



**T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ZAYIF $\oplus$ - YEREL ARTIN TÜMLENMİŞ MODÜLLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RUHİYE KURT

OCAK 2023

RUHİYE KURT

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

OCAK 2023

ZAYIF $-\oplus-$ YEREL ARTİN TÜMLENİMİŞ MODÜLLER

Ruhiye KURT

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

OCAK 2023

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Ruhiye KURT tarafından hazırlanan “Zayıf- $\oplus$ -Yerel Artin Tümlenmiş Modüller” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ/OY ÇOKLUĞU ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Üye : Doç. Dr. Celil NEBİYEYEV

Matematik Anabilim Dalı, Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Üye : Doç. Dr. Hasan Hüseyin ÖKTEN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Tez Savunma Tarihi: 26/01/2023

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdür

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

(İmza)

Ruhiye KURT

(26/01/2023)

ZAYIF $-\oplus-$ YEREL ARTIN TÜMLENİMİŞ MODÜLLER
(Yüksek Lisans Tezi)

Ruhiye KURT

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ocak 2023

ÖZET

Bu çalışmada (D_{1LA}) -modüller, sonlu üretilmiş (D_{1WLA}) -modüller, $\oplus_{WLA}$ -tümlenmiş modüller ve (D_{1GLA}) -modüllerin sınıfları tanımlanarak bu sınıfların sağladığı temel özellikler verildi. (D_{1LA}) -modülün $\oplus_{WLA}$ -tümlenmiş modül olduğu gösterildi. Sonlu sayıda $\oplus_{WLA}$ -tümlenmiş modülün direkt toplamının $\oplus_{WLA}$ -tümlenmiş modül olduğu gösterildi. (D_3) koşulunu sağlayan $\oplus_{WLA}$ -tümlenmiş modülün direkt toplam teriminin de $\oplus_{WLA}$ -tümlenmiş modül olduğu ispatlandı. (D_{1GLA}) -modülün $\oplus_{WLA}$ -tümlenmiş modül olduğu elde edildi. Ayrıca yerel artin tümlenmiş bir modülün, her yerel artin alt modülünün bir direkt toplam terimine yükseltilebildiği takdirde bu modülün $\oplus_{WLA}$ -tümlenmiş olduğu görüldü.

Sayfa Adedi	: 46
Anahtar Kelimeler	: zayıf- $\oplus$ - yerel artin tümlenmiş modül, zayıf yerel artin yükseltilebilir modül, genelleştirilmiş yerel artin yükseltilebilir modül
Danışman	: Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN

WEAK- $\oplus$ -LOCALLY ARTINIAN SUPPLEMENTED MODULES

(M. Sc. Thesis)

Ruhiye KURT

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2023

ABSTRACT

In this study, it is defined the classes of (D_{1LA}) -modules, finitely generated (D_{1WLA}) -modules, $\oplus_{WLA}$ -supplemented modules, (D_{1GLA}) -modules and given key features of these modules. It was shown that a (D_{1LA}) -module is a $\oplus_{WLA}$ -supplemented module. It was shown that the finite direct sum of $\oplus_{WLA}$ -supplemented modules is a $\oplus_{WLA}$ -supplemented module. It has been proven that the direct sum of the $\oplus_{WLA}$ -supplemented module satisfying the condition (D_3) is also $\oplus_{WLA}$ -supplemented. It was obtained that every (D_{1GLA}) -module is a $\oplus_{WLA}$ -supplemented module. It was also determined that if each locally artinian submodule of a locally artinian supplemented module can be lies above a direct summand, the module is $\oplus_{WLA}$ -supplemented.

Number of pages : 46

Keywords : weak- $\oplus$ -locally artinian supplemented module, weak locally artinian lifting module, locally artinian module, generalized locally artinian lifting module

Supervisor : Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Araştırmam boyunca her konuda bana rehberlik eden, tecrübe ve bilgileriyle beni yönlendiren, bu tez konusunu bularak çalışmamı sağlayan, çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemedi değerli katkı ve önerileriyle tezimi yöneten tez danışmanım değerli hocam sayın Prof. Dr. Burcu Nişancı Türkmen’e teşekkürü bir borç bilirim.

Tez çalışmam boyunca karşılaştığım problemlerin çözümünde yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. Ergül Türkmen’ e çok teşekkür ederim.

Tezimin geliştirilmesinde desteklerini sunan Doç. Dr. Celil Nebiyev ve Doç. Dr. Hasan Hüseyin Ökten hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

En zor anlarımda karşılıksız desteğiyle her daim yanımda olan sevgili eşim Doğan Uğur Kurt’a ve biricik kızım Eylül Kurt’a çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	2
2.1. Halkalar.....	2
2.2. Modüller.....	4
2.3. Modül Homomorfizmaları	5
2.4. Direkt Çarpımlar ve Direkt Toplamlar	7
2.5. Artin ve Noether Modüller.....	10
2.6. Projektif ve İnjektif Modüller	12
2.7. Küçük Alt Modüller	14
2.8. Basit ve Yarı Basit Modüller	16
2.9. Bir Modülün Desteği ve Radikali	20
2.10. Yerel ve Yarı Yerel Modüller	22
2.11. Yerel Artin Modüller	24
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	26
3.1. Tümlenmiş ve Bol Tümlenmiş Modüller.....	26
3.2. $\oplus$ -Tümlenmiş ve Zayıf Tümlenmiş Modüller	27
3.3. (Zayıf) Yükseltilebilir ve Zayıf $\oplus$ - Tümlenmiş Modüller	28

3.4. ss- Tümlenmiş Modüller	30
3.5. Yerel Artin Tümlenmiş Modüller	33
4. BULGULAR VE TARTIşMA	37
4.1. Zayıf $\oplus$ - Yerel Artin Tümlenmiş Modüller	37
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	43
KAYNAKLAR	44
ZGEÇMİř	46



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
S	birimli halka
1_S	birimli S halkasının birimi
$\mathbb{Z}$	tamsayılar halkası
$\mathbb{P}$	asal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	tamsayılar halkasının kesirler cismi
$\mathbb{N}$	doğal sayılar kümesi
$\emptyset$	boş küme
$\subseteq$	alt küme
$\not\subseteq$	alt küme değil
$\subsetneq$	öz alt küme
$\leq$	alt modül
$<$	öz alt modül
$mS = \langle m \rangle$	m elemanı tarafından üretilen devirli alt modül
$End(M)$	M modülünün endomorfizmalarının kümesi
$Gör(f)$	f homomorfizmasının görüntü kümesi
$Çek(f)$	f homomorfizmasının çekirdeği
$K \cong N$	K ile N modülleri izomorftur.
i	içerme monomorfizması
π	doğal homomorfizma
$f _N$	M modülünden herhangi bir modüle tanımlı f homomorfizmasının $N \leq M$ alt modülüne kısıtlanması
I_K	K modülünün birim homomorfizması
K/N	K modülünün N alt modülüne göre bölüm modülü
$\langle X \rangle$	X kümesi tarafından üretilen modül

$Des(K)$	K modülünün tüm basit alt modüllerinin toplamı
$Des_s(K)$	K modülünün tüm küçük ve basit alt modüllerinin toplamı
$\ll$	küçük alt modül
$\leq$	büyük alt modül
$Rad(K)$	K modülünün radikali
$P(K)$	K modülünün tüm radikal alt modüllerinin ($U = Rad(U), U \leq K$) toplamı
$\bigoplus_{i \in I} N_i$	N_i alt modüllerinin direkt toplamı
$\prod_{i \in I} N_i$	N_i alt modüllerinin direkt çarpımı
$\sum_{i \in I} N_i$	N_i alt modüllerinin toplamı

1. GİRİŞ

1970’lerde Helmut Zöschinger tümlenmiş modül ve tümleyen alt modül kavramları üzerine çalışma yapmıştır. 1979 da Varadarajan bir makalesinde tümleyen alt modüllerle çalışmıştır. 2006 yılında Nil Orhan Ertaş zayıf- $\oplus$ -tümlenmiş modül ($w\text{-}\oplus$ -tümlenmiş modül) üzerine çalışma yapmıştır. Engin Kaynar, Ergül Türkmen ve Hamza Çalışıcı’nın 2020 de yayınladıkları ‘ss-Supplemented Modules’ isimli makalelerinde ss-tümlenmiş modüller üzerine çalışarak temel özelliklerine değinmişlerdir. 2021 yılında Yavuz Şahin ve Burcu Nişancı Türkmen Yerel Artin Tümlenmiş Modüller üzerine çalışma yapmışlardır. T bir modül ve $X \leq T$ olmak üzere $Y \leq T$ modülü $T = Y + X$ şartını sağlayan bir minimal alt modülse, Y modülüne X in tümleyeni ve X e de T de Y tümleyenine sahip denir. Buna denk olarak; K nın T de N nin tümleyeni olabilmesi için $T = N + K$, $N \cap K \ll K$ olması gerek ve yeterlidir. Eğer T nin alt modüllerinin T de bir tümleyeni mevcutsa, T ye tümlenmiş modül adı verilir. $A \leq T$ için $N \leq A$ ve $A/N \ll T/N$ olacak biçimde T modülünün bir N direkt toplam terimi mevcutsa T ye yükseltilebilir modül adı verilir (Clark vd., 2006). T modül ve T nin her yarı basit alt modülü N ise $T = N + V$ ve $N \cap V \ll V$ şeklinde T nin bir V direkt toplam alt modülü varsa T ye zayıf- $\oplus$ -tümlenmiş modül ($w\text{-}\oplus$ -tümlenmiş modül) denir (Orhan Ertaş N., 2006). T nin tüm küçük ve basit alt modüllerinin toplamı $Des_s(T) = \sum \{N \ll T | N, T \text{ nin basit alt modülü}\}$ olarak tanımlanır. T yerel modül ve $Rad(T)$, T nin yerel artin alt modülü oluyorsa T ye RLA yerel modül adı verilir. T modülü için $Des_s(T) = Rad(T) \cap Des(T)$ dir. T modül ve X ile Y , T nin alt modülleri ise $T = X + Y$ ve $X \cap Y \leq Des_s(Y)$ oluyorsa Y ye X in ss-tümleyeni adı verilir (Kaynar vd., 2020). T bir modül ve $X \leq T$ olsun. $T = X + Y$, $X \cap Y \ll Y$ ve $X \cap Y$, T nin yerel artin modülü olmak üzere Y ye X in yerel artin tümleyeni adı verilir. T nin alt modülleri T de yerel artin tümleyene sahip oluyorsa T ye yerel artin tümlenmiş modül adı verilir. T modülünün $T = X + Y$ olan her $X \leq T$ için Y de kapsanacak şekilde yerel artin tümleyene sahip oluyorsa T ye bol yerel artin tümlenmiş modül adı verilir (Şahin ve Nişancı Türkmen, 2021).

