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\psi_{01}(t) = \begin{cases} \sqrt{6}(8t - 20t^2), & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

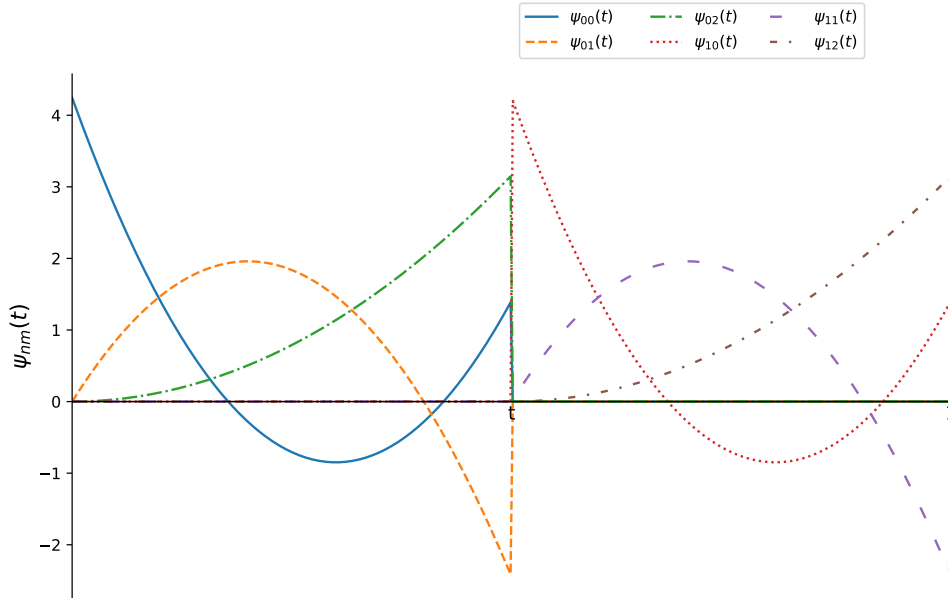
$$\psi_{02}(t) = \begin{cases} 4\sqrt{10}t^2, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\psi_{10}(t) = \begin{cases} \sqrt{2}(3 - 12(-1 + 2t) + 10(-1 + 2t)^2), & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\psi_{11}(t) = \begin{cases} \sqrt{6}(4(-1 + 2t) - 5(-1 + 2t)^2), & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\psi_{12}(t) = \begin{cases} \sqrt{10}(-1 + 2t)^2, & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

elde edilir.



Şekil 3.2. Örnek 3.2:  $[0, 0.5)$  aralığında  $\psi_{00}, \psi_{01}, \psi_{02}$  ve  $[0.5, 1)$  aralığında  $\psi_{10}, \psi_{11}, \psi_{12}$  Chelyshkov dalgacıklarının grafikleri.

### 3.3. Kesirli İntegrasyon için Operasyonel Matris

Dalgacık vektörü  $\Psi(t)$ 'nin integrali, Chelyshkov operasyonel matrisi kullanarak

yaklaşık olarak

$$(J^\alpha \Psi)(t) \simeq \mathbf{P}^\alpha \Psi(t) \quad (3.10)$$

hesaplanabilir ve üstelik bu yöntem  $\Psi(t)$  içindeki her fonksiyonun kesirli integralini ayrı ayrı hesaplamaya kıyasla daha kolay ve hızlıdır.  $m' = 2^k(M+1)$  olmak üzere  $\mathbf{P}^\alpha$ ,  $m' \times m'$ -boyutlu kare matrisini ifade eder.  $\mathbf{P}^\alpha$ 'yı elde etmek için  $\Phi$  ve  $\mathbf{F}^\alpha$  matrislerine ihtiyaç vardır.

$\Phi$  matrisi de  $m' \times m'$  boyutlu bir tersinir matristir ve bu matris  $\psi$  fonksiyonların sıralama noktalarındaki değerlerini içerir. Tersinirliği sağlanabilmesi amacıyla sıralama noktaları

$$t_i = \frac{2i-1}{2m'}, \quad i = 1, 2, \dots, m'$$

olarak seçilmiştir. Her sütunda,  $\psi_{nm}$  fonksiyonları  $n = 0, \dots, 2^k - 1$  ve  $m = 0, \dots, M$  aralıklarında yerleştirilirken sıralama noktalarının sabit tutulur. Bu doğrultuda  $\Phi$  matrisi aşağıdaki biçimde tanımlanır.

$$\Phi = \begin{pmatrix} \psi_{00}(t_1) & \psi_{00}(t_2) & \psi_{00}(t_3) & \cdots & \psi_{00}(t_{m'}) \\ \psi_{01}(t_1) & \psi_{01}(t_2) & \psi_{01}(t_3) & \cdots & \psi_{01}(t_{m'}) \\ \psi_{02}(t_1) & \psi_{02}(t_2) & \psi_{02}(t_3) & \cdots & \psi_{02}(t_{m'}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{0M}(t_1) & \psi_{0M}(t_2) & \psi_{0M}(t_3) & \cdots & \psi_{0M}(t_{m'}) \\ \psi_{10}(t_1) & \psi_{10}(t_2) & \psi_{10}(t_3) & \cdots & \psi_{10}(t_{m'}) \\ \psi_{11}(t_1) & \psi_{11}(t_2) & \psi_{11}(t_3) & \cdots & \psi_{11}(t_{m'}) \\ \psi_{12}(t_1) & \psi_{12}(t_2) & \psi_{12}(t_3) & \cdots & \psi_{12}(t_{m'}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{1M}(t_1) & \psi_{1M}(t_2) & \psi_{1M}(t_3) & \cdots & \psi_{1M}(t_{m'}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{(2^k-1)M}(t_1) & \psi_{(2^k-1)M}(t_2) & \psi_{(2^k-1)M}(t_3) & \cdots & \psi_{(2^k-1)M}(t_{m'}) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

$\mathbf{F}^\alpha$  matrisini elde edebilmek için blok darbe fonksiyonlarına ihtiyaç vardır.

$m'$ -elemanlı blok darbe fonksiyonları

$$b_i(t) = \begin{cases} 1, & \frac{i}{m'} \leq t < \frac{i+1}{m'}, \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, \dots, m' - 1$$

şeklinde tanımlanır ve bu fonksiyonların özellikleri

(i) Disjoint Özelliği

$$b_i(t) b_j(t) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ b_i(t), & i = j \end{cases}$$

(ii) Ortogonalite Özelliği

$$\int_0^1 b_i(t) b_j(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \frac{1}{m'}, & i = j \end{cases}$$

olarak verilebilir. Bu özellikler ve Laplace dönüşümü kullanılarak blok darbe fonksiyonlarının kesirli integrasyonu

$$(J^\alpha \mathbf{B})(t) = \mathbf{F}^\alpha \mathbf{B}(t) \quad (3.12)$$

şeklinde tanımlanır yani blok darbe fonksiyonlarının kesirli integrali matris formunda hesaplanabilir [1, 3–5].

Burada

$$\mathbf{B}(t) = [b_0(t), b_1(t), \dots, b_{m'-1}(t)]^T$$

yani  $\mathbf{B}(t)$  blok darbe fonksiyonlarından oluşan  $m' \times 1$  boyutlu bir vektörü ifade eder. Blok darbe fonksiyonların için de operasyon matrisi

$$\mathbf{F}^\alpha = \frac{1}{m'^\alpha} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha + 2)} \begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{m'-1} \\ 0 & 1 & \xi_1 & \cdots & \xi_{m'-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \xi_{m'-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ve katsayılar

$$\xi_i = (i + 1)^{\alpha+1} - 2i^{\alpha+1} + (i - 1)^{\alpha+1}$$

şeklinde tanımlanır [19]. Bu yaklaşım kesirli integrasyon işlemini matris-vektör çarpımı biçiminde ifade eder, bu sayede hesaplamalar kolaylaştırılır .

Chelyshkov dalgacık fonksiyonları blok darbe fonksiyonları cinsinden açılımı

$$\Psi(t) \simeq \Phi \mathbf{B}(t) \quad (3.13)$$

yazılabilir.

(3.13) kullanarak  $\Psi(t)$ 'nin kesirli integrali

$$J^\alpha \Psi(t) \simeq J^\alpha (\Phi \mathbf{B}(t)) = \Phi J^\alpha (\mathbf{B}(t)) = \Phi \mathbf{F}^\alpha \mathbf{B}(t) \quad (3.14)$$

elde edilir.

(3.10) ve (3.14) kullanarak

$$\mathbf{P}^\alpha \Psi(t) = \mathbf{P}^\alpha \Phi \mathbf{B}(t) = \Phi \mathbf{F}^\alpha \mathbf{B}(t)$$

bulunur.

(3.13) kullanarak  $\mathbf{B}(t)$  vektörü

$$\mathbf{B}(t) = \Phi^{-1} \Psi(t)$$

yazılabilir ve böylece kesirli integrasyon için Chelyshkov operasyonel matrisi

$$\mathbf{P}^\alpha = \Phi \mathbf{F}^\alpha \Phi^{-1} \quad (3.15)$$

biçimde elde edilir.

#### 4. ZAYIF TEKİL İNTEGRAL İÇİN SAYISAL YÖNTEM

Bir tekillik içeren integral denklemi, integrasyon sınırlarından biri veya her ikisi sonsuz olduğunda veya çekirdek fonksiyonu  $k(x, t)$  integrasyon aralığındaki bir veya daha fazla noktada sonsuz olduğunda ortaya çıkan bir denklemdir [18].

$$I(t) = \int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^\beta} ds, \quad 0 \leq t < 1, \quad 0 < \beta < 1, \quad (4.1)$$

Denklem (4.1)  $t = s$  noktasında tekillik gösterse de, bu integrali  $[0, 1)$  halen hesaplanabilir. Bu nedenle bu denklemi zayıf tekillik içeren integral denklem olarak adlandırılır. Bu bölümde, bu tür denklemlerin sayısal çözümü, blok darbe fonksiyonları ve Chelyshkov dalgacık arasındaki ilişkisi kullanılarak verilmektedir.

Denklemler (3.8) ve (3.13) kullanarak  $u(s)$  yaklaşık olarak

$$u(s) \simeq \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Psi}(s) = \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Phi} \mathbf{B}(s) \quad (4.2)$$

şeklinde ifade edilebilir. (4.2) denklemini (4.1) içine yerleştirirsek

$$I(t) \simeq \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Phi} \int_0^t \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^\beta} ds, \quad (4.3)$$

olarak elde edilir. CAS dalgacıkları için [1]'de önerilen eşitlik burada kullanıldığında

$$\mathbf{V}(t) = \int_0^t \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^\beta} ds,$$

şeklinde alınır ve zayıf tekillik içeren integral matris biçiminde

$$I(t) = \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Phi} \mathbf{V}(t)$$

yazılabilir. Vektör  $\mathbf{V}(t)$ , blok darbe fonksiyonları kullanarak



$$\mathbf{V}(t) = \int_0^t \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^\beta} ds = \int_0^{\frac{1}{m'}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^\beta} ds + \int_{\frac{1}{m'}}^{\frac{2}{m'}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^\beta} ds + \dots + \int_{\frac{m'-1}{m'}}^t \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^\beta} ds.$$

hesaplanabilir ve böylece integrasyon aralığı  $m'$  alt aralığa bölünmüş olur. Gösterim amacıyla, ilk integralin hesaplanışını ele alalım. Blok darbe fonksiyonları kullanarak integral şu biçimde

$$\int_0^{\frac{1}{m'}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^\beta} ds = (1, 0, 0, \dots)^T \int_0^{\frac{1}{m'}} \frac{1}{(t-s)^\beta} ds$$

elde edilir. Değişken değiştirme  $u = t - s$  uygulandığında  $du = -ds$  ve  $s = 0$  için  $u = t$ ,  $s = \frac{1}{m'}$  için de  $u = t - \frac{1}{m'}$  olur. Böylece

$$(1, 0, 0, \dots)^T \int_{t-\frac{1}{m'}}^t u^{-\beta} du = \left( \frac{t^{1-\beta} - (t - \frac{1}{m'})^{1-\beta}}{1-\beta}, 0, 0, \dots \right)^T$$

bulunur.

Benzer şekilde ikinci integral için de

$$\int_0^t \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^\beta} ds = \int_0^{\frac{1}{m'}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^\beta} ds + \int_{\frac{1}{m'}}^{\frac{2}{m'}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^\beta} ds$$

Blok darbe fonksiyonları kullanarak integral

$$(1, 0, 0, \dots)^T \int_0^{\frac{1}{m'}} \frac{1}{(t-s)^\beta} ds + (0, 1, 0, \dots)^T \int_{\frac{1}{m'}}^{\frac{2}{m'}} \frac{1}{(t-s)^\beta} ds$$

olarak elde edilir. Değişken değiştirme yöntemi uygulandığında

$$\left( -\frac{(t - \frac{1}{m'})^{1-\beta} - t^{1-\beta}}{1-\beta}, -\frac{(t - \frac{2}{m'})^{1-\beta} - (t - \frac{1}{m'})^{1-\beta}}{1-\beta}, 0, \dots \right)^T$$

elde edilir. Genel olarak,  $\mathbf{V}(t)$  vektörü aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

$$\mathbf{V}(t) = \left( -\frac{(t - \frac{1}{m'})^{1-\beta} - t^{1-\beta}}{1-\beta}, -\frac{(t - \frac{2}{m'})^{1-\beta} - (t - \frac{1}{m'})^{1-\beta}}{1-\beta}, \dots, -\frac{(t - \frac{i}{m'})^{1-\beta} - (t - \frac{i-1}{m'})^{1-\beta}}{1-\beta}, \dots \right)^T$$

Özel olarak  $t = 0$  için

$$\mathbf{V}(0) = (0, 0, \dots, 0)^T$$

sıfır vektörü elde edilir.

## 5. ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Bu bölümde, zayıf tekillik bir çekirdek içeren bir kesirli integro-diferansiyel denklemin sayısal çözümü sunulmaktadır. Başlangıç koşulu ile verilen problemde

$$D_*^\alpha u(t) = \lambda_1 \int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^\beta} ds + \lambda_2 \int_0^1 k(t,s)u(s) ds + f(t) \quad (5.1)$$

$$u(0) = 0 \quad (5.2)$$

$D_*^\alpha$  Caputo kesirli türevini,  $u(t)$  bilinmeyen fonksiyonu,  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  verilen sabitleri,  $k(t,s)$  çekirdek fonksiyonunu ve  $f(t)$  bilinen bir fonksiyonu ifade eder.

$u(t)$  fonksiyonunun Caputo kesirli türevi matris biçiminde yaklaşık olarak

$$D_*^\alpha u(t) \simeq \mathbf{C}^T \mathbf{\Psi}(t) \quad (5.3)$$

yazılabilir.

Denklem (2.8), (3.10) ve (5.3) kullanarak  $u(t)$  matris formunda

$$u(t) = J^\alpha (D_*^\alpha u(t)) \simeq J^\alpha (\mathbf{C}^T \mathbf{\Psi}(t)) = \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \mathbf{\Psi}(t) \quad (5.4)$$

ifade edilebilir. Blok darbe fonksiyonları ve Chelyshkov dalgacıkları arasındaki ilişki kullanarak ve denklem (3.13) (5.4)'e yerine konularak

$$u(t) \simeq u_{m'}(t) = \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \mathbf{\Phi} \mathbf{B}(t) \quad (5.5)$$

elde edilir.

Denklem (5.5), (4.1)'e yerine konulduğunda, zayıf tekillikli integral yaklaşık olarak

$$I(t) = \int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^\beta} ds \simeq \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \mathbf{\Phi} \mathbf{V}(t) \quad (5.6)$$

şeklinde alınır. Çekirdek fonksiyon  $k(t,s)$  de matris biçiminde yaklaşık olarak

$$k(t,s) \simeq \mathbf{\Psi}(t)^T \mathbf{W} \mathbf{\Psi}(s) \quad (5.7)$$

şeklinde ifade edilebilir.  $\mathbf{W}$   $m' \times m'$ -boyutlu bir kare matris olup her bir elemanı aşağıdaki çift katlı integral kullanarak

$$\int_0^1 \int_0^1 \mathbf{\Psi}_{ni}(t) \mathbf{\Psi}_{lj}(s) k(t,s) ds dt \quad (5.8)$$

ile hesaplanır. Burada indeksler,

$$n = 0, \dots, 2^k - 1, \quad i = 0, \dots, M, \quad l = 0, \dots, 2^k - 1, \quad j = 0, \dots, M.$$

olarak alınmıştır. Buna göre  $\mathbf{W}$  matrisi açıkça

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \int_0^1 \int_0^1 \psi_{00}(t) \psi_{00}(s) k(t,s) ds dt & \cdots & \int_0^1 \int_0^1 \psi_{00}(t) \psi_{(2^k-1)M}(s) k(t,s) ds dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \int_0^1 \psi_{(2^k-1)M}(t) \psi_{00}(s) k(t,s) ds dt & \cdots & \int_0^1 \int_0^1 \psi_{(2^k-1)M}(t) \psi_{(2^k-1)M}(s) k(t,s) ds dt \end{pmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Chelyshkov dalgacıkları ortonormallik özelliğine sahip olduğundan, iç çarpımları

$$\int_0^1 \mathbf{\Psi}(s) \mathbf{\Psi}(s)^T ds = \mathbf{I} \quad (5.9)$$

olup  $\mathbf{I}_{m' \times m'}$  birim matristir. Denklem (5.4), (5.7) ve (5.9) kullanarak Fredholm integrali

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 k(t, s) u(s) ds &\simeq \int_0^1 \Psi(t)^T \mathbf{W} \Psi(s) (\mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \Psi(s)) ds \\
 &= \Psi(t)^T \mathbf{W} \left( \int_0^1 \Psi(s) \Psi(s)^T ds \right) \mathbf{C} \mathbf{P}^\alpha \\
 &= \Psi(t)^T \mathbf{W} \mathbf{I} \mathbf{C} \mathbf{P}^\alpha \\
 &= \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \mathbf{W}^T \Psi(t)
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

şeklinde elde edilir.

Denklem (5.3), (5.6) ve (5.10) (5.1)'e yerine konularak

$$\mathbf{C}^T \Psi(t) = \lambda_1 \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \Phi \mathbf{V}(t) + \lambda_2 \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \mathbf{W}^T \Psi(t) + f(t) \tag{5.11}$$

lineer cebirsel sistemi oluşturulur ve bu sistem

$$t_i = \frac{2i-1}{2m'}, \quad i = 1, 2, \dots, m'$$

sıralama noktalarında değerlendirildiğinde

$$\mathbf{C}^T \Psi(t_i) = \lambda_1 \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \Phi \mathbf{V}(t_i) + \lambda_2 \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \mathbf{W}^T \Psi(t_i) + f(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, m' \tag{5.12}$$

şeklinde yazılabilir.

Son olarak, hesaplanan katsayı vektörü  $\mathbf{C}^T$  denklem (5.4)'e yerine konularak yaklaşık çözüm  $u(t)$  elde edilir.

## 6. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde, önerilen yöntemin doğruluğunu ve geçerliliğini göstermek için Chelyshkov dalgacıkları kullanılır. Temel amaç, Chelyshkov dalgacıklarının etkinliğini vurgulamaktır. Yaklaşık çözümlerin doğruluğunu değerlendirmek için klasik mutlak ve  $L_\infty$  hataları analizi yapılır ve sonuçlar, tablolar ve grafiklerle yorumlanır.

Mutlak hata

$$E(t_i) = |u(t_i) - u_{m'}(t_i)|, \quad i = 1, 2, \dots, m'$$

biçimde tanımlanabilir.

$L_\infty$  hatası (veya maksimum norm hatası), tüm noktalar arasındaki mutlak hataların içeri-sinden en büyük olanı olarak tanımlanır:

$$L_\infty = \max_{1 \leq i \leq m'} |u(t_i) - u_{m'}(t_i)|$$

**Örnek 6.1.**  $u(0) = 0$  başlangıç koşulu ile birlikte

$$D_*^{0.75} u(t) = \int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \int_0^1 t s u(s) ds + f(t)$$

şeklindeki integro-diferensiyel denklemi göz önüne alalım. Bu denklemin analitik çözümü  $u(t) = t^{\frac{7}{2}}$  şeklindedir. Bu problemde

$$f(t) = \frac{105\sqrt{\pi}}{16\Gamma(3.75)} t^{2.75} - \frac{35\pi}{128} t^4 - \frac{2t}{11}$$

biçiminde tanımlanmıştır [22].

Chelyshkov dalgacıkları yöntemi, farklı  $k$  ve  $M = 2$  değerleri için uygulanacak.  $\lambda_1 = 1$  ve  $\lambda_2 = 1$  sabit katsayılar olup,  $k = 1$  ve  $M = 2$  olarak seçildiğinde,

$$m' = 2^k(M + 1) = 6$$

elde edilir ve üstelik öteleme parametresi  $n = 0, 1$  değerlerini alırken, indeks  $m = 0, 1, 2$  değerlerini alır. Buna göre,  $\mathbf{W}$ ,  $\Phi$ ,  $\mathbf{F}$  ve  $\mathbf{P}$  matrisleri  $6 \times 6$  boyutunda,  $\Psi$  ve  $\mathbf{C}^T$  ise  $6 \times 1$  boyutundadır. Böylece

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \int_0^1 \int_0^1 \psi_{00}(t) \psi_{00}(s) t s ds dt & \cdots & \int_0^1 \int_0^1 \psi_{00}(t) \psi_{12}(s) t s ds dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \int_0^1 \psi_{02}(t) \psi_{00}(s) t s ds dt & \cdots & \int_0^1 \int_0^1 \psi_{02}(t) \psi_{12}(s) t s ds dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \int_0^1 \psi_{10}(t) \psi_{00}(s) t s ds dt & \cdots & \int_0^1 \int_0^1 \psi_{10}(t) \psi_{12}(s) t s ds dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \int_0^1 \psi_{12}(t) \psi_{00}(s) t s ds dt & \cdots & \int_0^1 \int_0^1 \psi_{12}(t) \psi_{12}(s) t s ds dt \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{384} & \frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{128} & \frac{1}{96\sqrt{3}} & \frac{5}{384} & \frac{7\sqrt{\frac{5}{3}}}{384} \\ 0 & \frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{128} & \frac{5}{128} & \frac{\sqrt{5}}{96} & \frac{5\sqrt{\frac{5}{3}}}{128} & \frac{35}{384} \\ 0 & \frac{1}{96\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{5}}{96} & \frac{1}{72} & \frac{5}{96\sqrt{3}} & \frac{7\sqrt{5}}{288} \\ 0 & \frac{5}{384} & \frac{5\sqrt{\frac{5}{3}}}{128} & \frac{5}{96\sqrt{3}} & \frac{25}{384} & \frac{35\sqrt{\frac{5}{3}}}{384} \\ 0 & \frac{7\sqrt{\frac{5}{3}}}{384} & \frac{35}{384} & \frac{7\sqrt{5}}{288} & \frac{35\sqrt{\frac{5}{3}}}{384} & \frac{245}{1152} \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur.

$$\Phi = \begin{pmatrix} \psi_{00}(t_1) & \psi_{00}(t_2) & \psi_{00}(t_3) & \psi_{00}(t_4) & \psi_{00}(t_5) & \psi_{00}(t_6) \\ \psi_{01}(t_1) & \psi_{01}(t_2) & \psi_{01}(t_3) & \psi_{01}(t_4) & \psi_{01}(t_5) & \psi_{01}(t_6) \\ \psi_{02}(t_1) & \psi_{02}(t_2) & \psi_{02}(t_3) & \psi_{02}(t_4) & \psi_{02}(t_5) & \psi_{02}(t_6) \\ \psi_{10}(t_1) & \psi_{10}(t_2) & \psi_{10}(t_3) & \psi_{10}(t_4) & \psi_{10}(t_5) & \psi_{10}(t_6) \\ \psi_{11}(t_1) & \psi_{11}(t_2) & \psi_{11}(t_3) & \psi_{11}(t_4) & \psi_{11}(t_5) & \psi_{11}(t_6) \\ \psi_{12}(t_1) & \psi_{12}(t_2) & \psi_{12}(t_3) & \psi_{12}(t_4) & \psi_{12}(t_5) & \psi_{12}(t_6) \end{pmatrix}$$

$\Phi$  matris (3.11) ifadesinde tanımlanmıştır. Ters alındığında

$$\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{8} & \frac{1}{8\sqrt{10}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{12\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{6\sqrt{10}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{8} & \frac{11}{8\sqrt{10}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{8\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{8} & \frac{1}{8\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{12\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{6\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{8} & \frac{11}{8\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Blok darbe fonksiyonların kesirli integraline ait operasyonel matrisin oluşturulması için, önce katsayılar ( $\xi_i$ ) aşağıdaki formülü kullanılarak

$$\xi_i = (i+1)^{\alpha+1} - 2i^{\alpha+1} + (i-1)^{\alpha+1}$$

hesaplanır.

$\alpha = 0.75$  yerine konulduğunda katsayılar:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= (1+1)^{0.75+1} - 2 \cdot 1^{0.75+1} + (1-1)^{0.75+1} = 1.36359, \\
\xi_2 &= (2+1)^{0.75+1} - 2 \cdot 2^{0.75+1} + (2-1)^{0.75+1} = 1.11135, \\
\xi_3 &= (3+1)^{0.75+1} - 2 \cdot 3^{0.75+1} + (3-1)^{0.75+1} = 1.00025, \\
\xi_4 &= (4+1)^{0.75+1} - 2 \cdot 4^{0.75+1} + (4-1)^{0.75+1} = 0.929612, \\
\xi_5 &= (5+1)^{0.75+1} - 2 \cdot 5^{0.75+1} + (5-1)^{0.75+1} = 0.878645
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu değerler kullanılarak kesirli integrale ait operasyonel matris

$$\mathbf{F}^{0.75} = \frac{1}{6^{0.75}} \cdot \frac{1}{\Gamma(2.75)} \begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 \\ 0 & 1 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ 0 & 0 & 1 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

yazılabilir.

Hesaplanan  $\xi_i$  değerleri yerine konulduğunda operasyonel matrisin sayısal biçimi

$$\mathbf{F}^{0.75} = \begin{pmatrix} 0.162182 & 0.221149 & 0.180241 & 0.162223 & 0.150767 & 0.142501 \\ 0 & 0.162182 & 0.221149 & 0.180241 & 0.162223 & 0.150767 \\ 0 & 0 & 0.162182 & 0.221149 & 0.180241 & 0.162223 \\ 0 & 0 & 0 & 0.162182 & 0.221149 & 0.180241 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.162182 & 0.221149 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.162182 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Daha önce  $\mathbf{F}^{0.75}$  ve  $\Phi$  matrisi elde edildiği için Chelyshkov dalgacıklarına ait kesirli integrale ilişkin operasyonel matris

$$\mathbf{P}^\alpha = \Phi \cdot \mathbf{F}^\alpha \cdot \Phi^{-1}$$

hesaplanabilir.

$\alpha = 0.75$  yerine konulduğunda

$$\mathbf{P}^{0.75} = \begin{pmatrix} 0.0594074 & 0.137224 & 0.0946887 & 0.0354596 & 0.060167 & 0.0735004 \\ -0.0277279 & 0.181029 & 0.29304 & 0.114493 & 0.185329 & 0.217691 \\ 0.0111293 & -0.0212591 & 0.24611 & 0.168724 & 0.242998 & 0.265881 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0594074 & 0.137224 & 0.0946887 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0277279 & 0.181029 & 0.29304 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0111293 & -0.0212591 & 0.24611 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

$m' = 6$  alındığından bu altı elemanlı blok darbe fonksiyonuna karşılık gelir ve aşağıdaki sütun vektörü:

$$\mathbf{B}(t) = [b_0(t), b_1(t), b_2(t), b_3(t), b_4(t), b_5(t)]^T$$

tanımlanır.

$[0, t]$  integrasyon aralığı altı eşit alt aralığa bölünür ve buna bağlı olarak vektör fonksiyonu

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= \int_0^t \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds \\ &= \int_0^{\frac{1}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{2}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \int_{\frac{2}{6}}^{\frac{3}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds \\ &\quad + \int_{\frac{3}{6}}^{\frac{4}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \int_{\frac{4}{6}}^{\frac{5}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \int_{\frac{5}{6}}^t \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds \end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

Yine  $m' = 6$  alındığından,  $\mathbf{C}^T$  katsayı vektörü ve Chelyshkov dalgacıkları vektörü  $\Psi$ :

$$\mathbf{C}^T = [C_{00}, C_{01}, C_{02}, C_{10}, C_{11}, C_{12}] \text{ ve } \Psi = [\psi_{00}, \psi_{01}, \psi_{02}, \psi_{10}, \psi_{11}, \psi_{12}]^T$$

olarak tanımlanır.

Gerekli tüm matrisler oluşturulduktan sonra, cebirsel sistem sıralama noktalarında

$$t_i = \frac{2i-1}{12}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

değerlendirilir ve aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$\mathbf{C}^T \Psi(t_i) = \lambda_1 \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \Phi \mathbf{V}(t_i) + \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \mathbf{W}^T \Psi(t_i) + f(t_i).$$

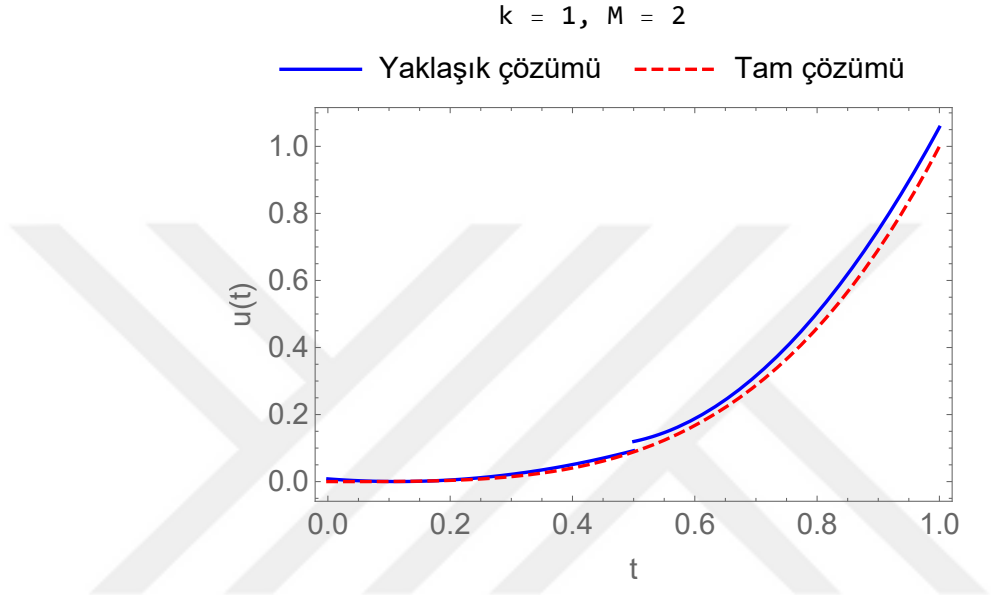
Son olarak hesaplanan katsayı vektörü  $\mathbf{C}^T$  denklem (5.4)'te yerine konulduğunda yaklaşık çözüm  $u(t)$  elde edilir.