Bu sonuçlardan hareketle bu tez çalışmasında (zayıf) yerel artin yükseltilebilir modüller, sonlu üretilmiş zayıf yerel artin yükseltilebilir modüller, zayıf- $\oplus$ -yerel artin tümlenmiş modüller ve genelleştirilmiş yerel artin yükseltilebilir modüller tanımlandı ve bu modül sınıflarının sağlamış oldukları cebirsel özellikler incelendi.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde üzerinde çalışacağımız konuyla ilgili tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. Halkalar

2.1.1. Tanım $(S, +, \cdot)$ cebirsel üçlüsü her $k, t, m \in S$ elemanları için aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu yapıya *halka* denir.

- (i) $(S, +)$ değişmeli gruptur,
- (ii) $(k \cdot t) \cdot m = k \cdot (t \cdot m)$ olup $\cdot$ işlemi birleşmelidir,
- (iii) $k \cdot (t + m) = k \cdot t + k \cdot m$ ve $(k + t)m = k \cdot m + t \cdot m$ olup $\cdot$ işleminin $+$ üzerine dağılma özelliği vardır (Hungerford, 1973).

Kısalık anlamında $k, t \in S$ elemanları için $k \cdot t$ yerine kt kullanılacaktır.

2.1.2. Tanım S bir halka ve her $m, n \in S$ için $mn = nm$ oluyorsa S ye *değişmeli halka*, $1_S \in S$ olmak üzere her $m \in S$ için $1_S m = m 1_S = m$ ise S ye *birimli halka*, 1_S elemanına S halkasının *birim elemanı* adı verilir (Hungerford, 1973).

Değişmeli halkalara örnek olarak $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ halkaları verilebilir. $n > 1$ olmak şartıyla, katsayıları tamsayılar olan $n \times n$ tipindeki matrislerin halkası olan $M_n(\mathbb{Z})$ halkası değişmeli olmayan halkadır (Hungerford, 1973).

Çalışmamızda kullanılan tüm S halkaları birimli halka olarak çalışılacaktır.

2.1.3. Tanım S halka ve $0 \neq m \in S$ için $nm = 0$ ($mn = 0$) şeklinde S nin $0 \neq n \in S$ mevcutsa, m *sağ (sol) sıfır bölen eleman* adı verilir. Halkanın sağ (sol) sıfır bölen elemanı yoksa *sağ (sol) sıfır bölensiz halka* ve sağ (sol) sıfır bölensiz olan halkaya *sıfır bölensiz halka* adı verilir (Hungerford, 1973).

Örneğin $p \in \mathbb{P}$ asal tamsayı için $\mathbb{Z}_p$ sıfır bölensiz halkadır. Böylece $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5$ halkaları sıfır bölensiz halkalardır (Hungerford, 1973).

2.1.4. Tanım Sıfır bölensiz olan bir değişmeli halkaya *değişmeli bölge* adı verilir (Hungerford, 1973).

2.1.5. Tanım S halka ve $m \in S$ olmak üzere $mn = nm = 1_S$ olacak biçimde $n \in S$ mevcutsa m elemanına *terslenebilir*, n elemanına ise m elemanının *tersi* adı verilir (Hungerford, 1973).

2.1.6. Tanım S halkasında sıfır dışındaki elemanlar terslenebilir ise S ye *bölme halkası* adı verilir. Değişmeli olan bölme halkasına *cisim* adı verilir (Hungerford, 1973).

2.1.7. Tanım S halka, $\emptyset \neq T \subseteq S$ ve her $x, y \in T$ için T, S nin alt grubu ve $xy \in T$ oluyorsa T ye S nin *alt halkası* adı verilir ve her $x \in T$ ve $s \in S$ için $xs \in T$ ($sx \in T$) oluyorsa T ye S halkasının *sağ (sol) ideali* adı verilir. T kümesi S nin sağ ve sol ideali oluyorsa T ye S nin *ideali* adı verilir (Hungerford, 1973).

Sağ (sol) idealler birer alt halkadır fakat tersi doğru olmayabilir. Örneğin; $T = \left\{ \begin{pmatrix} n & k \\ 0 & k' \end{pmatrix} \mid k, k' \in \mathbb{Q} \text{ ve } t \in \mathbb{Z} \right\}$ kümesi $M_2(\mathbb{Z})$ matris halkasının bir alt halkasıdır fakat sağ (sol) ideali değildir.

2.1.8. Tanım S halkasının 0 ve S idealleri birer *aşıkâr idealdir*. S halkasının kendisinden başka bütün ideallerine ise *öz ideal* adı verilir (Hungerford, 1973).

2.1.9. Tanım Değişmeli S halkasının I ideali için; I ideali sadece $b \in S$ elemanı tarafından üretilmişse I ya *esas ideal* adı verilir (Hungerford, 1973).

2.1.10. Tanım Değişmeli S halkasının T ideali için; $x, y \in S$ olmak şartıyla $xy \in T$ iken $x \in T$ veya $y \in T$ oluyor ise T ye S nin *asal ideali* adı verilir (Hungerford, 1973).

2.1.11. Tanım S halka ve S nin kendinden farklı bir sol ideali I olmak şartıyla, S de I idealini kapsayan S dışında bir sol ideal mevcut değilse I, S nin *maksimal sol ideali* olarak adlandırılır. Değişmeli ve birimli halkalarda her maksimal ideal bir asal idealdir (Hungerford, 1973).

2.2. Modüller

2.2.1. Tanım S bir halka ve $(T, +)$ değişmeli grup olmak üzere;

• $(k, r) = kr$ ile gösterilen $\bullet : T \times S \rightarrow T$ dış işlemi; her $r, t \in S$ ve her $k, l \in T$ için

(i) $(k + l)r = kr + lr$,

(ii) $k(r + t) = kr + kt$,

(iii) $k(rt) = (kr)t$

şartlarını gerçekleştiriyorsa T değişmeli grubuna “ $\bullet$ ” dış işlemine göre bir *sağ S -modül* adı verilir ve T_S yazılışı ile sembolize edilir. S , birimi 1_S olan bir halka olsun. Her $k \in T$ için $k1_S = k$ eşitliği gerçekleşiyorsa T modülüne *üniter sağ S -modül* denir. S halkasının tanımı gereği S_S nin üniter sağ S -modül olduğu açıktır. Bu sebeple modül kavramına halkaların genellemesi olarak bakılabilir (Hungerford, 1973).

Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe tüm modülleri üniter sağ S -modül olarak alacağız.

2.2.2. Tanım T modül ve boştan farklı $N \subseteq T$ alalım. $(T, +)$ değişmeli grubun bir N alt grubunda her $k \in N$ ve her $s \in S$ için $ks \in N$ sağlanıyorsa N ye T nin bir *alt modülü* adı verilir ve $N \leq T$ biçiminde ifade edilir.

Buna göre 0 ve T modülleri T nin alt modülleri olur ve bu alt modüllere *aşikâr alt modüller* adı verilir. (Hungerford, 1973).

2.2.3. Tanım T modülünün kendinden farklı her alt modülüne *öz alt modül* adı verilir. $K < T$ şeklinde ifade edilir (Hungerford, 1973).

2.2.4. Tanım T modül ve $N \leq T$ olmak üzere T nin N yi kapsayan T ve N dışında bir alt modülü mevcut değilse N ye T nin *maksimal alt modülü* adı verilir (Hungerford, 1973).

2.2.5. Teorem T modülünün alt modüllerinin kesişimi de T nin alt modülüdür (Hungerford, 1973).

2.2.6. Tanım T modül ve $K < T$ olmak üzere T nin K yı kapsayan tüm alt modüllerinin kesişimine T nin K tarafından üretilen *alt modülü* adı verilir ve $\langle K \rangle$ şeklinde ifade edilir. Burada K kümesine $\langle K \rangle$ alt modülünün *üreteç kümesi* adı verilir. K kümesi sonlu ise,

$\langle K \rangle$ alt modülüne *sonlu üretilmiş alt modül* adı verilir. $K = \{t\}$ şeklinde tek bir elemanı varsa $\langle K \rangle = \langle t \rangle$ ye *devirli alt modül* adı verilir. T nin $T = \langle K \rangle$ olacak biçimde bir K sonlu alt kümesi mevcutsa T ye *sonlu üretilmiş modül* adı verilir. Eğer $T = \langle t \rangle$ olacak biçimde bir $t \in T$ mevcutsa T ye t elemanı tarafından üretilmiş devirli modül adı verilir (Hungerford, 1973).

2.2.7. Tanım S değişmeli bölge ve N S -modül olsun. $0 \neq s \in S$ için $ns = 0$ şartını gerçekleştiren $n \in N$ elemanına N nin *burulma elemanı* adı verilir. N nin bütün burulma elemanlarından oluşan küme $T(N) = \{n \in N : 0 \neq s \in S \text{ için } ns = 0\}$ dir ve bu kümeye N nin *burulmalı alt modülü* adı verilir. $T(N) = N$ ise N ye *burulmalı modül*, $T(N) = 0$ oluyorsa N ye *burulmasız modül* adı verilir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.2.8. Tanım T , S -modül ve N alt modülü için T/N bölüm grubu, $t + N \in T/N$ ve $g \in S$ elemanları için $(t + N)g = tg + N$ biçiminde tanımlanmış dış işleme göre modül yapısındadır ve bu modüle T nin N alt modülüne göre *bölüm modülü* adı verilir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.2.9. Teorem T modülü sonlu üretilmiş ve $K < T$ keyfi olsun. Bu durumda K , T nin bir maksimal alt modülde içerilir (Hungerford, 1973).