Tablo 6.1. Örnek 6.1 için  $k$  ve  $M = 2$  için Mutlak Hata değerleri

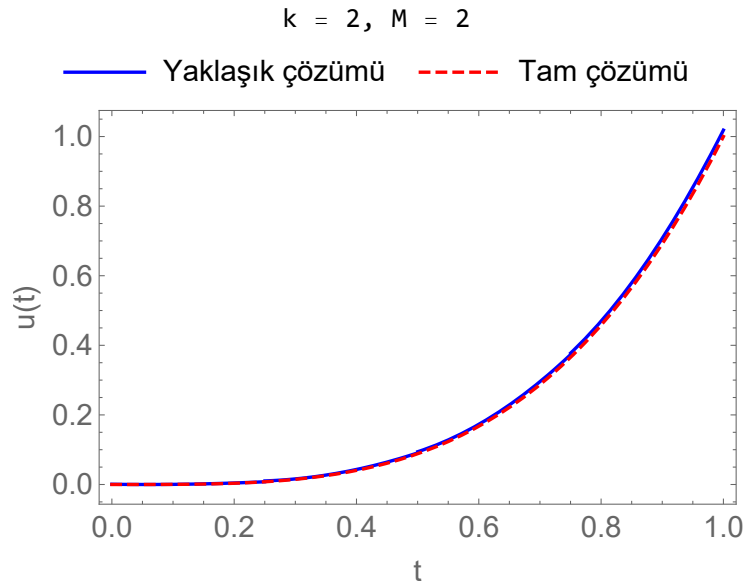
| $t$ | $k = 1$                 | $k = 2$                 | $k = 3$                 |
|-----|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 0   | $8.0923 \times 10^{-3}$ | $6.963 \times 10^{-4}$  | $6.0965 \times 10^{-5}$ |
| 1/6 | $6.2098 \times 10^{-5}$ | $6.6746 \times 10^{-4}$ | $1.0521 \times 10^{-4}$ |
| 2/6 | $8.6443 \times 10^{-3}$ | $1.4403 \times 10^{-3}$ | $4.9666 \times 10^{-4}$ |
| 3/6 | $3.1154 \times 10^{-2}$ | $5.7542 \times 10^{-3}$ | $1.2848 \times 10^{-3}$ |
| 4/6 | $2.4203 \times 10^{-2}$ | $7.7843 \times 10^{-3}$ | $2.0041 \times 10^{-3}$ |
| 5/6 | $5.0356 \times 10^{-2}$ | $1.2295 \times 10^{-2}$ | $3.6452 \times 10^{-3}$ |

Tablo 6.2. Örnek 6.1 Farklı  $k$  değerleri ve  $M = 2$  için  $L_\infty$  hata değerleri.

| $k$ | $L_\infty$              |
|-----|-------------------------|
| 1   | $5.0356 \times 10^{-2}$ |
| 2   | $1.2295 \times 10^{-2}$ |
| 3   | $3.6452 \times 10^{-3}$ |
| 4   | $1.0337 \times 10^{-3}$ |
| 5   | $3.1066 \times 10^{-4}$ |
| 6   | $9.4745 \times 10^{-5}$ |

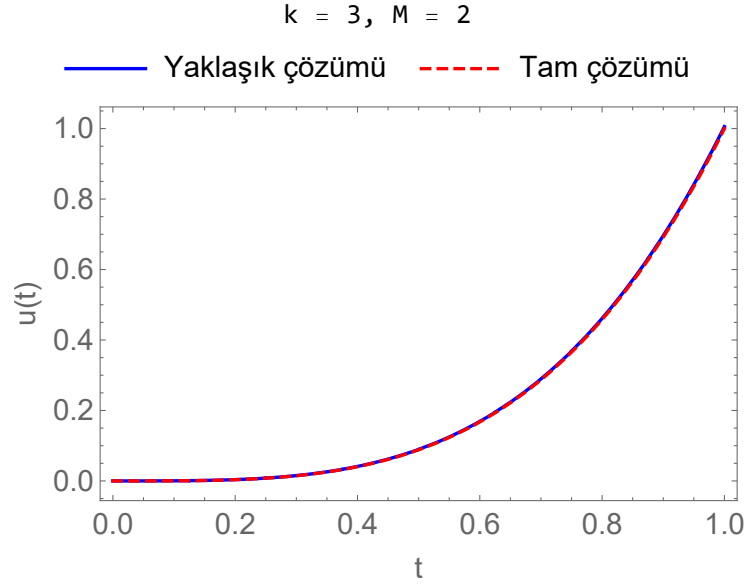


Şekil 6.1. Örnek 6.1:  $k = 1$  ve  $M = 2$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 6.2. Örnek 6.1:  $k = 2$  ve  $M = 2$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması





Şekil 6.3. Örnek 6.1:  $k = 3$  ve  $M = 2$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması

Yukarıdaki iki tablodan ve grafikten,  $k$  arttıkça her  $t$  noktasındaki mutlak hataların azaldığı ve benzer şekilde  $L_\infty$  hatasının da azaldığı açıktır.

**Örnek 6.2.** Aşağıdaki zayıf tekilikli kesirli mertebeden integro-diferansiyel denklem başlangıç koşulu  $u(0) = 0$  ile birlikte dikkate alınsın:

$$D_*^{0.15}u(t) = \frac{1}{4} \int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \frac{1}{7} \int_0^1 e^{t+s} u(s) ds + f(t)$$

Bu denklemin analitik çözümü  $u(t) = t^2 - t$  ve

$$f(t) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(3)}{\Gamma(2.85)} t^{1.85} - \frac{\Gamma(2)t^{0.85}}{\Gamma(1.85)} - \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(3)}{4\Gamma(3.5)} t^{2.5} + \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2)}{4\Gamma(2.5)} t^{1.5} - \frac{e^{t+1} - 3e^t}{7}$$

şeklindedir [1, 3–6]

Bu örnekte daha önce yapıldığı gibi, Chelyshkov dalgacıkları yöntemi, farklı  $k$  ve  $M = 2$  değerleri için uygulanacaktır.

$\lambda_1 = \frac{1}{4}$  ve  $\lambda_2 = \frac{1}{7}$  sabit katsayılar olup,  $k = 1$  ve  $M = 2$  olarak seçildiğinde,

$$m' = 2^k(M + 1) = 6$$

elde edilir üstelik öteleme parametresi  $n = 0, 1$  değerlerini alırken, indeks  $m = 0, 1, 2$  değerlerini alır. Buna göre,  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{\Phi}$ ,  $\mathbf{F}$  ve  $\mathbf{P}$  matrisleri  $6 \times 6$  boyutunda,  $\mathbf{\Psi}$  ve  $\mathbf{C}^T$  ise  $6 \times 1$  boyutundadır.

Böylece

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \int_0^1 \int_0^1 \psi_{00}(t)\psi_{00}(s)e^{t+s} ds dt & \cdots & \int_0^1 \int_0^1 \psi_{00}(t)\psi_{12}(s)e^{t+s} ds dt \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \int_0^1 \int_0^1 \psi_{02}(t)\psi_{00}(s)e^{t+s} ds dt & \cdots & \int_0^1 \int_0^1 \psi_{02}(t)\psi_{12}(s)e^{t+s} ds dt \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \int_0^1 \int_0^1 \psi_{10}(t)\psi_{00}(s)e^{t+s} ds dt & \cdots & \int_0^1 \int_0^1 \psi_{10}(t)\psi_{12}(s)e^{t+s} ds dt \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \int_0^1 \int_0^1 \psi_{12}(t)\psi_{00}(s)e^{t+s} ds dt & \cdots & \int_0^1 \int_0^1 \psi_{12}(t)\psi_{12}(s)e^{t+s} ds dt \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0.055700 & 0.10815 & 0.18181 & 0.091833 & 0.17831 & 0.29975 \\ 0.10815 & 0.21000 & 0.35302 & 0.17831 & 0.34623 & 0.58203 \\ 0.18181 & 0.35302 & 0.59344 & 0.29975 & 0.58203 & 0.97842 \\ 0.091833 & 0.17831 & 0.29975 & 0.15141 & 0.29399 & 0.49421 \\ 0.17831 & 0.34623 & 0.58203 & 0.29399 & 0.57084 & 0.95961 \\ 0.29975 & 0.58203 & 0.97842 & 0.49421 & 0.95961 & 1.6131 \end{pmatrix}$$

$\Phi$  matris (3.11) ifadesinde tanımlanmıştır. Tersini alındığında

$$\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3/2}}{8} & \frac{1}{8\sqrt{10}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12\sqrt{2}}{1} & \frac{\sqrt{6}}{8} & \frac{6\sqrt{10}}{11} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3/2}}{8} & \frac{11}{8\sqrt{10}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{8\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3/2}}{8} & \frac{1}{8\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12\sqrt{2}}{1} & \frac{\sqrt{6}}{8} & \frac{6\sqrt{10}}{11} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3/2}}{8} & \frac{11}{8\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Blok darbe fonksiyonların kesirli integraline ait operasyonel matrisin oluşturulması için, önce katsayılar ( $\xi_i$ ) aşağıdaki formülü kullanılarak

$$\xi_i = (i+1)^{\alpha+1} - 2i^{\alpha+1} + (i-1)^{\alpha+1}$$

hesaplanır.

$\alpha = 0.15$  yerine konulduğunda katsayılar:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= (1+1)^{0.15+1} - 2 \cdot 1^{0.15+1} + (1-1)^{0.15+1} = 0.219139, \\
\xi_2 &= (2+1)^{0.15+1} - 2 \cdot 2^{0.15+1} + (2-1)^{0.15+1} = 0.099165, \\
\xi_3 &= (3+1)^{0.15+1} - 2 \cdot 3^{0.15+1} + (3-1)^{0.15+1} = 0.0688307, \\
\xi_4 &= (4+1)^{0.15+1} - 2 \cdot 4^{0.15+1} + (4-1)^{0.15+1} = 0.0535382, \\
\xi_5 &= (5+1)^{0.15+1} - 2 \cdot 5^{0.15+1} + (5-1)^{0.15+1} = 0.0441539
\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu değerler kullanarak kesirli integrale ait operasyonel matris

$$\mathbf{F}^{0.15} = \frac{1}{6^{0.15}} \frac{1}{\Gamma(2.15)} \begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 \\ 0 & 1 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ 0 & 0 & 1 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

yazılabilir.

Hesaplanan  $\xi_i$  değerleri yerine konulduğunda operasyonel matrisin sayısal biçimi

$$\mathbf{F}^{0.15} = \begin{pmatrix} 0.712326 & 0.156098 & 0.0706378 & 0.0490299 & 0.0381367 & 0.031452 \\ 0 & 0.712326 & 0.156098 & 0.0706378 & 0.0490299 & 0.0381367 \\ 0 & 0 & 0.712326 & 0.156098 & 0.0706378 & 0.0490299 \\ 0 & 0 & 0 & 0.712326 & 0.156098 & 0.0706378 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.712326 & 0.156098 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.712326 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Daha önce  $\mathbf{F}^{0.15}$  ve  $\Phi$  matrisi elde edildiği için Chelyshkov dalgacıklarına ait kesirli integrale ilişkin operasyonel matris

$$\mathbf{P}^\alpha = \Phi \cdot \mathbf{F}^\alpha \cdot \Phi^{-1}$$

olarak hesaplanır.

$\alpha = 0.15$  yerine konulduğunda

$$\mathbf{P}^{0.15} = \begin{pmatrix} 0.630744 & 0.112514 & 0.0223751 & 0.00550644 & 0.0117717 & 0.0138677 \\ -0.0260376 & 0.736828 & 0.175035 & 0.0362221 & 0.0541327 & 0.0525058 \\ 0.00741625 & -0.0142448 & 0.769405 & 0.132394 & 0.120687 & 0.0874505 \\ 0 & 0 & 0 & 0.630744 & 0.112514 & 0.0223751 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0260376 & 0.736828 & 0.175035 \\ 0 & 0 & 0 & 0.00741625 & -0.0142448 & 0.769405 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

$m' = 6$  alındığından bu altı elemanlı blok darbe fonksiyonuna karşılık gelir ve sütun vektörü

$$\mathbf{B}(t) = [b_0(t), b_1(t), b_2(t), b_3(t), b_4(t), b_5(t)]^T$$

olarak tanımlanır.

$[0, t]$  integrasyon aralığı altı eşit alt aralığa bölünür ve buna bağlı olarak vektör fonksiyonu  $\mathbf{V}(t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= \int_0^t \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds \\ &= \int_0^{\frac{1}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{2}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \int_{\frac{2}{6}}^{\frac{3}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds \\ &\quad + \int_{\frac{3}{6}}^{\frac{4}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \int_{\frac{4}{6}}^{\frac{5}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \int_{\frac{5}{6}}^t \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds \end{aligned}$$

yazılır.

Yine  $m' = 6$  alındığından katsayı vektörü  $\mathbf{C}^T$  ve Chelyshkov dalgacıkları vektörü  $\Psi$

$$\mathbf{C}^T = [C_{00}, C_{01}, C_{02}, C_{10}, C_{11}, C_{12}] \text{ ve } \Psi = [\psi_{00}, \psi_{01}, \psi_{02}, \psi_{10}, \psi_{11}, \psi_{12}]^T$$

ile tanımlanır.

Gerekli tüm matrisler oluşturulduktan sonra, cebirsel sistem sıralama noktalarında

$$t_i = \frac{2i-1}{12}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

değerlendirilir ve aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$\mathbf{C}^T \Psi(t_i) = \lambda_1 \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \Phi \mathbf{V}(t_i) + \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \mathbf{W}^T \Psi(t_i) + f(t_i).$$

Son olarak hesaplanan katsayı vektörü  $\mathbf{C}^T$  denklem (5.4)'te yerine konulduğunda yaklaşık çözüm  $u_n(t)$  elde edilir.

Tablo 6.3. Örnek 6.2: Chelyshkov dalgacıkları farklı  $k$  değerleri ve  $M = 2$ , CAS [1] dalgacıkları için farklı  $m'$  değerleri ile elde edilen mutlak hata değerleri.

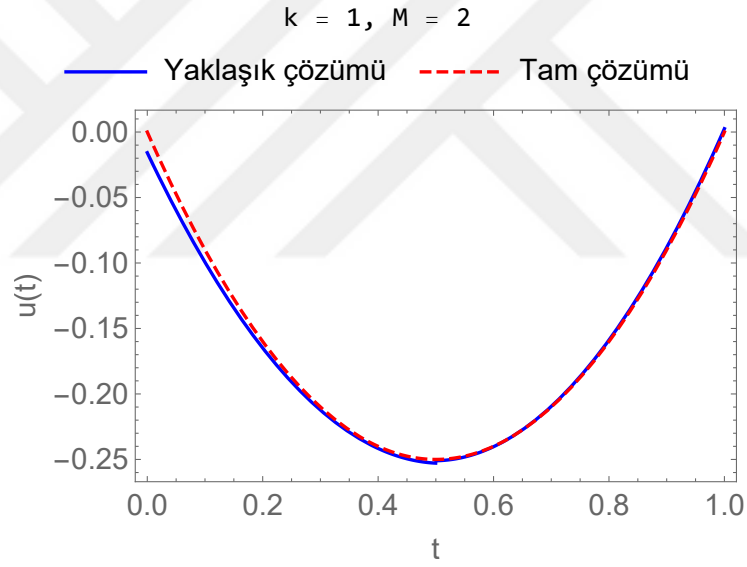
| $t$ | CASW [1]<br>$m' = 6$   | ChelyshkovW<br>$k = 1$ | CASW [1]<br>$m' = 12$  | ChelyshkovW<br>$k = 2$ | CASW [1]<br>$m' = 24$  | ChelyshkovW<br>$k = 3$ |
|-----|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 0   | $6.148 \times 10^{-3}$ | $1.580 \times 10^{-2}$ | $2.354 \times 10^{-3}$ | $7.372 \times 10^{-3}$ | $9.090 \times 10^{-4}$ | $3.512 \times 10^{-3}$ |
| 1/6 | $2.774 \times 10^{-2}$ | $6.208 \times 10^{-3}$ | $1.236 \times 10^{-2}$ | $1.079 \times 10^{-3}$ | $5.437 \times 10^{-3}$ | $3.987 \times 10^{-4}$ |
| 2/6 | $3.509 \times 10^{-2}$ | $1.885 \times 10^{-3}$ | $1.542 \times 10^{-2}$ | $7.237 \times 10^{-4}$ | $6.882 \times 10^{-3}$ | $2.273 \times 10^{-4}$ |
| 3/6 | $3.840 \times 10^{-2}$ | $9.846 \times 10^{-4}$ | $1.659 \times 10^{-2}$ | $3.112 \times 10^{-4}$ | $7.340 \times 10^{-3}$ | $1.072 \times 10^{-4}$ |
| 4/6 | $3.876 \times 10^{-2}$ | $2.096 \times 10^{-4}$ | $1.632 \times 10^{-2}$ | $5.637 \times 10^{-5}$ | $7.080 \times 10^{-3}$ | $7.011 \times 10^{-6}$ |
| 5/6 | $3.668 \times 10^{-2}$ | $1.379 \times 10^{-3}$ | $1.482 \times 10^{-2}$ | $4.273 \times 10^{-4}$ | $6.200 \times 10^{-3}$ | $1.242 \times 10^{-4}$ |

Tablo 6.4. Örnek 6.2: Chelyshkov ve CAS [1] dalgacıkları için  $L_\infty$  hata değerleri

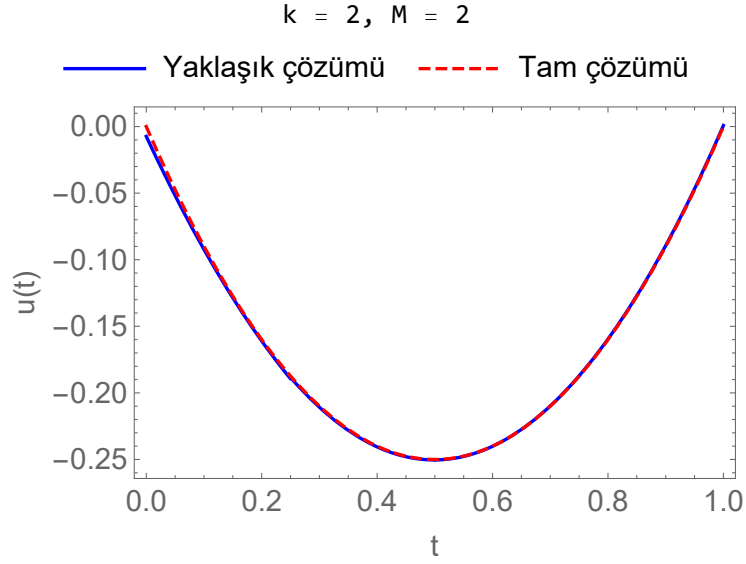
| $m'$ | ChelyshkovW             | CASW [1]                |
|------|-------------------------|-------------------------|
| 6    | $1.5801 \times 10^{-2}$ | $3.8756 \times 10^{-2}$ |
| 12   | $7.3715 \times 10^{-3}$ | $1.6586 \times 10^{-2}$ |
| 24   | $3.5124 \times 10^{-3}$ | $7.3400 \times 10^{-3}$ |

Tablo 6.5. Örnek 6.2:  $M = 2$  için Chelyshkov dalgacıkları için farklı  $k$  değerlerine karşılık gelen  $L_\infty$  hata değerleri

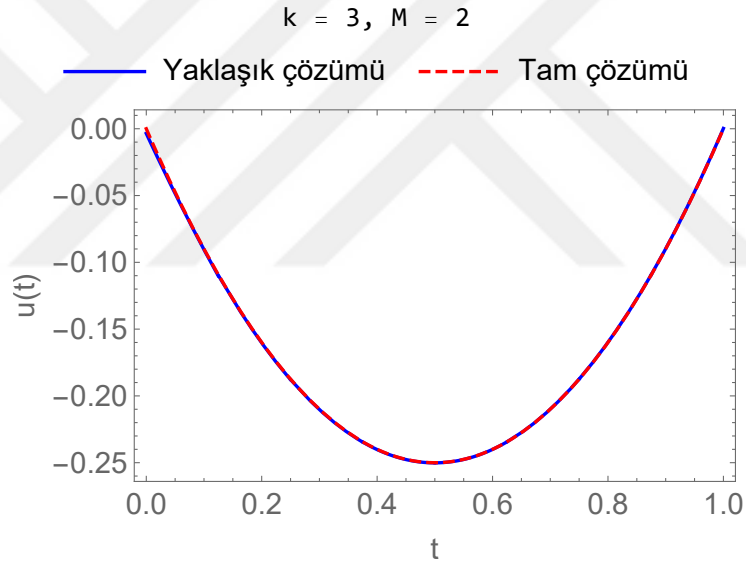
| $k$ | $L_\infty$              |
|-----|-------------------------|
| 1   | $1.5801 \times 10^{-2}$ |
| 2   | $7.3715 \times 10^{-3}$ |
| 3   | $3.5124 \times 10^{-3}$ |
| 4   | $1.6993 \times 10^{-3}$ |
| 5   | $8.3107 \times 10^{-4}$ |
| 6   | $4.0948 \times 10^{-4}$ |



Şekil 6.4. Örnek 6.2:  $k = 1$  ve  $M = 2$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 6.5. Örnek 6.2:  $k = 2$  ve  $M = 2$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 6.6. Örnek 6.2:  $k = 3$  ve  $M = 2$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması

Yukarıdaki tablolara göre, elde edilen mutlak ve  $L_\infty$  hatalarına dayanarak, hem CAS [1] hem de Chelyshkov dalgacıkları hatalarının  $m'$  ve  $k$  değerleri arttıkça azaldığı açıktır. Ancak, Chelyshkov dalgacıkları, CAS [1] dalgacıklarına kıyasla çoğu zaman daha düşük hatalar göstererek belirgin şekilde daha iyi bir performans sergilemektedir. Ek bir tablo, Chelyshkov dalgacıkları için  $L_\infty$  hatalarının  $k = 6$  değerine kadar nasıl azaldığını göstermektedir.

**Örnek 6.3.** Başlangıç koşulu  $u(0) = 0$  ile birlikte

$$D_*^{0.25}u(t) = \int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}ds + \int_0^1 (t-s)u(s)ds + f(t)$$

zayıf tekil çekirdekli kesirli integro-diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin analitik çözümü  $u(t) = t^2 + t^3$  şeklindedir. Bu problemde

$$f(t) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.75)} t^{1.75} + \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3.75)} t^{2.75} - \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(3)}{2\Gamma(3.5)} t^{2.5} - \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(4)}{2\Gamma(4.5)} t^{3.5} - \frac{7t}{36} + \frac{3}{20}$$

şeklinde tanımlanmıştır [1, 3–6].

Bu örnekte daha önce yapıldığı gibi, Chelyshkov dalgacıkları yöntemi, farklı  $k$  ve  $M = 2$  değerleri için uygulanacak.  $\lambda_1 = 1$  ve  $\lambda_2 = 1$  sabit katsayılar olup,  $k = 1$  ve  $M = 2$  olarak seçildiğinde,

$$m' = 2^k(M + 1) = 6$$

elde edilir üstelik öteleme parametresi  $n = 0, 1$  değerlerini alırken, indeks  $m = 0, 1, 2$  değerlerini alır. Buna göre,  $\mathbf{W}$ ,  $\Phi$ ,  $\mathbf{F}$  ve  $\mathbf{P}$  matrisleri  $6 \times 6$  boyutunda,  $\Psi$  ve  $\mathbf{C}^T$  ise  $6 \times 1$  boyutundadır. Böylece

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \int_0^1 \int_0^1 \psi_{00}(t) \psi_{00}(s) (t-s) ds dt & \cdots & \int_0^1 \int_0^1 \psi_{00}(t) \psi_{12}(s) (t-s) ds dt \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \int_0^1 \int_0^1 \psi_{02}(t) \psi_{00}(s) (t-s) ds dt & \cdots & \int_0^1 \int_0^1 \psi_{02}(t) \psi_{12}(s) (t-s) ds dt \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \int_0^1 \int_0^1 \psi_{10}(t) \psi_{00}(s) (t-s) ds dt & \cdots & \int_0^1 \int_0^1 \psi_{10}(t) \psi_{12}(s) (t-s) ds dt \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \int_0^1 \int_0^1 \psi_{12}(t) \psi_{00}(s) (t-s) ds dt & \cdots & \int_0^1 \int_0^1 \psi_{12}(t) \psi_{12}(s) (t-s) ds dt \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{48\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{5}}{48} & -\frac{1}{36} & -\frac{5}{48\sqrt{3}} & -\frac{7\sqrt{5}}{144} \\ \frac{1}{48\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{5/3}}{24} & -\frac{1}{16\sqrt{3}} & -\frac{1}{12} & -\frac{\sqrt{5/3}}{8} \\ \frac{\sqrt{5}}{48} & \frac{\sqrt{5/3}}{24} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{144} & -\frac{\sqrt{5/3}}{24} & -\frac{5}{36} \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{16\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{5}}{144} & 0 & -\frac{1}{48\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{5}}{48} \\ \frac{5}{48\sqrt{3}} & \frac{1}{12} & \frac{\sqrt{5/3}}{24} & \frac{1}{48\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{5/3}}{24} \\ \frac{7\sqrt{5}}{144} & \frac{\sqrt{5/3}}{8} & \frac{5}{36} & \frac{\sqrt{5}}{48} & \frac{\sqrt{5/3}}{24} & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur.

$\Phi$  matrisi (3.11) olarak tanımlanmıştır ve tersinin hesaplanmasıyla elde edilir:

$$\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3/2}}{8} & \frac{1}{8\sqrt{10}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12\sqrt{2}}{5} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{6\sqrt{10}}{11} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3/2}}{8} & \frac{11}{8\sqrt{10}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{8\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3/2}}{8} & \frac{1}{8\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12\sqrt{2}}{5} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{6\sqrt{10}}{11} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3/2}}{8} & \frac{11}{8\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

Blok darbe fonksiyonların kesirli integraline ait operasyonel matrisin oluşturulması için, önce katsayılar ( $\xi_i$ ) aşağıdaki formülü kullanılarak:

$$\xi_i = (i+1)^{\alpha+1} - 2i^{\alpha+1} + (i-1)^{\alpha+1}$$

$\alpha = 0.25$  yerine konulduğunda, katsayılar şu şekilde elde edilir:

$$\xi_1 = (1+1)^{0.25} - 2 \cdot 1^{1.25} + (1-1)^{1.25} = 0.378414$$

$$\xi_2 = (2+1)^{1.25} - 2 \cdot 2^{1.25} + (2-1)^{1.25} = 0.191394$$

$$\xi_3 = (3+1)^{1.25} - 2 \cdot 3^{1.25} + (3-1)^{1.25} = 0.138824$$

$$\xi_4 = (4+1)^{1.25} - 2 \cdot 4^{1.25} + (4-1)^{1.25} = 0.111257$$

$$\xi_5 = (5+1)^{1.25} - 2 \cdot 5^{1.25} + (5-1)^{1.25} = 0.0938739$$

Bu değerler kullanılarak kesirli integrasyonun operasyonel matrisi şu şekilde ifade edilir.

$$\mathbf{F}^{0.25} = \frac{1}{6^{0.25}} \frac{1}{\Gamma(2.25)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 \\ 0 & 1 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ 0 & 0 & 1 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hesaplanan  $\xi_i$  değerleri yerine konulduğunda, operasyonel matrisin sayısal hali:



$$\mathbf{F}^{0.25} = \begin{pmatrix} 0.563938 & 0.213402 & 0.107934 & 0.0782883 & 0.0627423 & 0.052939 \\ 0 & 0.563938 & 0.213402 & 0.107934 & 0.0782883 & 0.0627423 \\ 0 & 0 & 0.563938 & 0.213402 & 0.107934 & 0.0782883 \\ 0 & 0 & 0 & 0.563938 & 0.213402 & 0.107934 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.563938 & 0.213402 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.563938 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{F}^{0.25}$  ve  $\Phi$  matrisi daha önce elde edildiği için, Chelyshkov dalgacıkları için kesirli integrasyon operasyonel matrisi şu formül ile hesaplanır:

$$\mathbf{P}^\alpha = \Phi \cdot \mathbf{F}^\alpha \cdot \Phi^{-1}$$

$\alpha = 0.25$  yerine konulduğunda

$$\mathbf{P}^{0.25} = \begin{pmatrix} 0.454223 & 0.150674 & 0.0395189 & 0.0107773 & 0.0207202 & 0.0241541 \\ -0.0342974 & 0.595185 & 0.245678 & 0.0587042 & 0.0875294 & 0.0871847 \\ 0.010227 & -0.0196269 & 0.642405 & 0.178158 & 0.175518 & 0.136558 \\ 0 & 0 & 0 & 0.454223 & 0.150674 & 0.0395189 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0342974 & 0.595185 & 0.245678 \\ 0 & 0 & 0 & 0.010227 & -0.0196269 & 0.642405 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

$m' = 6$  alındığından bu altı elemanlı blok darbe fonksiyonuna karşılık gelir ve aşağıdaki sütun vektörü:

$$\mathbf{B}(\mathbf{t}) = [b_0(t), b_1(t), b_2(t), b_3(t), b_4(t), b_5(t)]^T.$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= \int_0^t \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds \\ &= \int_0^{\frac{1}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{2}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \int_{\frac{2}{6}}^{\frac{3}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds \\ &\quad + \int_{\frac{3}{6}}^{\frac{4}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \int_{\frac{4}{6}}^{\frac{5}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \int_{\frac{5}{6}}^t \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds. \end{aligned}$$

$[0, t]$  integrasyon aralığı altı eşit alt aralığa bölünür ve buna bağlı olarak vektör fonksiyonu

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= \int_0^t \frac{\mathbf{B}_6(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds \\ &= \int_0^{\frac{1}{6}} \frac{\mathbf{B}_6(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{2}{6}} \frac{\mathbf{B}_6(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \int_{\frac{2}{6}}^{\frac{3}{6}} \frac{\mathbf{B}_6(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds \end{aligned}$$

$$+ \int_{\frac{3}{6}}^{\frac{4}{6}} \frac{\mathbf{B}_6(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \int_{\frac{4}{6}}^{\frac{5}{6}} \frac{\mathbf{B}_6(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \int_{\frac{5}{6}}^t \frac{\mathbf{B}_6(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds$$

yazılabilir.