2.3. Modül Homomorfizmaları

2.3.1. Tanım S halkası ve K, N modüllerinin her $m, t \in K$ ve her $s \in S$ elemanları için;

$$(i) f(m + t) = f(m) + f(t)$$

$$(ii) f(ms) = f(m)s$$

koşullarını gerçekleştiren $f: K \rightarrow N$ fonksiyonuna *S -modül homomorfizması* adı verilir (Hungerford, 1973).

2.3.2. Tanım K dan N ye tanımlanmış bütün modül homomorfizmalarının kümesi $Hom(K, N)$ ile ifade edilir.

K bir modül olmak üzere $f: K \rightarrow K$ şeklindeki homomorfizmaya K modülünün *endomorfizması* adı verilir. K modülünün bütün endomorfizmalarının kümesi ise $End(K)$ şeklinde ifade edilir.

$f: K \rightarrow N$ bir homomorfizma olsun. f homomorfizması örten ise *epimorfizma*, f homomorfizması bire bir ise *monomorfizma*, f homomorfizması bire bir ve örten ise *izomorfizma* adı verilir. K ile N modülleri arasında bir izomorfizma mevcutsa K ve N modülleri izomorftur ve $K \cong N$ ile gösterilir (Hungerford, 1973).

2.3.3. Tanım (i) $f: K \rightarrow N$ epimorfizması verilsin. $fg=1_N$ şeklinde $g: N \rightarrow K$ homomorfizması varsa f epimorfizmasına parçalanabilir epimorfizma adı verilir.

(ii) $f: K \rightarrow N$ bir monomorfizma olsun. $hf=1_K$ şeklinde $h: N \rightarrow K$ homomorfizması mevcutsa f ye parçalanabilir monomorfizma adı verilir (Wisbauer, 1991).

2.3.4. Teorem T modül, $N \leq T$ ve her $t \in T$ için $\pi(t) = t + N$ şeklinde tanımlanmış $\pi: T \rightarrow T/N$ dönüşümü bir epimorfizma olup bu epimorfizmaya *doğal (kanonik) epimorfizma* adı verilir.

Her $T \leq L$, $t \in T$ için $i(t) = t$ şeklinde tanımlanmış $i: T \rightarrow L$ dönüşümü monomorfizmadır ve bu monomorfizmaya *içerme monomorfizması* adı verilir (Hungerford, 1973).

2.3.5. Tanım T ve L modülleri için $f: T \rightarrow L$ modül homomorfizması olmak üzere $\{t \in T \mid f(t) = 0\}$ şeklindeki kümeye f nin *çekirdeği* adı verilir ve $\text{Çek}(f)$ şeklinde ifade edilir. $\{f(t) \mid t \in T\}$ şeklindeki kümeye f nin *görüntüsü* adı verilir ve $\text{Gör}(f)$ şeklinde ifade edilir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.3.6. Teorem X ve Y birer modül ve $f: X \rightarrow Y$ homomorfizma ise;

(i) $T \leq X$ ise, $f(T) \leq Y$ dir. Özel olarak $\text{Gör}(f) \leq Y$ olur.

(ii) $L \leq Y$ ise, $f^{-1}(L) \leq X$ dir.

(iii) $T \leq X$ ise, $f^{-1}(f(T)) = T + \text{Çek}(f)$ dir.

(iv) $T \leq X$ ve $L \leq Y$ ise,

$f^{-1}(f(T) + L) = T + f^{-1}(L)$ ve $f(f^{-1}(L) \cap T) = L \cap f(T)$ dir.

(v) g ve h modül homomorfizmaları için $f=gh$ ise $\text{Çek}(f) \cong h^{-1}(\text{Çek}(g))$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.3.7. Teorem K ve T modüller, $f: K \rightarrow T$ homomorfizma ve $\pi: K \rightarrow K/\text{Çek}(f)$ kanonik epimorfizma olmak üzere $f = g\pi$ şeklinde bir $g: K/\text{Çek}(f) \rightarrow T$ monomorfizması mevcuttur ve $K/\text{Çek}(f) \cong f(K)$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.3.8. Teorem T modülü ve $V, K \leq T$ iken $(V + K)/K$ bölüm modülü, T/K nin alt modülü olur ve $(V + K)/K \cong V/(V \cap K)$ dır (Alizade ve Pancar, 1999).

2.3.9. Teorem T modülünün $V \leq M \leq T$ alt modülleri için $T/M \cong (T/V)/(M/V)$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.3.10. Tanım T modül olmak üzere T modülünün öz alt modülleri en az bir maksimal alt modül tarafından kapsanırsa, T eş atom modül olarak adlandırılır (Zöschinger, 1974).

2.3.11. Teorem (Modüler Kural) N modül ve $M, L, T \leq N$ olsun. $T \leq L$ ise $(T + M) \cap L = T + (M \cap L)$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat Her $a \in (T + M) \cap L$ için $a \in T + M$ ve $a \in L$ olduğu için $a = x + y$ olacak biçimde $x \in T$ ve $y \in M$ mevcuttur. $T \leq L$ olduğu için $x \in T$ olur. $y = a - x$ ve $a \in L, x \in L$ olduğu için $y \in L$ olup $y \in M \cap L$ elde edilir. Yani $x \in T, y \in M \cap L$ iken $a = x + y \in T + (M \cap L)$ bulunur. Bu durumda $(T + M) \cap L \leq T + M \cap L$ olur. Ayrıca, $T + (M \cap L) \leq T + M$ ve $T + (M \cap L) \leq L$ olduğundan $T + (M \cap L) \leq (T + M) \cap L$ dir. Sonuç olarak $(T + M) \cap L = T + (M \cap L)$ eşitliği sağlanır.

2.4. Direkt Çarpımlar ve Direkt Toplamlar

2.4.1. Tanım N modülünün alt modüllerinin ailesi $\{N_i\}_{i \in I}$ olmak üzere $\sum_{i \in I} N_i = \{n_{i_1} + n_{i_2} + \dots + n_{i_k}; k \in \mathbb{Z}^+, i_1, i_2, \dots, i_k \in I, n_{i_1} \in N_{i_1}, n_{i_2} \in N_{i_2}, \dots, n_{i_k} \in N_{i_k}\}$ kümesi N nin alt modülü olur ve bu alt modüle $\{N_i\}_{i \in I}$ ailesinin toplamı adı verilir (Hungerford, 1973).

2.4.2. Tanım S halkası ve $I \neq \emptyset$ indis kümesi olsun. $\{T_i\}_{i \in I}$, S -modüllerin bir ailesi olmak üzere $\prod_{i \in I} T_i = \{\theta \mid \theta: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} T_i, \text{ her } i \in I \text{ için } \theta(i) \in T_i\}$ kümesine $\{T_i\}_{i \in I}$ modüller ailesinin çarpımı adı verilir.

Her $i \in I$ için $\theta(i) = \theta_i$ ve $\theta = (\theta_i)_{i \in I}$ ile ifade edelim. θ dönüşümünün i . bileşeni θ_i dir. Burada I sayılabilir ise, $\theta = (\theta_i)_{i \in I} \in I = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots)$ şeklinde gösterilir. $\theta, \omega \in \prod_{i \in I} T_i$ ve her $i \in I$ için;

$$(i) \theta = \omega \Leftrightarrow \theta_i = \omega_i,$$

$$(ii) \theta + \omega = (\theta_i + \omega_i)_{i \in I},$$

$$(iii) -\theta = (-\theta_i)_{i \in I},$$

(iv) $s \in S$ için $\theta s = (\theta_i s)_{i \in I}$ şeklinde tanımlanmış cebirsel işlemlere göre $\prod_{i \in I} T_i$ bir modül yapısındadır ve $\{T_i\}_{i \in I}$ modüller ailesinin *dış direkt çarpımı* adı verilir.

$\bigoplus_{i \in I}^w T_i = \{ (\theta_i)_{i \in I} \mid \text{sonlu sayıda } i \in I \text{ için } \theta_i \neq 0 \text{ ve } \theta_i \in T_i \}$ şeklindeki kümeye $\{T_i\}_{i \in I}$ modüller ailesinin *dış direkt toplamı* adı verilir ve bu küme $\prod_{i \in I} T_i$ modülünün bir alt modülüdür. I sonlu küme ise $\prod_{i \in I} T_i = \bigoplus_{i \in I}^w T_i$ dir. M bir modül $\{M_k \mid k \in K\}$ da M nin alt modüllerinin bir topluluğu olsun. Her $m \in M$ elemanı tek türlü olarak M_k alt modüllerinin elemanlarının toplamı şeklinde, yani

$$m = m_{k_1} + m_{k_2} + \dots + m_{k_n}, \quad m_{k_i} \in M_{k_i}$$

şeklinde yazılabilirse M ye M_k alt modüllerinin *iç direkt toplamı* denir. Tanımlardan görüleceği üzere dış direkt toplam ile iç direkt toplam izomorftur (Alizade ve Pancar, 1999).

2.4.3. Tanım S bir halka ve $\{T_i\}_{i \in I}$ S -modüller ailesi olsun. Her $n \in I$ için $\pi_n(m_i) = m_n$ ile tanımlı $\pi_n: \bigoplus_{i \in I}^w T_i \rightarrow T_n$ epimorfizmasına *n. kanonik projeksiyon* adı verilir. Diğer taraftan her $k \neq n$ için $m_k = 0$ ve $n = k$ için $m_k = m$ olmak üzere $i_n(m_n) = i_n(m) = (m_i)$ ile tanımlı $i_n: T_n \rightarrow \bigoplus_{k \in I}^w T_k$ fonksiyonuna *n. injeksiyon* adı verilir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.4.4. Tanım (i) T modül ve $I \neq \emptyset$ indis kümesi olsun. Buna göre her $i \in I$ için $T_i = T$ alırsak $\bigoplus_{i \in I}^w T_i$ şeklindeki dış direkt toplama T nin *kopyalarının toplamı* adı verilir ve $T^{(I)}$ şeklinde ifade edilir (Hungerford, 1973).