Yine  $m' = 6$  alındığından katsayı vektörü  $\mathbf{C}^T$  ve Chelyshkov dalgacıkları vektörü  $\Psi$

$$\mathbf{C}^T = [C_{00}, C_{01}, C_{02}, C_{10}, C_{11}, C_{12}] \text{ ve } \Psi = [\psi_{00}, \psi_{01}, \psi_{02}, \psi_{10}, \psi_{11}, \psi_{12}]^T$$

tanımlanır.

Gerekli tüm matrisler oluşturulduktan sonra, cebirsel sistem sıralama noktalarında

$$t_i = \frac{2i-1}{12}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

değerlendirilir ve aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$\mathbf{C}^T \Psi(t_i) = \lambda_1 \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \Phi \mathbf{V}(t_i) + \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \mathbf{W}^T \Psi(t_i) + f(t_i).$$

Son olarak hesaplanan katsayı vektörü  $\mathbf{C}^T$  denklem (5.4)'te yerine konulduğunda yaklaşık çözüm  $u(t)$  elde edilir.

Tablo 6.6. Örnek 6.3: Chelyshkov dalgacıkları için farklı  $k$  değerleri ve  $M = 2$ , CAS [1] dalgacıkları için farklı  $m'$  değerleri ile elde edilen mutlak hata değerleri.

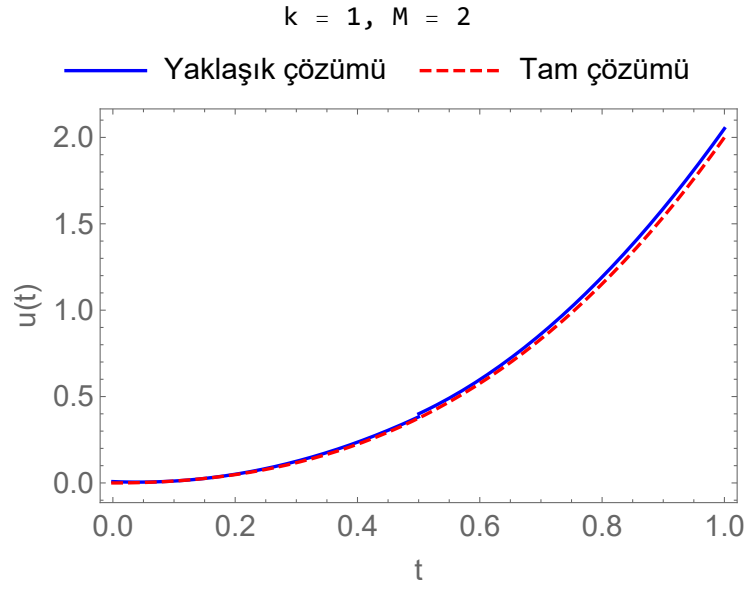
| $t$ | CASW [1]<br>$m' = 6$   | ChelyshkovW<br>$k = 1$ | CASW [1]<br>$m' = 12$  | ChelyshkovW<br>$k = 2$ | CASW [1]<br>$m' = 24$  | ChelyshkovW<br>$k = 3$ |
|-----|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 0   | $3.059 \times 10^{-2}$ | $7.376 \times 10^{-4}$ | $1.433 \times 10^{-2}$ | $8.742 \times 10^{-4}$ | $6.349 \times 10^{-3}$ | $8.306 \times 10^{-5}$ |
| 1/6 | $4.408 \times 10^{-2}$ | $9.902 \times 10^{-3}$ | $2.276 \times 10^{-2}$ | $9.256 \times 10^{-4}$ | $1.146 \times 10^{-2}$ | $1.623 \times 10^{-4}$ |
| 2/6 | $3.871 \times 10^{-2}$ | $2.516 \times 10^{-2}$ | $1.941 \times 10^{-2}$ | $2.159 \times 10^{-3}$ | $9.698 \times 10^{-3}$ | $7.212 \times 10^{-4}$ |
| 3/6 | $1.570 \times 10^{-2}$ | $2.561 \times 10^{-2}$ | $6.417 \times 10^{-3}$ | $5.942 \times 10^{-3}$ | $2.950 \times 10^{-3}$ | $1.593 \times 10^{-3}$ |
| 4/6 | $2.855 \times 10^{-2}$ | $4.348 \times 10^{-2}$ | $1.801 \times 10^{-2}$ | $8.445 \times 10^{-3}$ | $9.673 \times 10^{-3}$ | $2.482 \times 10^{-3}$ |
| 5/6 | $9.888 \times 10^{-2}$ | $1.242 \times 10^{-2}$ | $5.645 \times 10^{-2}$ | $1.242 \times 10^{-2}$ | $2.948 \times 10^{-2}$ | $3.923 \times 10^{-3}$ |

Tablo 6.7. Örnek 6.3: Chelyshkov ve CAS [1] dalgacıklarının için  $L_\infty$  hata değerleri

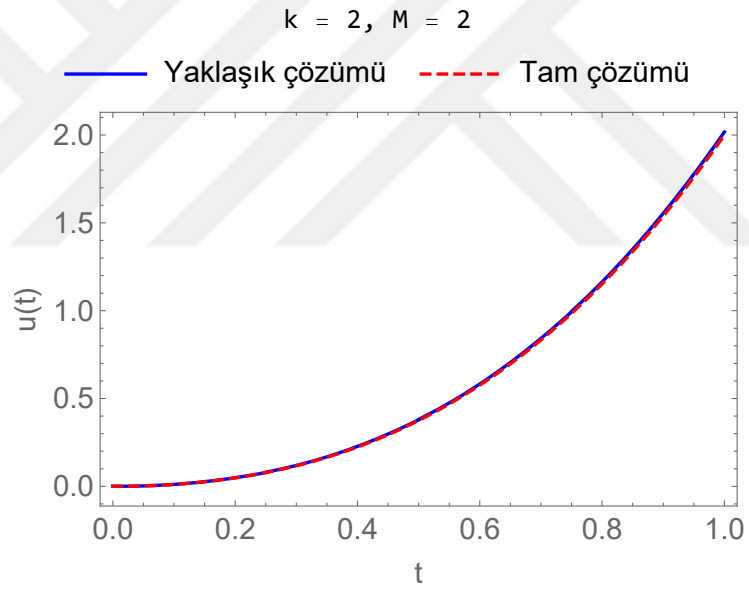
| $m'$ | CASW [1]               | ChelyshkovW             |
|------|------------------------|-------------------------|
| 6    | $9.888 \times 10^{-2}$ | $4.3479 \times 10^{-2}$ |
| 12   | $5.645 \times 10^{-2}$ | $1.242 \times 10^{-2}$  |
| 24   | $2.948 \times 10^{-2}$ | $3.9231 \times 10^{-3}$ |

Tablo 6.8. Chelyshkov dalgacıkları için farklı  $k$  değerlerine karşılık gelen  $L_\infty$  hata değerleri

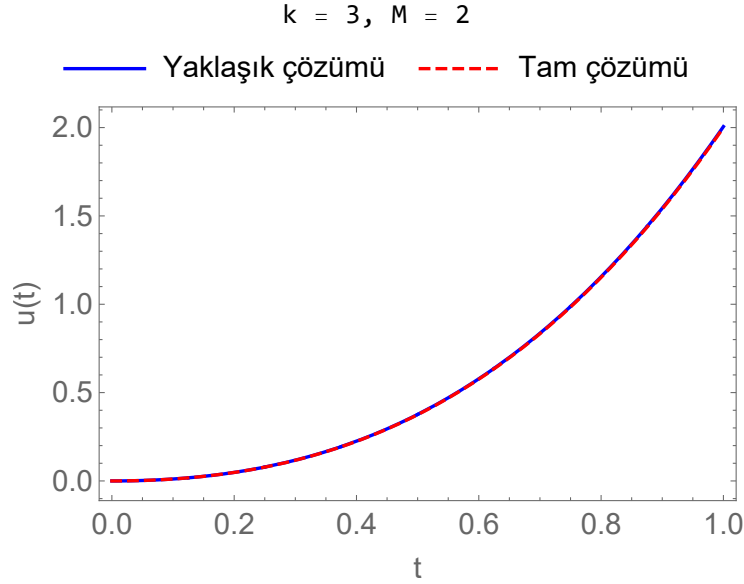
| $k$ | $L_\infty$              |
|-----|-------------------------|
| 1   | $4.3479 \times 10^{-2}$ |
| 2   | $1.242 \times 10^{-2}$  |
| 3   | $3.9231 \times 10^{-3}$ |
| 4   | $1.2167 \times 10^{-3}$ |
| 5   | $3.8916 \times 10^{-4}$ |
| 6   | $1.2602 \times 10^{-4}$ |



Şekil 6.7. Örnek 6.3:  $k = 1$  ve  $M = 2$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 6.8. Örnek 6.3:  $k = 2$  ve  $M = 2$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 6.9. Örnek 6.3:  $k = 3$  ve  $M = 2$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması

Yukarıdaki tablolara göre, elde edilen mutlak ve  $L_\infty$  hatalarına dayanarak, hem CAS [1] hem de Chelyshkov dalgacıkları hatalarının  $m'$  ve  $k$  değerleri arttıkça azaldığı açıktır. Ancak, Chelyshkov dalgacıkları, CAS [1] dalgacıklarına kıyasla her zaman daha düşük hatalar göstererek belirgin şekilde daha iyi bir performans sergilemektedir. Ek bir tablo, Chelyshkov dalgacıkları için  $L_\infty$  hataların  $k = 6$  değerine kadar nasıl azaldığını göstermektedir.

**Örnek 6.4.** Başlangıç koşulu  $u(0) = 0$  ile birlikte

$$D_*^\alpha u(t) = \int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \int_0^1 (t^2 + \cos s)u(s)ds + f(t)$$

zayıf tekil çekirdekli integro-diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin analitik çözümü  $u(t) = t^2$  şeklindedir [6] .

$$f(t) = \frac{2t^{0.75}}{\Gamma(1.75)} - \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(3)}{2\Gamma(3.5)}t^{5/2} - \frac{t^2}{3} - 2\cos(1) + \sin(1)$$

$k = 1$  ve  $M = 2$  alınarak  $\alpha = 1$  ve  $1.25$  için sayısal çözümler elde edilmiş ve karşılaştırılmıştır. Gösterim amacıyla  $\alpha = 1.25$ ,  $\lambda_1 = 1$  ve  $\lambda_2 = 1$  sabit katsayılar olup,  $k = 1$  ve  $M = 2$  olduğundan  $m' = 6$  elde edilir üstelik öteleme parametresi  $n = 0, 1$  değerlerini alırken, indeks  $m = 0, 1, 2$  değerlerini alır.

Buna göre  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{\Phi}$ ,  $\mathbf{F}$  ve  $\mathbf{P}$  matrisleri  $6 \times 6$  boyutunda iken,  $\mathbf{\Psi}$  ve  $\mathbf{C}^T$  ise  $6 \times 1$  sütun matrislerdir.

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \int_0^1 \int_0^1 \psi_{00}(t)\psi_{00}(s)(t^2 + \cos s) ds dt & \cdots & \int_0^1 \int_0^1 \psi_{00}(t)\psi_{12}(s)(t^2 + \cos s) ds dt \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \int_0^1 \int_0^1 \psi_{02}(t)\psi_{00}(s)(t^2 + \cos s) ds dt & \cdots & \int_0^1 \int_0^1 \psi_{02}(t)\psi_{12}(s)(t^2 + \cos s) ds dt \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \int_0^1 \int_0^1 \psi_{10}(t)\psi_{00}(s)(t^2 + \cos s) ds dt & \cdots & \int_0^1 \int_0^1 \psi_{10}(t)\psi_{12}(s)(t^2 + \cos s) ds dt \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \int_0^1 \int_0^1 \psi_{12}(t)\psi_{00}(s)(t^2 + \cos s) ds dt & \cdots & \int_0^1 \int_0^1 \psi_{12}(t)\psi_{12}(s)(t^2 + \cos s) ds dt \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0.055568 & 0.096190 & 0.11505 & 0.048792 & 0.078554 & 0.079244 \\ 0.096246 & 0.16661 & 0.19927 & 0.084511 & 0.13606 & 0.13725 \\ 0.14289 & 0.24736 & 0.29892 & 0.12774 & 0.20793 & 0.21886 \\ 0.069457 & 0.12025 & 0.14610 & 0.062681 & 0.10261 & 0.11030 \\ 0.13233 & 0.22911 & 0.27995 & 0.12060 & 0.19856 & 0.21794 \\ 0.22053 & 0.38184 & 0.47253 & 0.20538 & 0.34240 & 0.39247 \end{pmatrix}$$

$\Phi$  matris (3.11) ifadesinde tanımlanmıştır. Tersini alındığında

$$\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3/2}}{8} & \frac{1}{8\sqrt{10}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12\sqrt{2}}{5} & \frac{\sqrt{6}}{1} & \frac{6\sqrt{10}}{1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3/2}}{8} & \frac{11}{8\sqrt{10}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{8\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3/2}}{8} & \frac{1}{8\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12\sqrt{2}}{5} & \frac{\sqrt{6}}{1} & \frac{6\sqrt{10}}{1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3/2}}{8} & \frac{11}{8\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

elde edilir

Blok darbe fonksiyonlarının kesirli integraline ait operasyonel matrisin oluşturulması için, önce katsayılar ( $\xi_i$ ) aşağıdaki formül kullanılarak

$$\xi_i = (i+1)^{\alpha+1} - 2i^{\alpha+1} + (i-1)^{\alpha+1}$$

hesaplanır.

$\alpha = 1.25$  yerine konulduğunda katsayılar

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= (1+1)^{1.25+1} - 2 \cdot 1^{1.25+1} + (1-1)^{1.25+1} = 2.75683, \\
\xi_2 &= (2+1)^{1.25+1} - 2 \cdot 2^{1.25+1} + (2-1)^{1.25+1} = 3.33101, \\
\xi_3 &= (3+1)^{1.25+1} - 2 \cdot 3^{1.25+1} + (3-1)^{1.25+1} = 3.69491, \\
\xi_4 &= (4+1)^{1.25+1} - 2 \cdot 4^{1.25+1} + (4-1)^{1.25+1} = 3.97355, \\
\xi_5 &= (5+1)^{1.25+1} - 2 \cdot 5^{1.25+1} + (5-1)^{1.25+1} = 4.20302
\end{aligned}$$

Bu değerler kullanılarak kesirli integrale ait operasyonel matris

$$\mathbf{F}^{1.25} = \frac{1}{6^{1.25}} \frac{1}{\Gamma(3.25)} \begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 \\ 0 & 1 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ 0 & 0 & 1 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

Hesaplanan  $\xi_i$  değerleri yerine konulduğunda operasyonel matrisin sayısal biçimi

$$\mathbf{F}^{1.25} = \begin{pmatrix} 0.0417732 & 0.115161 & 0.139147 & 0.154348 & 0.165988 & 0.175574 \\ 0 & 0.0417732 & 0.115161 & 0.139147 & 0.154348 & 0.165988 \\ 0 & 0 & 0.0417732 & 0.115161 & 0.139147 & 0.154348 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0417732 & 0.115161 & 0.139147 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0417732 & 0.115161 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0417732 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Daha önce  $\mathbf{F}^{1.25}$  ve  $\Phi$  matrisi elde edildiği için Chelyshkov dalgacıklarına ait kesirli integrale ilişkin operasyonel matris

$$\mathbf{P}^\alpha = \Phi \cdot \mathbf{F}^\alpha \cdot \Phi^{-1}$$

şeklinde yazılabilir.

$\alpha = 1.25$  yerine konulduğunda

$$\mathbf{P}^{1.25} = \begin{pmatrix} -0.0045124 & 0.0589296 & 0.0848922 & 0.0393828 & 0.0709388 & 0.0979044 \\ -0.00926413 & 0.0426242 & 0.178055 & 0.0933978 & 0.174331 & 0.248656 \\ 0.00614708 & -0.0116795 & 0.0872077 & 0.0790185 & 0.163808 & 0.249331 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0045124 & 0.0589296 & 0.0848922 \\ 0 & 0 & 0 & -0.00926413 & 0.0426242 & 0.178055 \\ 0 & 0 & 0 & 0.00614708 & -0.0116795 & 0.0872077 \end{pmatrix}$$

elde edilir

$m' = 6$  alındığından bu altı elemanlı blok darbe fonksiyonuna karşılık gelir ve aşağıdaki sütun vektörü:

$$\mathbf{B}(t) = [b_0(t), b_1(t), b_2(t), b_3(t), b_4(t), b_5(t)]^T$$

tanımlanır.  $[0, t]$  integrasyon aralığı altı eşit alt aralığa bölünür ve buna bağlı olarak vektör fonksiyonu

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= \int_0^t \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds \\ &= \int_0^{\frac{1}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{2}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \int_{\frac{2}{6}}^{\frac{3}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds \\ &\quad + \int_{\frac{3}{6}}^{\frac{4}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \int_{\frac{4}{6}}^{\frac{5}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \int_{\frac{5}{6}}^t \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds \end{aligned}$$

yazılabilir.

Yine  $m' = 6$  alındığından katsayı vektörü  $\mathbf{C}^T$  ve Chelyshkov dalgacıkları vektörü  $\Psi$

$$\mathbf{C}^T = [C_{00}, C_{01}, C_{02}, C_{10}, C_{11}, C_{12}] \text{ ve } \Psi = [\psi_{00}, \psi_{01}, \psi_{02}, \psi_{10}, \psi_{11}, \psi_{12}]^T$$

tanımlanır.

Gerekli tüm matrisler oluşturulduktan sonra, cebirsel sistem sıralama noktalarında

$$t_i = \frac{2i-1}{12}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

değerlendirilir ve aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$\mathbf{C}^T \Psi(t_i) = \lambda_1 \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \Phi \mathbf{V}(t_i) + \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \mathbf{W}^T \Psi(t_i) + f(t_i).$$

lineer cebirsel sistemi elde edilir.

Son olarak hesaplanan katsayı vektörü denklem (5.4)'te yerine konulduğunda yaklaşık çözüm  $u(t)$  elde edilir.

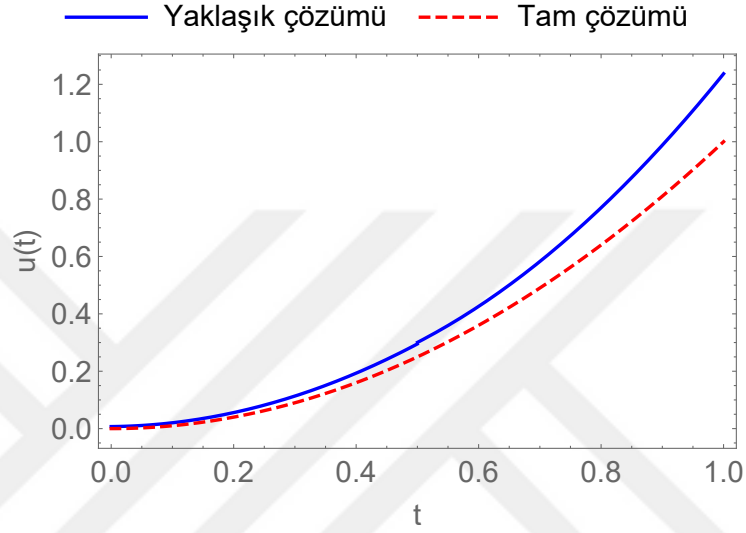
Tablo 6.9. Örnek 6.4 Chelyshkov dalgacıkları  $M = 2$  ve  $k = 3$  için Mutlak hata değerleri

| $t$ | $\alpha = 1$            | $\alpha = 1.25$         |
|-----|-------------------------|-------------------------|
| 0   | $7.0197 \times 10^{-4}$ | $3.5873 \times 10^{-4}$ |
| 1/6 | $9.1493 \times 10^{-2}$ | $3.6226 \times 10^{-3}$ |
| 2/6 | $2.2089 \times 10^{-1}$ | $9.8417 \times 10^{-3}$ |
| 3/6 | $3.9533 \times 10^{-1}$ | $2.2586 \times 10^{-2}$ |
| 4/6 | $6.3172 \times 10^{-1}$ | $4.7524 \times 10^{-2}$ |
| 5/6 | $9.5496 \times 10^{-1}$ | $9.2853 \times 10^{-2}$ |

Tablo 6.10. Örnek 6.4 Chelyshkov dalgacıkları için  $L_\infty$  hata değerleri

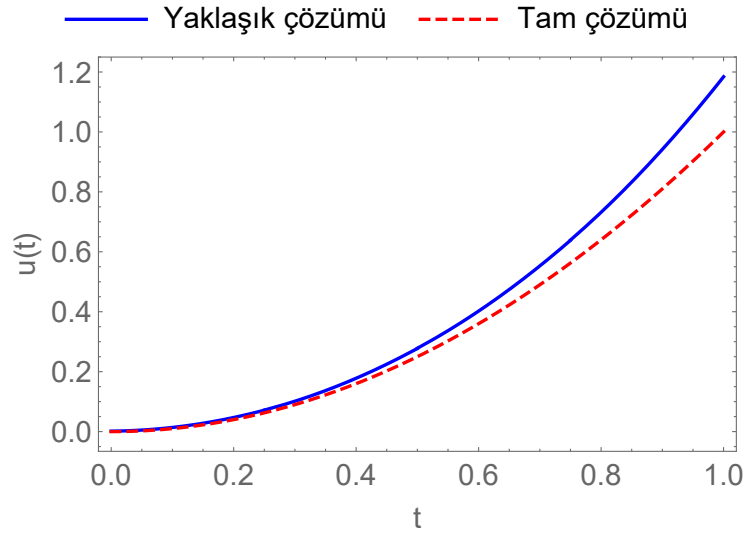
| $k$ | $\alpha = 1$            | $\alpha = 1.25$         |
|-----|-------------------------|-------------------------|
| 1   | 1.1289                  | $1.4458 \times 10^{-1}$ |
| 2   | $9.907 \times 10^{-1}$  | $1.0369 \times 10^{-1}$ |
| 3   | $9.5496 \times 10^{-1}$ | $9.2853 \times 10^{-2}$ |
| 4   | $9.4464 \times 10^{-1}$ | $8.9724 \times 10^{-2}$ |
| 5   | $9.4162 \times 10^{-1}$ | $8.8819 \times 10^{-2}$ |

$k = 1, M = 2$



Şekil 6.10. Örnek 6.4:  $\alpha = 1.25$ ,  $k = 1$  ve  $M = 2$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması

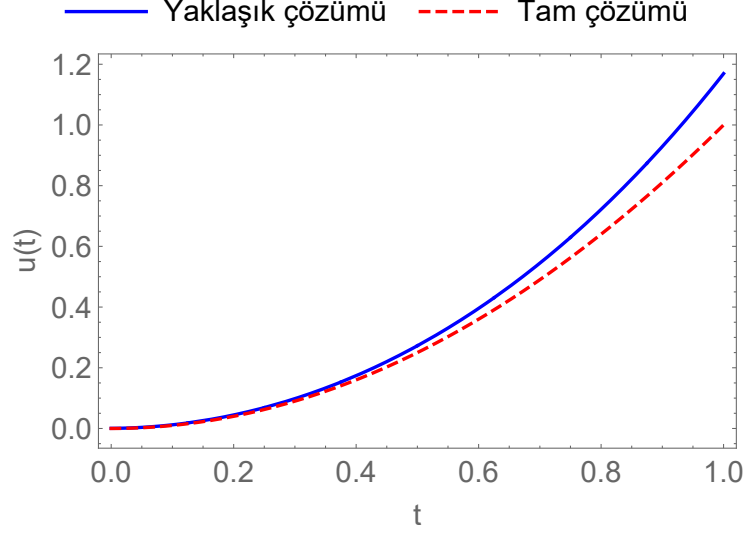
$k = 2, M = 2$



Şekil 6.11. Örnek 6.4:  $\alpha = 1.25$ ,  $k = 2$  ve  $M = 2$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



$$k = 3, M = 2$$



Şekil 6.12. Örnek 6.4:  $\alpha = 1.25$ ,  $k = 3$  ve  $M = 2$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması

Yukarıdaki tablolar incelendiğinde,  $k$  arttıkça her bir  $t$  noktasındaki mutlak hataların azaldığı; ayrıca,  $\alpha = 1.25$  için  $L_\infty$  hatasının  $\alpha = 1$  durumlarına kıyasla daha düşük olduğu açıkça gözlemlenmektedir.

**Örnek 6.5.** Başlangıç koşulu  $u(0) = 0$  ile birlikte

$$D_*^{0.1} u(t) = \int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \int_0^1 (s^2 \cdot t^2) u(s) ds + f(t)$$

zayıf tekil çekirdekli kesirli integro-diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin analitik çözümü  $u(t) = t^4 - \frac{t^3}{2}$  şeklindedir [22].

$$f(t) = \frac{24t^{3.9}}{\Gamma(4.9)} - \frac{3t^{2.9}}{\Gamma(3.9)} - \frac{16\sqrt{t} t^3(16t-9)}{315} - \frac{5t^2}{84}.$$

$\lambda_1 = 1$  ve  $\lambda_2 = 1$  sabit katsayılar olup,  $k = 1$  ve  $M = 2$  seçildiğinden  $m' = 6$  olur. Üstelik öteleme parametresi  $n = 0, 1$  değerlerini alırken, indeks  $m = 0, 1, 2$  değerlerini alır ve  $\mathbf{W}$ ,  $\Phi$ ,  $\mathbf{F}$  ve  $\mathbf{P}$  matrisleri  $6 \times 6$  boyutundadır,  $\Psi$  ve  $\mathbf{C}^T$  ise  $6 \times 1$  boyutunda matrisler olur. Böylece

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \int_0^1 \int_0^1 \psi_{00}(t) \psi_{00}(s) s^2 t^2 ds dt & \cdots & \int_0^1 \int_0^1 \psi_{00}(t) \psi_{12}(s) s^2 t^2 ds dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \int_0^1 \psi_{02}(t) \psi_{00}(s) s^2 t^2 ds dt & \cdots & \int_0^1 \int_0^1 \psi_{02}(t) \psi_{12}(s) s^2 t^2 ds dt \\ \vdots & \cdots & \ddots \\ \int_0^1 \int_0^1 \psi_{10}(t) \psi_{00}(s) s^2 t^2 ds dt & \cdots & \int_0^1 \int_0^1 \psi_{10}(t) \psi_{12}(s) s^2 t^2 ds dt \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \int_0^1 \int_0^1 \psi_{12}(t) \psi_{00}(s) s^2 t^2 ds dt & \cdots & \int_0^1 \int_0^1 \psi_{12}(t) \psi_{12}(s) s^2 t^2 ds dt \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0062500 & 0.0046585 & 0.012103 & 0.032292 \\ 0 & 0 & 0.0046585 & 0.0034722 & 0.0090211 & 0.024069 \\ 0 & 0 & 0.012103 & 0.0090211 & 0.023438 & 0.062533 \\ 0 & 0 & 0.032292 & 0.024069 & 0.062533 & 0.16684 \end{pmatrix}$$

$\Phi$  matris (3.11) ifadesinde tanımlanmıştır. Ters alındığında

$$\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3/2}}{8} & \frac{1}{8\sqrt{10}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12\sqrt{2}}{5} & \frac{\sqrt{6}}{1} & \frac{6\sqrt{10}}{1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3/2}}{8} & \frac{11}{8\sqrt{10}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{8\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3/2}}{8} & \frac{1}{8\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12\sqrt{2}}{5} & \frac{\sqrt{6}}{1} & \frac{6\sqrt{10}}{1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3/2}}{8} & \frac{11}{8\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Blok darbe fonksiyonlarının kesirli integrali için operasyonel matrisin oluşturulmasında, katsayılar ( $\xi_i$ ) aşağıdaki formül ile hesaplanır:

$$\xi_i = (i+1)^{\alpha+1} - 2i^{\alpha+1} + (i-1)^{\alpha+1}.$$

$\alpha = 0.1$  yerine konulduğunda katsayılar

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (1+1)^{0.1+1} - 2 \cdot 1^{0.1+1} + (1-1)^{0.1+1} = 0.143547, \\ \xi_2 &= (2+1)^{0.1+1} - 2 \cdot 2^{0.1+1} + (2-1)^{0.1+1} = 0.0612757, \\ \xi_3 &= (3+1)^{0.1+1} - 2 \cdot 3^{0.1+1} + (3-1)^{0.1+1} = 0.0416013, \\ \xi_4 &= (4+1)^{0.1+1} - 2 \cdot 4^{0.1+1} + (4-1)^{0.1+1} = 0.0318774, \\ \xi_5 &= (5+1)^{0.1+1} - 2 \cdot 5^{0.1+1} + (5-1)^{0.1+1} = 0.0259912 \end{aligned}$$

Bu değerler kullanılarak kesirli integrale ait operasyonel matris

$$\mathbf{F}^{0.1} = \frac{1}{6^{0.1}} \frac{1}{\Gamma(2.1)} \begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 \\ 0 & 1 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ 0 & 0 & 1 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

Hesaplanan  $\xi_i$  değerleri yerine konulduğunda sayısal biçimi

$$\mathbf{F}^{0.1} = \begin{pmatrix} 0.798825 & 0.114669 & 0.0489485 & 0.0332321 & 0.0254645 & 0.0207624 \\ 0 & 0.798825 & 0.114669 & 0.0489485 & 0.0332321 & 0.0254645 \\ 0 & 0 & 0.798825 & 0.114669 & 0.0489485 & 0.0332321 \\ 0 & 0 & 0 & 0.798825 & 0.114669 & 0.0489485 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.798825 & 0.114669 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.798825 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Daha önce  $\mathbf{F}^{0.1}$  ve  $\Phi$  matrisi elde edildiği için Chelyshkov dalgacıklarına ait kesirli integrale ilişkin operasyonel matris

$$\mathbf{P}^\alpha = \Phi \cdot \mathbf{F}^\alpha \cdot \Phi^{-1}$$

şeklinde yazılabilir.