(ii) T modül ve T nin $T = T_1 + T_2$ koşulunu sağlayan T_1, T_2 direkt toplam terimleri için $T_1 \cap T_2$ de T nin bir direkt toplam terimi oluyorsa T modülüne (D_3) *koşuluna sahiptir* adı verilir (Clark vd., 2006).

2.4.5. Tanım T , S -modül ve I indis kümesi olsun. Bu durumda $T \cong S^{(I)}$ oluyorsa T ye *serbest modül* adı verilir. $I = \{1, 2, \dots, n\}$ sonlu elemana sahipse $T = S^{(I)}$ ya *sonlu üretilmiş serbest modül* adı verilir (Kasch, 1982).

2.4.6. Teorem Her modül bir serbest modülün bölüm modülüne izomorftur (Sharpe ve Vamos, 1972).

2.4.7. Önerme T modülünün alt modüllerinin ailesi $\{T_i\}_{i \in I}$ için her $(t_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I}^w T_i$ için $f(t_i)_{i \in I} = t_{i_1} + t_{i_2} + \dots + t_{i_k}$ olarak tanımlanmış $f: \bigoplus_{i \in I}^w T_i \rightarrow \sum_{i \in I} T_i$ epimorfizması mevcuttur. $j=1, 2, \dots, k$ olmak kaydıyla t_{i_j} ler $(t_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I}^w T_i$ elemanının sıfır dışında tüm bileşenleri şeklindedir (Hungerford, 1973).

2.4.8. Tanım (i) T modül ve $L, N \leq T$ için $L \cap N = 0$ ve $T = L + N$ ise T ye L ve N nin *direkt toplamı* adı verilir. $T = L \oplus N$ şeklinde ifade edilir. Burada L ve N ye T nin *direkt toplam terimleri* adı verilir ve $T = L \oplus N$ ifadesine T nin bir *direkt parçalanışı* adı verilir. (ii) Aşikâr direkt toplam terimlerinden farklı bir direkt toplam terimi bulunmayan T modülüne *parçalanamaz modül*, aksi takdirde T ye *parçalanabilir modül* adı verilir (Hungerford, 1973).

Örneğin $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ parçalanamaz modüldür. Fakat $\mathbb{Z}_6$ modülü parçalanabilir. (Hungerford, 1973).

2.4.9. Teorem T bir modül, $V, L \leq T$ olmak üzere T modülünün V ve L nin direkt toplamı olması için her $t \in T$, $v \in V$ ve $l \in L$ için $t = v + l$ tek türlü biçimde olması gerek ve yeterlidir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.4.10. Tanım $\{T_i\}_{i \in I}$ modüller ailesinden ve bunların $f_n: T_n \rightarrow T_{n-1}$ homomorfizmalarının ailesinden oluşan $\dots \rightarrow T_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} T_n \xrightarrow{f_n} T_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \dots$ dizisinde her $n \in \mathbb{Z}$ için $\text{Gör}(f_n) = \text{Çek}(f_{n-1})$ ise bu diziye *tam dizi* adı verilir.

$0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ tam dizisine *kısa tam dizi* adı verilir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.4.11. Teorem $0 \rightarrow K \xrightleftharpoons[h]{f} L \xrightleftharpoons[k]{g} M \rightarrow 0$ şeklindeki kısa tam dizi için aşağıdaki ifadeler denktir;

- (i) $hf = I_K$ şeklinde bir $h: L \rightarrow K$ homomorfizması mevcuttur,
- (ii) L nin $\text{Gör}(f)$ alt modülü bir direkt toplam terimidir,

(iii) $gk = I_M$ eşitliğini sağlayan $k: M \rightarrow L$ homomorfizması mevcuttur dolayısıyla $L \cong K \oplus M$ olur (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.4.11 deki denk şartlardan birini sağlayan $0 \rightarrow K \xrightleftharpoons[h]{f} L \xrightleftharpoons[k]{g} M \rightarrow 0$ kısa tam dizisine *parçalanabilir kısa tam dizi* adı verilir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.5. Artin ve Noether Modüller

2.5.1. Tanım T modül ve T nin alt modüllerinin boş olmayan her ψ ailesinin minimal elemanı mevcutsa T ye *minimal koşulu* sağlar denir (Sharpe ve Vamos, 1972).

2.5.2. Tanım T modül ve $T_1 \supseteq T_2 \supseteq T_3 \supseteq \dots$ biçimindeki T nin alt modüllerinin her bir azalan zincirleri için en az bir $k \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq k$ koşulunu gerçekleştiren her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $T_n = T_k$ eşitliği sağlanıyorsa T ye *azalan zincir koşulu* sağlar denir (Sharpe ve Vamos, 1972).

2.5.3. Önerme T modülü için aşağıdakiler denktir;

- (i) T minimal koşulu sağlamaktadır,
- (ii) T azalan zincir koşulu sağlamaktadır (Sharpe ve Vamos, 1972).

2.5.4. Tanım T bir modül olmak üzere azalan zincir veya buna denk olan minimal koşulu sağlayan T ye *artin modül* adı verilir. Eğer S -modül olarak S halkası artinse, S ye *artin halka* adı verilir (Sharpe ve Vamos, 1972).

$\mathbb{Z}_m$ $\mathbb{Z}$ -modülü sonlu azalan zincire sahip olduğu için artindir ama $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülü artin değildir. Örneğin $(3) \supset (3^2) \supset (3^3) \dots \supset (3^n) \dots$ sonsuz azalan zincirdir (Nişancı Türkmen, 2019).

2.5.5. Tanım T modül ve T nin alt modüllerinin boş olmayan her ψ ailesinin maksimal elemanı mevcutsa T ye *maksimal koşulu* sağlar denir (Sharpe ve Vamos, 1972).

2.5.6. Tanım T modül ve $T_1 \subseteq T_2 \subseteq T_3 \subseteq \dots$ biçimindeki T nin alt modüllerinin her bir artan zinciri için en az bir $k \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq k$ şartını sağlayan her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $T_n = T_k$ eşitliği sağlanıyorsa T modülüne *artan zincir koşulunu sağlar* denir (Sharpe ve Vamos, 1972).

2.5.7. Önerme T modülü için aşağıdakiler denktir;

- (i) T maksimal koşulunu sağlamaktadır,
- (ii) T artan zincir koşulunu sağlamaktadır (Sharpe ve Vamos, 1972).

2.5.8. Tanım Artan zincir veya buna denk olarak maksimal koşulunu sağlayan T ye *Noether modül* adı verilir. S halkası S -modül olarak Noether ise, S ye *Noether halka* adı verilir (Sharpe ve Vamos, 1972).

Örneğin $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülü bir Noether modül olup $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ modülü Noether modül değildir. Çünkü $(\frac{1}{3}) \subset (\frac{1}{3^2}) \subset (\frac{1}{3^3}) \subset \dots \subset (\frac{1}{3^n}) \subset \dots$ bir sonsuz artan zincirdir (Nişancı Türkmen, 2019).

Tanım 2.5.4 ve Tanım 2.5.8 den her bölme halkasının Noether ve artin halka olduğu açıktır.

2.5.9. Teorem T modülü için aşağıdakiler denktir;

- (i) T bir Noether modüldür,
- (ii) T nin alt modüllerinin boş olmayan her kümesinin maksimal elemanı mevcuttur,
- (iii) T nin alt modülleri sonlu üretilmiştir (Wisbauer, 1991).

2.5.10. Teorem $0 \rightarrow T \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ kısa tam dizisinde L nin artin (Noether) modül olması için T ve M modüllerinin artin (Noether) modül olması gerek ve yeterlidir (Nişancı Türkmen ve Pancar, 2014).

2.5.11. Teorem S halka ve $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$ S -modüller olmak şartıyla $T = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus \dots \oplus T_n$ modülünün artin (Noether) modül olması için her $i = 1, 2, \dots, n$ için T_i nin artin (Noether) modül olması gerek ve yeterlidir (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat $n = 2$ için doğruluğunu ispatlayalım.

$0 \rightarrow T_1 \rightarrow T_1 \oplus T_2 \rightarrow T_2 \rightarrow 0$ şeklindeki kısa tam dizi için Teorem 2.5.10 gereği istenen görülür.

2.5.12. Teorem T modül ve $L \leq T$ için aşağıdaki şartlar denktir;

- (i) T artin modüldür,
- (ii) L ve T/L artin modüldür (Sharpe ve Vamos, 1972).

2.5.13. Teorem T modül ve $L \leq T$ için aşağıdaki şartlar denktir;

- (i) T Noether modüldür,
- (ii) L ve T/L Noether modüldür (Sharpe ve Vamos, 1972).

2.5.14. Sonuç (i) M modülünün artin (Noether) alt modüllerinin sonlu toplamı artin (Noether) modüldür.

(ii) Artin (Noether) halkanın her bölüm halkası artin (Noether) halkadır (Sharpe ve Vamos, 1972).

2.6. Projektif ve İnjektif Modüller

2.6.1. Tanım (i) T ile L modülleri için her $f: L \rightarrow K$ homomorfizması ve her $g: T \rightarrow K$ epimorfizması için aşağıda gösterilen diyagram değişmeli oluyorsa yani $f = gh$ şeklinde $h: L \rightarrow T$ homomorfizması mevcutsa L ye T -projektiftir adı verilir.

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ & \swarrow h & \searrow f \\ T & \xrightarrow{g} & K \rightarrow 0 \end{array}$$

(ii) L bir modül olmak üzere her $f: L \rightarrow K$ homomorfizması ve her $g: T \rightarrow K$ epimorfizması için aşağıda gösterilen diyagram değişmeli oluyorsa yani $f = gh$ şeklinde $h: L \rightarrow T$ homomorfizması mevcutsa L ye *projektiftir* adı verilir. Eğer L , L -projektif ise L ye *kendi kendine projektiftir* adı verilir (Hungerford, 1973).