$\alpha = 0.1$  yerine konulduğunda

$$\mathbf{P}^{0.1} = \begin{pmatrix} 0.454223 & 0.150674 & 0.0395189 & 0.0107773 & 0.0207202 & 0.0241541 \\ -0.0342974 & 0.595185 & 0.245678 & 0.0587042 & 0.0875294 & 0.0871847 \\ 0.010227 & -0.0196269 & 0.642405 & 0.178158 & 0.175518 & 0.136558 \\ 0 & 0 & 0 & 0.454223 & 0.150674 & 0.0395189 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0342974 & 0.595185 & 0.245678 \\ 0 & 0 & 0 & 0.010227 & -0.0196269 & 0.642405 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

$m' = 6$  alındığından bu altı elemanlı blok darbe fonksiyonuna karşılık gelir ve aşağıdaki sütun vektörü:

$$\mathbf{B}(t) = [b_0(t), b_1(t), b_2(t), b_3(t), b_4(t), b_5(t)]^T$$

ile tanımlanır.

$[0, t]$  integrasyon aralığı altı eşit alt aralığa bölündüğünden, vektör fonksiyonu

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(t) &= \int_0^t \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{1/2}} ds \\
&= \int_0^{\frac{1}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{1/2}} ds + \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{2}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{1/2}} ds + \int_{\frac{2}{6}}^{\frac{3}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{1/2}} ds \\
&\quad + \int_{\frac{3}{6}}^{\frac{4}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{1/2}} ds + \int_{\frac{4}{6}}^{\frac{5}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{1/2}} ds + \int_{\frac{5}{6}}^t \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{1/2}} ds
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

Yine  $m' = 6$  alındığından katsayı vektörü  $\mathbf{C}^T$  ve Chelyshkov dalgacıkları vektörü  $\Psi$

$\mathbf{C}^T = [C_{00}, C_{01}, C_{02}, C_{10}, C_{11}, C_{12}]$  ve  $\Psi = [\psi_{00}, \psi_{01}, \psi_{02}, \psi_{10}, \psi_{11}, \psi_{12}]^T$  olarak tanımlanır.

Gerekli tüm matrisler oluşturulduktan sonra, cebirsel sistem sıralama noktalarında

$$t_i = \frac{2i-1}{12}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

değerlendirilir ve aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$\mathbf{C}^T \Psi(t_i) = \lambda_1 \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \Phi \mathbf{V}(t_i) + \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \mathbf{W}^T \Psi(t_i) + f(t_i).$$

lineer cebirsel sistemi elde edilir.

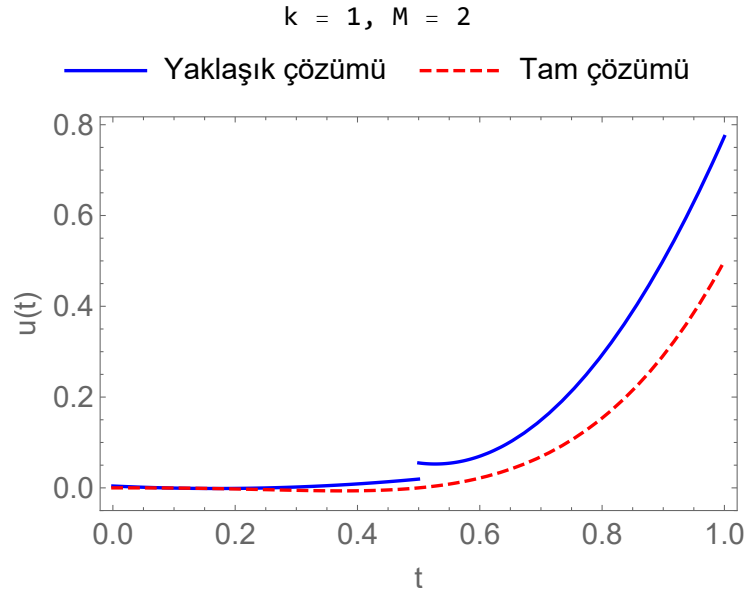
Son olarak, hesaplanan katsayı vektörü  $\mathbf{C}^T$  denklem (5.4)'te yerine konulduğunda yaklaşık çözüm  $u(t)$  bulunur.

Tablo 6.11. Örnek 6.5 Chelyshkov dalgacıkları için mutlak hata değerleri

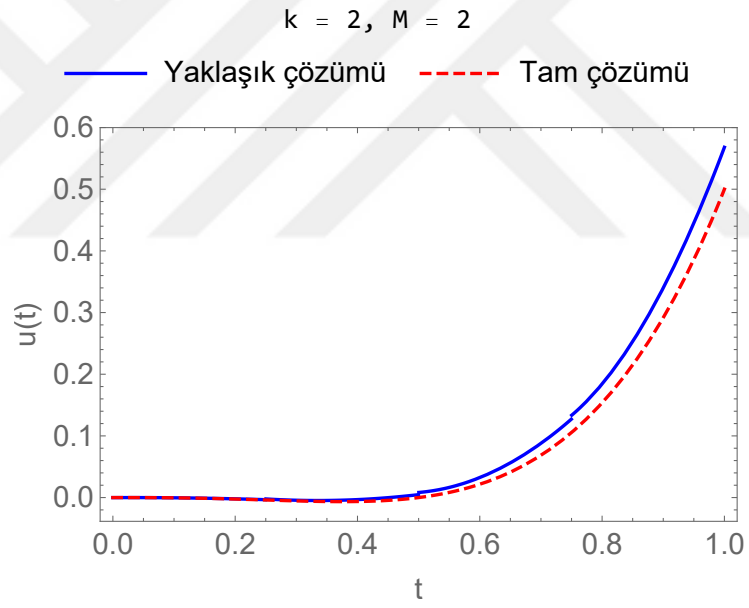
| $t$ | $k = 1$                | $k = 2$                | $k = 3$                |
|-----|------------------------|------------------------|------------------------|
| 0   | $4.086 \times 10^{-3}$ | $7.875 \times 10^{-5}$ | $3.929 \times 10^{-5}$ |
| 1/6 | $1.862 \times 10^{-4}$ | $2.035 \times 10^{-4}$ | $3.835 \times 10^{-5}$ |
| 2/6 | $9.895 \times 10^{-3}$ | $1.412 \times 10^{-3}$ | $4.799 \times 10^{-4}$ |
| 3/6 | $5.495 \times 10^{-2}$ | $8.257 \times 10^{-3}$ | $1.984 \times 10^{-3}$ |
| 4/6 | $6.607 \times 10^{-2}$ | $1.656 \times 10^{-2}$ | $4.651 \times 10^{-3}$ |
| 5/6 | $1.622 \times 10^{-1}$ | $3.512 \times 10^{-2}$ | $1.067 \times 10^{-2}$ |

Tablo 6.12. Örnek 6.5 Chelyshkov dalgacıkları için  $L_\infty$  hata değerleri

| $k$ | $L_\infty$              |
|-----|-------------------------|
| 1   | $1.6223 \times 10^{-1}$ |
| 2   | $3.5115 \times 10^{-2}$ |
| 3   | $1.0673 \times 10^{-2}$ |
| 4   | $3.3405 \times 10^{-3}$ |
| 5   | $1.09 \times 10^{-3}$   |
| 6   | $3.5961 \times 10^{-4}$ |

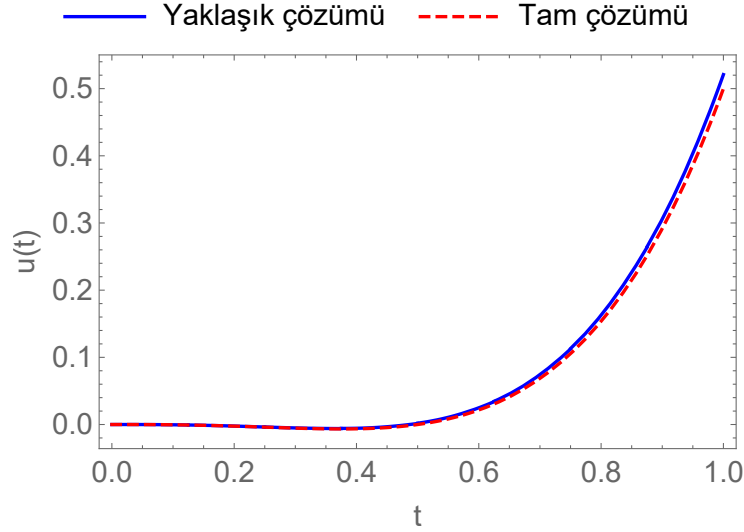


Şekil 6.13. Örnek 6.5:  $k = 1$  ve  $M = 2$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 6.14. Örnek 6.5:  $k = 2$  ve  $M = 2$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması

$$k = 3, M = 2$$



Şekil 6.15. Örnek 6.5:  $k = 3$  ve  $M = 2$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması

Yukarıdaki iki tablodan ve grafikten,  $k$  arttıkça her  $t$  noktasındaki mutlak hataların azaldığı ve benzer şekilde  $L_\infty$  hatasının da azaldığı açıktır.

**Örnek 6.6.** Başlangıç koşulu  $u(0) = 0$  ile birlikte

$$D_*^\alpha u(t) = \int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \int_0^1 (t^2 + s)u(s)ds + f(t)$$

zayıf tekil çekirdekli kesirli integro-diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin analitik çözümü  $u(t) = t^2$  ve

$$f(t) = \frac{2t^{0.75}}{\Gamma(1.75)} - \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(3)}{2\Gamma(3.5)}t^{5/2} - \frac{t^2}{3} - 2\cos(1) + \sin(1)$$

şeklindedir [6] .

$\alpha = 1$ ,  $\lambda_1 = 1$  ve  $\lambda_2 = 1$  sabit katsayılar olup,  $k = 1$  ve  $M = 2$  seçildiğinden  $m' = 6$  olur. Üstelik öteleme parametresi  $n = 0, 1$  değerlerini alırken, indeks  $m = 0, 1, 2$  değerlerini alır ve  $\mathbf{W}$ ,  $\Phi$ ,  $\mathbf{F}$  ve  $\mathbf{P}$  matrisleri  $6 \times 6$  boyutundadır,  $\Psi$  ve  $\mathbf{C}^T$  ise  $6 \times 1$  boyutunda matrisler olur. Böylece

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \int_0^1 \int_0^1 \psi_{00}(t)\psi_{00}(s) (t^2 + s) ds dt & \cdots & \int_0^1 \int_0^1 \psi_{00}(t)\psi_{12}(s) (t^2 + s) ds dt \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \int_0^1 \int_0^1 \psi_{02}(t)\psi_{00}(s) (t^2 + s) ds dt & \cdots & \int_0^1 \int_0^1 \psi_{02}(t)\psi_{12}(s) (t^2 + s) ds dt \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \int_0^1 \int_0^1 \psi_{10}(t)\psi_{00}(s) (t^2 + s) ds dt & \cdots & \int_0^1 \int_0^1 \psi_{10}(t)\psi_{12}(s) (t^2 + s) ds dt \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \int_0^1 \int_0^1 \psi_{12}(t)\psi_{00}(s) (t^2 + s) ds dt & \cdots & \int_0^1 \int_0^1 \psi_{12}(t)\psi_{12}(s) (t^2 + s) ds dt \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} -2.1684 \times 10^{-19} & -2.1684 \times 10^{-18} & 0.0186339 & 0.0138889 & 0.0360844 & 0.0962751 \\ 0.0102081 & 0.0208333 & 0.0591706 & 0.0360844 & 0.0833333 & 0.193649 \\ 0.0465847 & 0.0806872 & 0.145833 & 0.0776412 & 0.161374 & 0.319444 \\ 0.0277778 & 0.0481125 & 0.0807469 & 0.0416667 & 0.0841969 & 0.158888 \\ 0.0601407 & 0.104167 & 0.166753 & 0.0841969 & 0.166667 & 0.301232 \\ 0.108698 & 0.18827 & 0.284722 & 0.139754 & 0.268957 & 0.458333 \end{pmatrix}$$

$\Phi$  matris (3.11) ifadesinde tanımlanmıştır. Ters alındığında

$$\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3/2}}{8} & \frac{1}{8\sqrt{10}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12\sqrt{2}}{5} & \frac{\sqrt{6}}{1} & \frac{6\sqrt{10}}{1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3/2}}{8} & \frac{11}{8\sqrt{10}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{8\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3/2}}{8} & \frac{1}{8\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12\sqrt{2}}{5} & \frac{\sqrt{6}}{1} & \frac{6\sqrt{10}}{1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3/2}}{8} & \frac{11}{8\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

Blok darbe fonksiyonlarının kesirli integrali için operasyonel matrisin oluşturulmasında, katsayılar ( $\xi_i$ ) şu formülle hesaplanır:

$$\xi_i = (i+1)^{\alpha+1} - 2i^{\alpha+1} + (i-1)^{\alpha+1}.$$

$\alpha = 1$  yerine konulduğunda katsayılar:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (1+1)^{1+1} - 2 \cdot 1^{1+1} + (1-1)^{1+1} = 2, \\ \xi_2 &= (2+1)^{1+1} - 2 \cdot 2^{1+1} + (2-1)^{1+1} = 2, \\ \xi_3 &= (3+1)^{1+1} - 2 \cdot 3^{1+1} + (3-1)^{1+1} = 2, \\ \xi_4 &= (4+1)^{1+1} - 2 \cdot 4^{1+1} + (4-1)^{1+1} = 2, \\ \xi_5 &= (5+1)^{1+1} - 2 \cdot 5^{1+1} + (5-1)^{1+1} = 2, \end{aligned}$$

Bu değerler kullanılarak operasyonel matris

$$\mathbf{F}^1 = \frac{1}{6^1} \frac{1}{\Gamma(2.95)} \begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 \\ 0 & 1 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ 0 & 0 & 1 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Sayısal biçimi

$$\mathbf{F}^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Daha önce  $\mathbf{F}^1$  ve  $\Phi$  matrisi elde edildiği için, Chelyshkov dalgacıklarına ait kesirli integrale ilişkin operasyonel matris

$$\mathbf{P}^\alpha = \Phi \cdot \mathbf{F}^\alpha \cdot \Phi^{-1}.$$

$\alpha = 1$  yerine konulduğunda

$$\mathbf{P}^1 = \begin{pmatrix} 0.0108025 & 0.0948886 & 0.095585 & 0.0401235 & 0.0694959 & 0.0897188 \\ -0.017374 & 0.0914352 & 0.238177 & 0.10959 & 0.189815 & 0.24505 \\ 0.00862681 & -0.0164363 & 0.147762 & 0.120775 & 0.209189 & 0.270062 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0108025 & 0.0948886 & 0.095585 \\ 0 & 0 & 0 & -0.017374 & 0.0914352 & 0.238177 \\ 0 & 0 & 0 & 0.00862681 & -0.0164363 & 0.147762 \end{pmatrix}.$$

$m' = 6$  alındığından bu altı elemanlı blok darbe fonksiyonuna karşılık gelir ve aşağıdaki sütun vektörü:

$$\mathbf{B}(t) = [b_0(t), b_1(t), b_2(t), b_3(t), b_4(t), b_5(t)]^T$$

ile tanımlanır.  $[0, t]$  integrasyon aralığı altı eşit alt aralığa bölündüğünden, vektör fonksiyonu

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= \int_0^t \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{1/2}} ds \\ &= \int_0^{\frac{1}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{1/2}} ds + \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{2}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{1/2}} ds + \int_{\frac{2}{6}}^{\frac{3}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{1/2}} ds \\ &\quad + \int_{\frac{3}{6}}^{\frac{4}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{1/2}} ds + \int_{\frac{4}{6}}^{\frac{5}{6}} \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{1/2}} ds + \int_{\frac{5}{6}}^t \frac{\mathbf{B}(s)}{(t-s)^{1/2}} ds. \end{aligned}$$



Yine  $m' = 6$  alındığından katsayı vektörü  $\mathbf{C}^T$  ve Chelyshkov dalgacıları vektörü  $\Psi$

$$\mathbf{C}^T = [C_{00}, C_{01}, C_{02}, C_{10}, C_{11}, C_{12}] \text{ ve } \Psi = [\psi_{00}, \psi_{01}, \psi_{02}, \psi_{10}, \psi_{11}, \psi_{12}]^T$$

Gerekli tüm matrisler oluşturulduktan sonra, cebirsel sistem sıralama noktalarında

$$t_i = \frac{2i-1}{12}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

değerlendirilir ve aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$\mathbf{C}^T \Psi(t_i) = \lambda_1 \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \Phi \mathbf{V}(t_i) + \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \mathbf{W}^T \Psi(t_i) + f(t_i).$$

lineer cebirsel sistemi elde edilir.

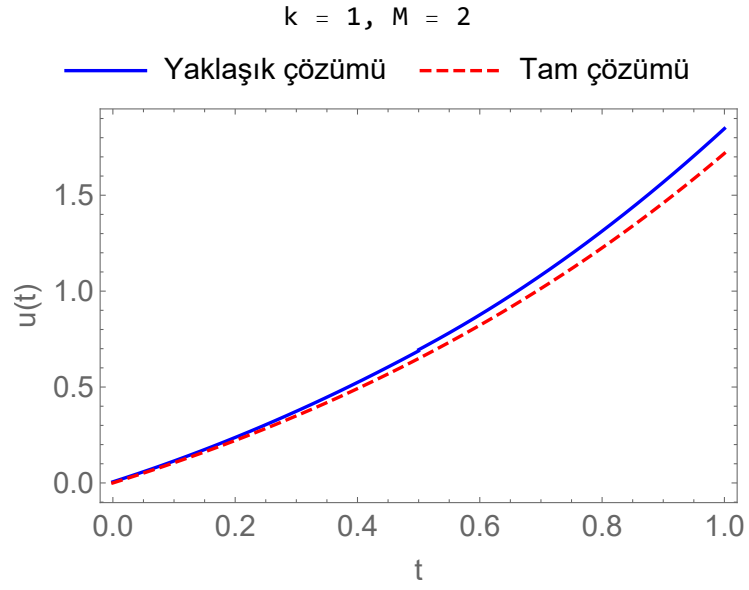
Son olarak, hesaplanan katsayı vektörü  $\mathbf{C}^T$  denklem (5.4)'te yerine konulduğunda yaklaşık çözüm  $u(t)$  bulunur.

Tablo 6.13. Chelyshkov dalgacıları için mutlak hata değerleri

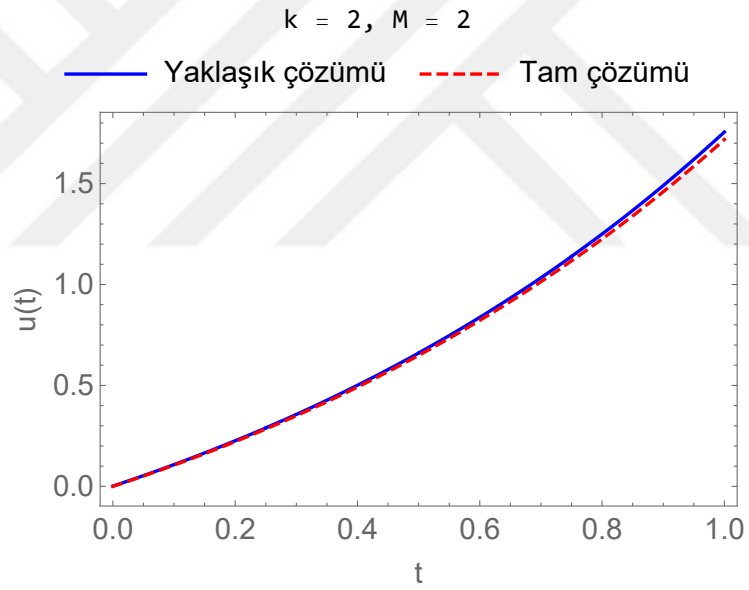
| $t$ | $k = 1$                 | $k = 2$                 | $k = 3$                 |
|-----|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 0   | $5.7973 \times 10^{-3}$ | $1.0921 \times 10^{-3}$ | $2.4209 \times 10^{-4}$ |
| 1/6 | $1.3293 \times 10^{-2}$ | $3.8421 \times 10^{-3}$ | $1.0906 \times 10^{-3}$ |
| 2/6 | $2.6584 \times 10^{-2}$ | $7.2318 \times 10^{-3}$ | $2.1537 \times 10^{-3}$ |
| 3/6 | $4.5871 \times 10^{-2}$ | $1.2224 \times 10^{-2}$ | $3.5694 \times 10^{-3}$ |
| 4/6 | $6.3205 \times 10^{-2}$ | $1.8122 \times 10^{-2}$ | $5.3829 \times 10^{-3}$ |
| 5/6 | $9.4219 \times 10^{-2}$ | $2.6320 \times 10^{-2}$ | $7.9253 \times 10^{-3}$ |

Tablo 6.14. Örnek 6.6 Chelyshkov dalgacıları için  $L_\infty$  hata değerleri

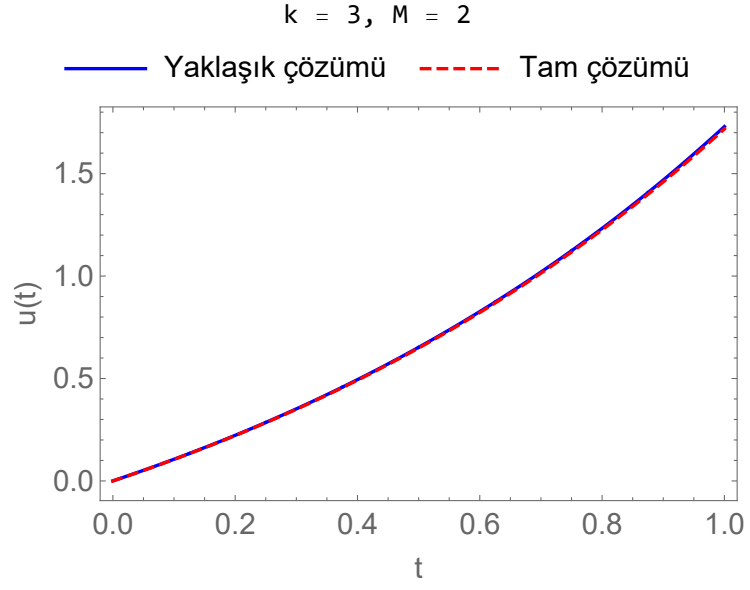
| $k$ | $L_\infty$              |
|-----|-------------------------|
| 1   | $9.4219 \times 10^{-2}$ |
| 2   | $2.632 \times 10^{-2}$  |
| 3   | $7.9253 \times 10^{-3}$ |
| 4   | $2.4522 \times 10^{-3}$ |
| 5   | $7.8122 \times 10^{-4}$ |



Şekil 6.16. Örnek 6.6:  $k = 1$  ve  $M = 2$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 6.17. Örnek 6.6:  $k = 2$  ve  $M = 2$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması



Şekil 6.18. Örnek 6.6:  $k = 3$  ve  $M = 2$  için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırması

Yukarıdaki iki tablodan ve grafiklerden,  $k$  arttıkça her  $t$  noktasındaki mutlak hataların azaldığı ve benzer şekilde  $L_{\infty}$  hatasının da azaldığı açıktır.

## 7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Zayıf tekil çekirdekli integral ve integro-diferansiyel denklemler, birçok bilimsel ve mühendislik uygulamasında sıklıkla kullanılmaktadır. Bu tür denklemler için analitik çözümleri elde etmek çoğunlukla zor veya zaman alıcıdır. Bu nedenle, tam çözüme en yakın yaklaşık çözümlerin hesaplanması ve sayısal yöntemlerin geliştirilmesi uzun yıllar boyunca araştırılan bir çalışma alanı olmuştur.

Bu tez kapsamında, Chelyshkov dalgacık yöntemi, kesirli mertebeden ve zayıf tekil çekirdekli integro-diferansiyel denklemlerin çözümünde başarıyla uygulanmış ve oldukça güzel sonuçlar elde edilmiştir. Mutlak hata analizinde  $L_\infty$  yaygın olarak kullanılan normu değerlendirme ölçütü olarak seçilmiş ve bazı örneklerde mevcut dalgacık tabanlı yaklaşımlara göre daha yüksek doğruluk elde edildiği gösterilmiştir. Yöntemin genel performansı güçlü olmakla birlikte, özellikle trigonometrik çekirdeklere sahip örneklerde ek iyileştirmelere ve daha kapsamlı nümerik deneylere ihtiyaç duyulduğu gözlemlenmiştir.

Bu doğrultuda, yöntemi daha esnek ve kararlı hâle getirecek küçük yaklaşımların geliştirilmesi, ileriki çalışmalar için oldukça ilham verici bir araştırma yönü olarak değerlendirilmektedir. Böyle bir ilerleme, hem çözüm doğruluğunun artırılması hem de hesaplama verimliliğinin iyileştirilmesi açısından önemli bir potansiyel taşımaktadır.

## KAYNAKLAR

- [1] Yi, M., & Huang, J. (2015). CAS wavelet method for solving the fractional integro-differential equation with a weakly singular kernel. *International Journal of Computer Mathematics*, 92(8), 1715-1728.
- [2] Yousefi, S., & Banifatemi, A. (2006). Numerical solution of Fredholm integral equations by using CAS wavelets. *Applied Mathematics and Computation*, 183(1), 458-463.
- [3] Wang, Y., & Zhu, L. (2016). SCW method for solving the fractional integro-differential equations with a weakly singular kernel. *Applied Mathematics and Computation*, 275, 72-80.
- [4] Keshavarz, E., & Ordokhani, Y. (2019). A fast numerical algorithm based on the Taylor wavelets for solving the fractional integro-differential equations with weakly singular kernels. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 42(13), 4427-4443.
- [5] Behera, S., & Saha Ray, S. (2021). Euler wavelets method for solving fractional-order linear Volterra–Fredholm integro-differential equations with weakly singular kernels. *Computational and Applied Mathematics*, 40(6), 192.
- [6] Wang, Y., & Zhou, X. (2024). An efficient numerical method based on Bell wavelets for solving the fractional integro-differential equations with weakly singular kernels. *Fractal and Fractional*, 8(2), 74.
- [7] Yi, M., Wang, L., & Huang, J. (2016). Legendre wavelets method for the numerical solution of fractional integro-differential equations with weakly singular kernel. *Applied Mathematical Modelling*, 40(4), 3422-3437.
- [8] Karataş, A. S. (2020). Chebyshev dalgacık sıralama yöntemiyle kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri (Master's thesis, Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü).
- [9] Esmail, Y. M., El-Azab, M. S., & El-Baghdady, G. I. (2024). Numerical Treatment of Abel's Integral Equations Via Chelyshkov Wavelets Collocation Technique. *Computational Algorithms and Numerical Dimensions*, 3(3), 243-251.
- [10] Shiralashetti, S. C., Kulkarni, P. I., & Hanaji, S. I. (2025). Chelyshkov wavelet-based numerical technique for the solution of Darcy–Forchheimer flow of Eyring–Powell radiated dusty fluid over a stretching sheet with Cattaneo–Christov heat flux. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 86(8), 2691-2720.
- [11] Ordokhani, Y., Sabermahani, S., & Rahimkhani, P. (2025). Application of Chelyshkov wavelets and least squares support vector regression to solve fractional differential equations arising in optics and engineering. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 48(2), 1996-2010.
- [12] Moradi, L., Mohammadi, F., & Baleanu, D. (2019). A direct numerical solution of time-delay fractional optimal control problems by using Chelyshkov wavelets. *Journal of Vibration and Control*, 25(2), 310-324.
- [13] Atangana, A., & Secer, A. (2013). A note on fractional order derivatives and table of fractional derivatives of some special functions. In *Abstract and Applied Analysis* (Vol. 2013, No. 1, p. 279681). Hindawi Publishing Corporation.

- [14] Kimeu, J. M. (2009). Fractional calculus: Definitions and applications.
- [15] Sikora, B. (2023). Remarks on the Caputo fractional derivative. *MINUT Matematyka i Informatyka na Uczelniach Technicznych*, 76-84.
- [16] Li, B. (2013). The second kind Chebyshev wavelet method for fractional differential equations with variable coefficients. *Comput. Model. Eng. Sci*, 93(3), 187-202.
- [17] Li, Y., & Sun, N. (2011). Numerical solution of fractional differential equations using the generalized block pulse operational matrix. *Computers & Mathematics with Applications*, 62(3), 1046-1054.
- [18] Wazwaz, A. M. (2015). First course in integral equations. World Scientific Publishing Company.
- [19] Kilicman, A., & Al Zhour, Z. A. A. (2007). Kronecker operational matrices for fractional calculus and some applications. *Applied Mathematics and Computation*, 187(1), 250-265.
- [20] Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., & Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 65-70.
- [21] Uçar, D., & Korkmaz, F. (2019). Farklı Türden Fonksiyonlar İçin Uyumlu Kesirli İntegral Eşitsizlikleri. *Uşak Üniversitesi Fen ve Doğa Bilimleri Dergisi*, 3(2), 51-64.
- [22] Taghipour, M., & Aminikhah, H. (2022). A fast collocation method for solving the weakly singular fractional integro-differential equation. *Computational and Applied Mathematics*, 41(4), 142.
- [23] Haddad, R. E. (2021). Repeated Integration and Explicit Formula for the  $n$ -th Integral of  $x^m(\ln x)^{m'}$ . arXiv preprint arXiv:2102.11723.
- [24] Bader, Y. F. O. (2018). School of Applied Sciences (Doctoral dissertation, Near East University).
- [25] Abalı, S., & Konuralp, A. (2025). Solutions of Volterra-Fredholm type fractional integro-differential equations in terms of shifted Gegenbauer wavelets compared with the solutions by Genocchi polynomial method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 117056.

## 8. ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı:** Mwangelwa MWABA

### EĞİTİM

| Kurum                                          | Bitirme Yılı |
|------------------------------------------------|--------------|
| Lise: Temweni Lisesi                           | 2011         |
| Üniversite: Manisa Celal Bayar Üniversitesi    | 2019         |
| Yüksek Lisans: Manisa Celal Bayar Üniversitesi | 2025         |

### İŞ DENEYİMLERİ

| Kurum           | Yıl  |
|-----------------|------|
| Sınav köleji:   | 2024 |
| TES dili okulu: | 2025 |

### YABANCI DİLLER

| Yabancı Dil              | Seviye  |
|--------------------------|---------|
| Yabancı Dil 1: İngilizce | Anadili |

### SERTİFİKALAR

| Sertifika Alanı         | Verildiği Kurum | Yıl  |
|-------------------------|-----------------|------|
| AWS Developer Associate | AWS             | 2024 |