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ & \swarrow h & \searrow f \\ & \xrightarrow{\quad} & \end{array}$$

$$T \xrightarrow{g} K \rightarrow 0$$

2.6.2. Teorem $\{K_i\}_{i \in I}$ modüller ailesi ve $K = \bigoplus_{i \in I} K_i$ olsun. K nın projektif olabilmesi için her $i \in I$ için K_i lerin projektif olması gerekli ve yeterlidir (Kasch, 1982).

2.6.3. Teorem S halka olmak üzere her F serbest S -modülü projektiftir (Kasch, 1982).

İspat I indis kümesi ve $F=S^{(I)}$ serbest modülü verilsin. S halkasının projektif olduğu gösterilirse Teorem 2.6.2 den F serbest modülü projektif olur. $f:A \rightarrow C$ epimorfizmasını ve $g:S \rightarrow C$ homomorfizmasını alalım. S halkasının birim elemanı 1_S olmak üzere f epimorfizma olduğundan $g(1_S)=f(a)$ olacak biçimde $a \in A$ mevcuttur. Bu durumda her $s \in S$ için $h(s)=as$ ile tanımlanmış $h:S \rightarrow A$ dönüşümü bir homomorfizmadır. Şimdi $fh=g$ nin doğruluğunu gösterelim. Her $s \in S$ için $g(s) = g(1_S s) = g(1_S)s = f(a)s = f(as) = (fh)(s)$ olduğundan $g=fh$ eşitliği elde edilir. Dolayısıyla F serbest modülü bir projektif modüldür.

2.6.4. Teorem C modülü için aşağıdakiler denktir;

- (i) C projektiftir,
- (ii) $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ kısa tam dizisi parçalanabilir kısa tam dizidir,
- (iii) C modülü bir serbest modülün direkt toplam terimidir (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ tam dizi ise $g:B \rightarrow C$ bir epimorfizmadır. 1_C , C nin birim homomorfizması ise C projektif olduğu için $gk=1_C$ şeklinde bir $k:C \rightarrow B$ homomorfizması mevcuttur ve Teorem 2.4.11 den verilen kısa tam dizi parçalanabilir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Teorem 2.4.6 gereğince bir F serbest modülü için $g:F \rightarrow C$ epimorfizması vardır. Bu durumda kabulümüzden $0 \rightarrow \text{Çek}(g) \xrightarrow{i} F \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ kısa tam dizisi parçalanabilir. Teorem 2.4.11 den $F \cong \text{Çek}(g) \oplus C$ dir. Dolayısıyla C , F nin direkt toplam terimidir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Teorem 2.6.2 ve Teorem 2.6.3 den görülür.

2.6.5. Tanım T modülünün $T = K + L$ eşitliğini sağlayan $K, L \leq T$ alt modülleri verilsin. Eğer $\text{Gör}(f) \leq K$ ve $\text{Gör}(1_T - f) \leq L$ olacak şekilde bir $f \in \text{End}(T)$ varsa T ye π -projektif modül adı verilir (Wisbauer, 1991).

2.6.6. Teorem N projektif modülü π -projektiftir (Kasch, 1982).

İspat N projektif modül olsun. $U, V \leq N$ ve $N = U + V$ için $p: N \rightarrow N/V$ doğal homomorfizmasının $P|_U: U \rightarrow N/V$ kısıtlanması bir epimorfizmadır ve N projektif olduğu için aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{array}{ccc}
 & N & \\
 & \downarrow p & \\
 U & \xrightarrow{p|_U} & N/V \rightarrow 0
 \end{array}$$

Yani $P|_U h = p$ şeklinde bir $h: N \rightarrow U$ homomorfizması mevcuttur ve $\text{Gör}(h) \leq U$ olduğu açıktır. Her $k \in \text{Gör}(1_N - h)$ olduğunda $n \in N$ için $k = n - h(n)$ yazılabilir. Şimdi k nin p altında görüntüsüne bakalım. $p(k) = p(n - h(n)) = p(n) - (ph)(n) = p(n) - (P|_U h)(n) = p(n) - p(n) = 0$ olduğundan $k \in \text{Çek}(p) = V$ bulunur. Böylece $\text{Gör}(1_N - h) \leq V$ olup N π -projektiftir.

2.6.7. Tanım M, T ve K modülleri için her $f: K \rightarrow M$ homomorfizması ve $g: K \rightarrow T$ monomorfizması için aşağıda verilen diyagram değişmeli ise yani $f=hg$ olacak biçimde bir $h: T \rightarrow M$ homomorfizması bulunabiliyorsa M ye T -injektiftir adı verilir.

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \rightarrow & K & \xrightarrow{g} & T \\
 & & \downarrow f & \nearrow h & \\
 & & M & &
 \end{array}$$

Yukarıdaki diyagramda $0 \rightarrow K \xrightarrow{g} T$ tam dizisini keyfi alırsak M modülüne *injektif modül* adı verilir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.6.8. Önerme İnjektif modülün direkt toplam terimleri de injektif olur (Alizade ve Pancar, 1999).

2.7. Küçük Alt Modüller

2.7.1. Tanım T modül ve $L < T$ ise $L + N = T$ şartını sağlayabilen T modülünün bir N öz alt modülü bulunmuyorsa L ye T nin *küçük alt modülü* adı verilir ve $L \ll T$ gösterimi kullanılır (Wisbauer, 1991).

2.7.2. Önerme V modül ve $N \leq T \leq V$ için aşağıdakiler sağlanır.

(i) $T \ll V$ olursa $N \ll V$ dir.

(ii) $N \ll T$ olursa $N \ll V$ dir (Wisbauer, 1991).

İspat (i) $N + L = V$ şeklinde olan bir L alt modülünü alalım. $N \leq T$ olduğu için $T + L = V$ yazılır. Buradan $T \ll V$ olduğundan $L = V$ bulunur. Dolayısıyla $N \ll V$ olur.

(ii) $N + K = V$ şartını sağlayan V nin bir K alt modülünü ele alalım. $T \leq V$ olduğundan $(N + K) \cap T = T$ bulunur. $N \leq T$ olduğundan $N + (T \cap K) = T$ yazılabilir. $N \ll T$ iken $T \cap K = T$ bulunur. Buradan $T \subseteq K$ olur. $N \leq T \leq K$ ve $N + K = V$ olduğundan $K = V$ bulunur. Dolayısıyla $N \ll V$ dir.

2.7.3. Önerme T modül ve $N_1, N_2, \dots, N_m, L_1, L_2, \dots, L_m \leq T$ ve her $i=1,2,\dots,m$ için $N_i \ll L_i$ oluyorsa $N_1 + N_2 + \dots + N_m \ll L_1, L_2, \dots, L_m$ olur (Wisbauer, 1991).

İspat $N_1 + N_2 + U = L_1 + L_2$ şartını sağlayan $L_1 + L_2$ nin bir U alt modülünü alalım. $N_1 \ll L_1$ olduğundan Önerme 2.7.2. (ii) gereğince $N_2 + U = L_1 + L_2$ yazılır. Benzer şekilde $N_2 \ll L_2$ olduğundan $U = L_1 + L_2$ elde edilir. Böylece $N_1 + N_2 \ll L_1 + L_2$ bulunur. Tümevarım yöntemiyle her $2 < m$ tamsayısı için de ifadenin doğru olduğu gösterilebilir.

2.7.4. Önerme T ile N modül ve $U \leq T$ olsun. $f: T \rightarrow N$ homomorfizmasında $U \ll T$ ise $f(U) \ll f(T)$ dir (Wisbauer, 1991).

İspat $f(U) + L = f(T)$ şartını gerçekleyen $L \leq f(T)$ modülünü alalım. Bu durumda, $f^{-1}(f(U) + L) = T$ olur ve $U + f^{-1}(L) = T$ eşitliği elde edilir. $U \ll T$ olduğu için $f^{-1}(L) = T$ bulunur. Bu durumda $L = f(T)$ olur. Dolayısıyla $f(U) \ll f(T)$ bulunur.

2.7.5. Önerme V bir modül ve $K \leq T \leq V$ olsun. T, V nin bir direkt toplam terimi ise $K \ll T$ olması için $K \ll V$ olması gerek ve yeterlidir (Wisbauer, 1991).

İspat ($\Rightarrow$) $K \ll T$ ise Önerme 2.7.2. (ii) gereğince $K \ll V$ bulunur.

($\Leftarrow$) $K \ll V$ olsun. $K + L = T$ koşulunu sağlayan T nin bir L alt modülünü alalım. T, V nin direkt toplam terimi olması nedeniyle $V = T \oplus U$ şeklinde V nin bir U alt modülü

mevcuttur. Buradan $K + L + U = V$ bulunur. $K \ll V$ olduğu için $L + U = V$ dir. $T = L + (U \cap T) = L$ olup $K \ll T$ bulunur.

2.7.6. Tanım T bir modül ve $f: T \rightarrow N$ epimorfizma olsun. Eğer $\text{Çek}(f) \ll T$ ise f epimorfizmasına *küçük epimorfizma* adı verilir (Wisbauer, 1991).

2.7.7. Tanım T projektif modül ve $f: T \rightarrow N$ küçük epimorfizması verilsin. Bu durumda T ye N modülünün *projektif örtüsü* adı verilir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.8. Basit, Yarı-Basit Modüller

2.8.1. Tanım S halka, T de S -modül olsun. T nin kendisi ve sıfır dışında bir alt modülü mevcut değilse T ye *basit modül* adı verilir. S -modül olarak S basit ise, S ye *basit halka* adı verilir (Alizade ve Pancar, 1999).

Örneğin $q \in \mathbb{P}$ olmak üzere $\mathbb{Z}_q$ $\mathbb{Z}$ -modülü basittir.

2.8.2. Teorem Birimli S halkası için aşağıdaki şartlar denktir;

- (i) S bölme halkasıdır,
- (ii) S sol basit halkadır,
- (iii) S sağ basit halkadır (Kasch, 1982).

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) Birimli S bölme halkası ve I , S nin sıfırdan farklı bir sol idealini ele alalım.

I idealinde sıfırdan farklı bir $a \in I$ mevcuttur. I sol ideal ve S bölme halkası olduğu için $1_S = a^{-1}a \in I$ dir. Böylece her $s \in S$ için $s = s1_S \in I$ olup $S = I$ bulunur.

(ii) $\Rightarrow$ (i) S sol basit halka olsun. Sıfırdan farklı bir $a \in S$ alalım. $Sa = S$ olduğundan $1_S = sa$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $s \in S$ mevcuttur. Diğer yandan bu s elemanı için $ks = 1_S$ olacak biçimde $k \in S$ vardır. Buradan $k = k1_S = k(sa) = (ks)a = 1_S a = a$ olur. Dolayısıyla $sa = 1_S = as$ sağlanır ve a nın tersi mevcuttur. S nin sıfır dışındaki elemanlarının tersi bulunduğundan S bölme halkasıdır.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) Benzer biçimde bulunur.

2.8.3. Lemma T modül ve $\{T_i | i \in I\}$ basit alt modüllerin ailesi olmak üzere $T = \sum_{i \in I} T_i$ ve $V < T$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

- (i) $T = V \oplus (\oplus_{i \in J} T_i)$ olacak biçimde $J \subseteq I$ alt kümesi mevcuttur.

(ii) $V \cong \bigoplus_{i \in K} T_i$ olacak biçimde $K \subseteq I$ alt kümesi mevcuttur (Kasch, 1982).

İspat (i) $\Gamma = \{L \mid L \subseteq I \text{ için } V + (\sum_{i \in L} T_i) = V \oplus (\bigoplus_{i \in L} T_i)\}$ kümesini tanımlayalım. $L = \emptyset$ ise, $\bigoplus_{i \in \emptyset} T_i = 0$ olduğu için $\emptyset \in \Gamma$ olur ve Γ boştan farklıdır ve kapsama bağıntısı gereği kısmen sıralıdır. Burada Γ nın tam sıralı olan alt kümesi Λ olmak üzere $L^* = \bigcup_{L \in \Lambda} L$, Λ kümesinin bir üst sınırı olur. Şimdi $L^* \in \Gamma$ olmasını görelim. E sonlu küme ve $E \subset L^*$ kümesini ele alalım. Bu durumda, Λ tam sıralı olduğu için $E \subset L$ şeklinde bir $L \in \Lambda$ vardır. $0 = v + \sum_{i \in E} t_i$ olacak şekilde $v \in V$ ve $t_i \in T_i$ elemanlarını alalım. $E \subset L$ olduğu için her $i \in E$ için $v = t_i = 0$ olur ve $V + \sum_{i \in L^*} T_i = V \oplus (\bigoplus_{i \in L^*} T_i)$ olup $L^* \in \Gamma$ olur. Yani Γ nın tam sıralı alt kümelerinin bir üst sınırı vardır. Zorn Lemması gereği Γ nın bir J maksimal elemanı mevcuttur. Farzedelim ki $N = V + \sum_{i \in J} T_i = V \oplus (\bigoplus_{i \in J} T_i)$ olsun. $i_0 \in I$ için $N + T_{i_0}$ alt modülünü alalım. J nin maksimalliğinden dolayı $T_{i_0} \leq N$ olduğundan $N \oplus T_{i_0}$ yazılamaz. T_{i_0} basit olduğundan $N \cap T_{i_0} = T_{i_0}$ olup $T_{i_0} \leq N$ bulunur. Yani N, T de ki bütün basit alt modülleri kapsar. Dolayısıyla $N = T$ bulunur.

(ii) (i) den dolayı $T = V \oplus (\bigoplus_{i \in J} T_i)$ eşitliği elde edilir. Şimdi (i) deki V alt modülünü $\bigoplus_{i \in J} T_i$ olarak alalım. Tekrar (i) yi uygularsak

$$T = (\bigoplus_{i \in J} T_i) \oplus (\bigoplus_{i \in K} T_i)$$

olacak biçimde $K \subseteq I$ vardır. Teorem 2.3.8 den $V \cong T / (\bigoplus_{i \in J} T_i) \cong \bigoplus_{i \in K} T_i$ olup istenen elde edilmiş olur.

2.8.4. Önerme T basit modül olmak üzere 0 modülü, T modülünün bir maksimal alt modülü olup $0 \neq t \in T$ için $tS = T$ olup T devirli olur (Kasch, 1982).

İspat T basit modül olmasından dolayı T nin 0 alt modülünü kapsayan kendisi dışında alt modülü mevcut değildir. 0 modülü tanım gereğince T nin maksimal alt modülü olur. Her $0 \neq t \in T$ için tS , T nin alt modülü ve $t \in tS$ olur. Böylelikle $tS \neq 0$ ve T basit olduğu için $tS = T$ eşitliği sağlanır. Böylelikle T devirlidir.

2.8.5. Teorem T modül, $K \leq T$ ise K nın T nin maksimal alt modülü olabilmesi için T/K modülünün basit olması gerek ve yeterlidir (Wisbauer, 1991).

İspat ($\Rightarrow$) T nin maksimal alt modülü K ve $U/K \leq T/K$ olsun. K , maksimal alt modül olduğu için $U = T$ veya $U = K$ dır. Yani T/K bölüm modülünün alt modülleri T/K veya K/K olur. Bu durumda T/K bölüm modülü basit olur.

$(\Leftrightarrow) T/K$ basit modül ve $K \leq U \leq T$ olsun. Buradan U/K modülü, T/K bölüm modülünün bir alt modülüdür. T/K basit olduğu için $T/K = U/K$ veya $U/K = K/K$ olup $U = T$ veya $U = K$ dir. Bu durumda K, T nin maksimal alt modülü olur.

2.8.6. Tanım T modülünün alt modülleri T nin bir direkt toplam terimi oluyorsa T ye *yarı basit modül* adı verilir (Sharpe ve Vamos, 1972).

Örneğin $\mathbb{Z}_4$ $\mathbb{Z}$ -modülünü alalım. $\{\bar{0}, \bar{2}\} \leq \mathbb{Z}_4$ alt modülü $\mathbb{Z}_4$ ün bir direkt toplam terimi olmadığı için $\mathbb{Z}_4$ yarı basit modül değildir. Fakat $\mathbb{Z}_6$ modülü $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \oplus \{\bar{0}, \bar{3}\}$ olduğu için yarı basittir.

Ayrıca herhangi bir modülün 0 alt modülü basit olmayan, yarı basit bir modüldür (Kasch, 1982).

2.8.7. Teorem T modülü için aşağıdakiler denktir;

- (i) T nin her alt modülü basit alt modüllerin toplamından oluşur,
- (ii) T basit alt modüllerin toplamından oluşur,
- (iii) T basit alt modüllerin direkt toplamından oluşur,
- (iv) T yarı basittir (Kasch, 1982).

2.8.8. Lemma T yarı basit modül olmak üzere T nin sıfırdan farklı her alt modülü bir basit alt modül içerir (Kasch, 1982).

İspat $0 \neq U$, T nin sonlu üretilmiş sıfırdan farklı alt modülü olmak üzere Teorem 2.2.9 dan U da bir C maksimal alt modülü mevcuttur. Hipotez gereğince; $T = C \oplus T_1$ olacak biçimde T_1 alt modülü mevcuttur. Teorem 2.3.12 gereği $U = T \cap U = C \oplus (T_1 \cap U)$ dur. Böylece $U/C \cong T_1 \cap U$ elde edilir. C, U nun maksimal alt modülü olduğundan U/C basittir. Sonuç olarak $T_1 \cap U, U$ nun basit alt modülü olur. T nin sıfırdan farklı alt modülleri, sonlu üretilmiş bir alt modülü kapsayacağı için bir basit alt modül içerir.

2.8.9. Teorem Yarı basit K modülü için aşağıdakiler sağlanır.

- (i) K nın alt modülleri de yarı basit modüldür,
- (ii) K nın her homomorfik görüntüsü de yarı basittir,
- (iii) K nın herhangi sayıdaki toplamı da yarı basittir (Kasch, 1982).

2.8.10. Tanım L modülü için $N \leq L$ olmak üzere N nin, L modülünün sıfırdan farklı alt modülleri ile arakesiti sıfırdan farklı oluyorsa N ye L nin *büyük alt modülü* adı verilir ve $N \trianglelefteq L$ şeklinde ifade edilir (Wisbauer, 1991).

$\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülünün sıfırdan farklı her alt modülü büyüktür.

2.8.11. Tanım T modül ve $U, U' \leq T$ olsun. $U \cap U' = 0$ eşitliğini sağlayan U' alt modülü bu koşulu sağlayan maksimal ise yani her $U' \leq L \leq T$ için $U \cap L = 0$ olması $L = U'$ olmasını gerektirirse U' ye U nin *kesişime göre tümleyeni* denir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.8.12. Sonuç S halkası için aşağıdaki şartlar denktir;

- (i) S yarı basit halkadır,
- (ii) Her sağ S -modül yarı basittir,
- (iii) Her sol S -modül yarı basittir (Kasch, 1982).

Basit modüllerin direkt toplamı yarı basit olduğu için basit modülün yarı basit modül olduğu açıktır.

Sonuç 2.8.12 de ki denk koşullardan birini sağlayan halkaya *yarı basit halka* adı verilir.

Her bölme halkası yarı basit halkadır, fakat tersi doğru olmayabilir. Örneğin; $\mathbb{Z}_6$ yarı basit halkadır fakat bölme halkası değildir.

2.8.13. Önerme T yarı basit modülü için aşağıdaki ifadeler denktir;

- (i) T basit alt modüllerin sonlu ailesinin direkt toplamıdır,
- (ii) T Noetherdir,
- (iii) T artindir,
- (iv) T sonlu üretilmiştir (Nişancı Türkmen ve Pancar, 2014).

2.8.14. Sonuç Yarı basit bir halka hem Noether hem artindir (Lam, 1991).

İspat S yarı basit bir halka olmak üzere S halkası yarı basit ve sonlu üretilmiş olduğu için Önerme 2.8.13 gereğince artin ve Noetherdir.

2.8.15. Sonuç Sol yarı basit her halka aynı zamanda sağ yarı basit halkadır ve tersine sağ yarı basit her halka da sol yarı basit halkadır (Lam, 1991).

2.9. Bir Modülün Desteği ve Radikali

2.9.1. Tanım T modül ve T nin basit alt modüllerinin toplamı T nin *desteğidir* ve $Des(T)$ şeklinde ifade edilir (Sharpe ve Vamos, 1972).

Destek tanımı gereği aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

2.9.2. Sonuç T modülü için aşağıdakiler denktir;

- (i) Her $N \leq T$ için $N = Des(N)$ dir,
- (ii) $T = Des(T)$ dir,
- (iii) T basit alt modüllerin direkt toplamı şeklindedir,
- (iv) T yarı basittir (Kasch, 1982).

2.9.3. Önerme $\{T_i\}_{i \in I}$ bir modüller ailesi olmak üzere, $Des(\bigoplus_{i \in I} T_i) = \bigoplus_{i \in I} Des(T_i)$ dir (Wisbauer, 1991).

2.9.4. Tanım T modülünün maksimal alt modüllerinin kesişimine T nin *radikali* adı verilir ve $Rad(T)$ şeklinde ifade edilir. $Rad(T) = T$ ise T nin maksimal alt modülü mevcut değildir ve T ye *radikal modül* adı verilir (Wisbauer, 1991).

$Rad(T) = 0$ ise T nin 0 dışında küçük alt modülü mevcut değildir (Anderson ve Fuller, 1992).

$P(T)$, T nin radikal alt modüllerinin toplamı olarak gösterilir (Zöschinger, 1974). Ayrıca yarı basit modüllerin radikali 0 dır.

2.9.5. Teorem N bir eş atom modül olmak üzere $Rad(N) \ll N$ dir (Wisbauer, 1991).

İspat $Rad(N) + U = N$ olan $U < N$ için hipotez gereğince T maksimal alt modülünde U modülü içerilmiş olur. Dolayısıyla $U \leq T$ ve $Rad(N) \leq T$ olduğu için $N = Rad(N) + U \leq T$ olup çelişki olur. Bu sebeple $U = N$ olup $Rad(N) \ll N$ bulunur.

2.9.6. Sonuç Sonlu üretilmiş T modülü için $Rad(T) \ll T$ olur (Wisbauer, 1991).

2.9.7. Sonuç T bir S -modül ve $t \in T$ için $tS \ll T$ olması için $t \in Rad(T)$ olması gerek ve yeterlidir (Kasch, 1982).

2.9.8 Lemma L modül ve I indis kümesi olsun. Her $i \in I$ için V_i modülleri L modülünün V yi kapsayan alt modülleri ise $\bigcap_{i \in I} V_i/V = (\bigcap_{i \in I} V_i)/V$ dir (Kasch, 1982).

İspat $k + V \in \bigcap_{i \in I} (V_i/V)$ ve her $i \in I$ için $k + V \in V_i/V$ olup $k \in V_i$ olur. Dolayısıyla $k \in \bigcap_{i \in I} V_i$ olur ve buradan $k + V \in (\bigcap_{i \in I} V_i)/V$ bulunur. Benzer şekilde ters kapsama da gösterilir.

2.9.9. Teorem T bir modül olmak üzere $Rad(T) = \sum_{L \ll T} L$ olur (Kasch, 1982).

2.9.10. Teorem (i) S halka, U ve N birer modül ve $f \in Hom(U, N)$ olmak üzere $f(Rad(U)) \leq Rad(N)$ olur. Eğer $\text{Çek}(f) \leq Rad(U)$ oluyorsa $f(Rad(U)) = Rad(f(U))$ dur.

(ii) $Rad(U/Rad(U)) = 0$ dir.

(iii) $T \leq V \leq U$ ise $Rad(T) \leq Rad(V)$ dir.

(iv) $U = \bigoplus_{i \in I} U_i$ ise $Rad(U) = \bigoplus_{i \in I} Rad(U_i)$ dir.

(v) $N \leq U$ iken $(N + Rad(U))/N \leq Rad(U/N)$ ve $N \leq Rad(U)$ ise $Rad(U/N) = Rad(U)/N$ dir.

(vi) U nun bir radikal modül olabilmesi için L nun her sonlu üretilmiş alt modülünün U da küçük olması gerek ve yeterlidir (Kasch, 1982; Wisbauer, 1991).

İspat (i) $Rad(U) = \sum_{V \ll U} V$ olmasından dolayı $f(Rad(U)) = \sum_{V \ll U} f(V)$ olur. Buradan Önerme 2.3.6 dan $f(V) \ll N$ olur. Böylece $f(Rad(U)) \leq Rad(N)$ bulunur. $u \in Rad(U)$ için, Sonuç 2.9.7 den $uS \ll U$ olur ve Teorem 2.3.6 gereği $f(uS) = f(u)S \ll f(U)$ sağlanır. Buradan $f(u) \in Rad(f(U))$ olur ve $f(Rad(U)) \leq Rad(f(U))$ olur. $f(u) \in Rad(f(U))$ alalım. Sonuç 2.9.7 gereğince $f(u)S \ll f(U)$ dur. $u \notin Rad(U)$ alalım. Bu takdirde $uS + K = U$ şeklinde U nun bir K maksimal alt modülü mevcuttur. Dolayısıyla $f(u)S + f(K) = f(U)$ olup $f(u)S \ll f(U)$ olmasından dolayı $f(K) = f(U)$ eşitliği sağlanır. Önerme 2.7.4 den $U = K + \text{Çek}(f)$ olup, $\text{Çek}(f) \leq Rad(U) \leq K$ olduğu için $U = K$ çelişkisi bulunur. Dolayısıyla $u \in Rad(U)$ olmalıdır. Bu takdirde $f(u) \in f(Rad(U))$ olmalıdır. Sonuçta $f(Rad(U)) = Rad(f(U))$ elde edilir.

(ii) $U/Rad(U)$ nun maksimal alt modülleri ile U nun maksimal alt modülleri ile arasında bire bir eşleme mevcuttur. X kümesi U nin maksimal alt modüllerinin

kümesi ise $U/Rad(U) = \cap_{T \in X} (T/Rad(U))$ olup, Lemma 2.9.8 gereği $U/Rad(U) = \cap_{T \in X} (T/Rad(U)) = (\cap_{T \in X} T)/Rad(U) = Rad(U)/Rad(U) = 0$ bulunur.

(iii) $i: T \rightarrow V$ içermeye dönüşümü olsun. (i) gereği $i(Rad(T)) = Rad(T) \leq Rad(V)$ dir.

(iv) (iii) gereği $Rad(U_i) \leq Rad(U)$ dur. Dolayısıyla $\sum_{i \in I} Rad(U_i) = \oplus_{i \in I} Rad(U_i) \leq Rad(U)$ olur. Tersine; $u = \sum_{i \in I} u_i \in Rad(U)$ elemanını ele alalım. $\pi_i(u) = u_i$ şeklinde tanımlanmış $\pi_i: U \rightarrow U_i$ i. doğal projeksiyon olsun. (i) gereği $\pi_i(u) = u_i \in Rad(U_i)$ dir. Böylelikle $u \in \oplus_{i \in I} Rad(U_i)$ sağlanır. Dolayısıyla $Rad(U) = \oplus_{i \in I} Rad(U_i)$ eşitliği bulunur.

(v) $\pi: U \rightarrow U/N$ doğal homomorfizmasını alalım. (i) gereği $\pi(Rad(U)) = (Rad(U) + N)/N \leq Rad(U/N)$ olur. $\check{C}ek(\pi) = N \leq Rad(U)$ oluyorsa Lemma 2.9.8 den dolayı $Rad(U/N) = Rad(U)/N$ bulunur.

(vi) $U = Rad(U)$ ise, her $u \in U$ için Sonuç 2.9.7 den $uS \ll U$ olur ve dolayısıyla Önerme 2.7.3 gereğince U nun sonlu üretilmiş öz alt modülleri U da küçüktür. Tersi ise Sonuç 2.9.7 gereği açıktır.

2.9.11. Teorem T modül ve $K \leq T$ iken,

(i) T eş atomsa T/K eş atomdur.

(ii) K ve T/K eş atom modüller ise T eş atomdur (Zöschinger, 1974)

2.10. Yerel ve Yarı Yerel Modüller

2.10.1. Tanım T bir S -modül olmak üzere T nin bütün öz alt modüllerinin toplamı da yine öz alt modül oluyorsa, T modülüne *yerel modül* adı verilir. S_S yerelse S halkasına *yerel halka* adı verilir (Wisbauer, 1991).

Örneğin $p \in \mathbb{P}$ ve $k \geq 1$ olmak üzere $\mathbb{Z}_{p^k}$ yerel $\mathbb{Z}$ -modüldür (Nişancı Türkmen ve Pancar, 2014).

Aynı zamanda $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ $\mathbb{Z}$ -modülü oyuk modüldür fakat $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ $\mathbb{Z}$ -modülü yerel değildir.

2.10.2. Tanım S halka, U S -modül olmak üzere $U/Rad(U)$ yarı basit oluyorsa U ya *yarı yerel modül* adı verilir. S sağ (sol) S -modül olarak yarı yerel modülse S ye *yarı yerel halka* adı verilir (Wisbauer, 1991).

2.10.3. Teorem S yarı yerel halka ve T S -modül olmak üzere $Rad(T) = TRad(S)$ olur (Zhou ve Zhang, 2011).

2.10.4. Teorem Sıfırdan farklı V modülünün yerel modül olması için V nin bir tek maksimal alt modüle sahip ve sonlu üretilmiş (devirli) modül olması gerek ve yeterlidir. Bu şartlar altında $Rad(V)$, V nin maksimal alt modülü olur $Rad(V) \ll V$ sağlanır (Wisbauer, 1991).

İspat ($\Rightarrow$) V yerel modül ve V modülünün bütün öz alt modüllerinin toplamı T ise $T \neq V$ olduğundan $\exists v \in V$ vardır ki $v \notin T$ ve $vS \not\subseteq T$ dir. T modülü, V nin öz alt modüllerinin toplamından oluştuğu için $vS = V$ olup V devirli olur. Buradan T alt modülünün tek maksimal alt modül olması ise tanım gereği açıktır.

($\Leftarrow$) V sadece T maksimal alt modülüne sahip ve sonlu üretilmiş (devirli) modül ise V modülü sonlu üretilmiş olduğu için V nin öz alt modülleri V nin bir maksimal alt modülünde kapsandığından dolayı V nin her öz alt modülü de T tarafından kapsanır. Böylelikle V nin kendisinden farklı bütün alt modüllerinin toplamı T olup buradan V yerel modül olur. Radikal tanımından dolayı $Rad(V) = T$ olup V devirli olduğu için $Rad(V) \ll V$ olduğu görülür.

Cisimlerde tek maksimal ideal 0 olduğu için her cisim aynı zamanda bir yerel halka olur.

2.10.5. Tanım T modülünün öz alt modülleri T de küçük alt modül oluyorsa T ye *oyuk modül* adı verilir (Wisbauer, 1991).

Örneğin q asal tam sayı olmak üzere $\mathbb{Z}_{q^\infty}$ $\mathbb{Z}$ -modülü yerel olmayan oyuk modüldür.

2.10.6. Teorem V S -modülü için aşağıdakiler denktir;

- (i) V oyuk modüldür ve $Rad(V) \neq V$ dir,
- (ii) V oyuk ve devirli modüldür (sonlu üretilmiştir),
- (iii) V yerel modüldür (Wisbauer, 1991).

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) $Rad(V) \neq V$ olmasından dolayı V nin bir K maksimal alt modülü mevcuttur. K maksimal olmasından dolayı her $v \in V \setminus K$ için $K + vS = V$ olur. V oyuk olduğu için $K \ll V$ olup $vS = V$ bulunur. Dolayısıyla V devirlidir (sonlu üretilmiştir).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) V devirliyse sonlu üretilmiştir. Buradan $Rad(V) \neq V$ dir. Yani V nin bir T maksimal alt modülü mevcuttur. Diğer yandan T maksimal alt modülün diğer tüm öz alt modülleri kapsadığını ispatlayalım. $K < V$ modülü için $K \not\subseteq T$ olursa T maksimal iken $K + T = V$ olup V nin oyuk olmasından dolayı $T = V$ bulunur. Dolayısıyla $K \subseteq T$ olmak durumundadır. Yani T, V nin diğer tüm öz alt modüllerini içerir. Buradan T bir öz alt modül olduğu için V yerel olur.

(iii) $\Rightarrow$ (i) V yerel modül olmak üzere T öz alt modülü V nin diğer öz alt modüllerini içerir ve $T + L = V$ için eğer $L \neq V$ olursa, $L \subset T$ olup $T = V$ dir. Dolayısıyla $T + L = V$ şeklinde olan her L alt modülü için $L = V$ olur. Yani $T \ll V$ dir. $K < V$ öz alt modülünü alırsak $K \subset T$ ve $T \ll V$ olduğundan $K \ll V$ olur. Dolayısıyla V oyuk olur ve $Rad(V) = T \neq V$ dir.

basit modül $\Rightarrow$ güçlü yerel modül $\Rightarrow$ yerel modül

Yukarıdaki gerektirmelerin tersi her zaman doğru olmayabilir. Örneğin $\mathbb{Z}_4$ yerel $\mathbb{Z}$ -modülü $Rad(M) = Des(M) = \{\overline{0}, \overline{2}\} = \langle \overline{2} \rangle$ olduğundan güçlü yerel modüldür fakat basit modül değildir. $\mathbb{Z}_8$ yerel $\mathbb{Z}$ -modülü $\{\overline{0}, \overline{2}\} = Des(M) \subseteq Rad(M) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$ olduğu için güçlü yerel modül değildir (Kaynar vd., 2020).

2.10.8. Tanım L modülünün hem küçük hem de basit alt modüllerinin toplamı $Des_s(L) = \Sigma\{K \ll L \mid K, L \text{ nin basit alt modülü}\}$ ile ifade edilir (Zhou ve Zhang, 2011).

2.10.9. Önerme T modül olmak üzere, $Des_s(T) = Rad(T) \cap Des(T)$ dir (Kaynar vd., 2020).

2.10.10. Sonuç T basit olmayan yerel modül ise $Des_s(T) = Des(T)$ olur (Kaynar vd., 2020).

2.11. Yerel Artin Modüller

2.11.1. Tanım Her sonlu üretilmiş alt modülü artin olan modüle *yerel artin modül* adı verilir (Wisbauer, 1991).

Örneğin yarı basit modüller, q asal sayı olmak üzere $\mathbb{Z}_q$ ve $\mathbb{Z}_6$ $\mathbb{Z}$ -modülleri yerel artin modüldür.

2.11.2. Teorem 1) $0 \rightarrow K' \rightarrow K \rightarrow K'' \rightarrow 0$ kısa tam dizisi için aşağıdakiler sağlanır.

- (i) K (yerel) artin modül ise K' ve K'' (yerel) artin modüldür.
- (ii) K' ve K'' artin modüller ise K artin modüldür.
- (iii) K' artin modül ve K'' yerel artin modülse K yerel artin modül olur (Wisbauer, 1991).

2.11.3. Teorem K yerel artin modül olmak üzere K nin sonlu sayıda direkt toplamı da yerel artin modül olur (Wisbauer, 1991).

2.11.4. Teorem K yerel artin ise $K/\text{Rad}(K)$ yarı basit modül olur (Wisbauer, 1991).

2.11.5. Sonuç i) K yerel artin ise K nin her alt modülü de yerel artin olur (Wisbauer, 1991).

ii) K yerel artin ise K nin homomorfik görüntüsü de yerel artin olur (Wisbauer, 1991).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Tümlenmiş ve Bol Tümlenmiş Modüller

3.1.1. Tanım L modül ve $N \leq L$ ise $L = N + U$ biçiminde bir $U \leq L$ mevcut ve U minimalse, yani $N + T = L$ eşitliğini sağlayan her $T \leq U$ için $T = U$ oluyorsa U ya, L de N nin *tümleyeni* adı verilir ve N ye L de *tümleyene sahiptir* denir (Wisbauer, 1991).

T bir modül ve $K \ll T$ olmak üzere küçük alt modül tanımı gereği T, K nin tümleyeni olur. Yani modülün kendisi sıfır alt modülünün tümleyeni olur.

3.1.2. Önerme T modül ve $L, Y \leq T$ olsun. Y alt modülünün L nin tümleyeni olabilmesi için $T = L + Y$ ve $L \cap Y \ll Y$ olması gerekli ve yeterlidir (Wisbauer, 1991).

İspat ($\Rightarrow$) Y, L nin bir tümleyeni ise tanıma göre $T = L + Y$ dir. $K \leq Y$ modülü için $Y = (L \cap Y) + K$ oluyorsa $T = L + Y = L + (L \cap Y) + K = L + K$ olup Y, L nin tümleyeni olduğu için $K = Y$ bulunur ve $L \cap Y \ll Y$ olur.

($\Leftarrow$) $T = L + Y$ ve $L \cap Y \ll Y$ olsun. $K \leq Y$ modülü için $T = L + K$ oluyorsa, Modüler kural gereği $Y = (L \cap Y) + K$ olup $L \cap Y \ll Y$ olmasından dolayı $K = Y$ bulunur.

3.1.3. Tanım T modülünün alt modülleri tümleyene sahipse T ye *tümlenmiş modül* adı verilir (Wisbauer, 1991).

3.1.4. Teorem Yarı basit modüller ve artın modüller tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

3.1.5. Teorem Yerel ve oyuk modüller tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

3.1.6. Teorem K tümlenmiş bir modül ise K nin homomorfik görüntüsü de tümlenmiş modüldür (Wisbauer, 1991).

3.1.7. Sonuç Tümlenmiş bir modülün bölüm modülü de tümlenmiş modüldür (Wisbauer, 1991).

3.1.8. Lemma U modül ve $K, T \leq U$ olsun. K tümlenmiş modül olmak üzere $K + T$ nin U da bir tümleyeni mevcutsa T nin de bir tümleyeni mevcuttur (Wisbauer, 1991).

İspat $K + T$ nin U da ki bir tümleyeni C ve $K \cap (T + C)$ alt modülünün K da ki bir tümleyeni D olmak üzere $C, K + T$ nin U da ki tümleyeni olduğu için $(K + T) + C = U$, $(K + T) \cap C \ll C$ ve $D, K \cap (T + C)$ nin K da ki tümleyeni olduğu için $K \cap (T + C) + D = K$ ve $[K \cap (T + C)] \cap D \ll D$ olur. Buradan $K \cap (T + C) + D + T + C = K + T + C = U$ olduğu için $T + C + D = U$ bulunur. Diğer taraftan, $T \cap (C + D) \leq C \cap (T + D) + D \cap (T + C)$ olup $D \leq K$ ve $D \cap (T + C) \ll D$ olduğundan $T \cap (C + D) \ll C + D$ olup $C + D, T$ nin U da tümleyenidir.

3.1.9. Teorem T modül ve $L, U \leq T$ için $T = L + U$ ve L ile U bol tümlenmiş ise T de bol tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

3.1.10. Tanım T modül $V \leq T$ olmak üzere $V + L = T$ şeklinde olan L alt modülü için V nin $L' \subseteq L$ şeklinde bir L' tümleyeni mevcutsa V nin T içinde *bol tümleyeni* adı verilir (Wisbauer, 1991).

3.1.11. Tanım Alt modülleri bol tümleyene sahip modüle *bol tümlenmiş modül* adı verilir (Wisbauer, 1991).

3.1.12. Teorem M bol tümlenmiş ise tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

3.2. $\oplus$ -Tümlenmiş ve Zayıf Tümlenmiş Modüller

3.2.1. Tanım U modül ve $T \leq U$ olmak üzere $U = T + K$, $T \cap K \ll K$ ve $U = K \oplus K_1$ şartlarını sağlayan U nun, K, K_1 alt modülleri bulunuyorsa burada ki T modülüne U modülünde $\oplus$ -tümleyene sahiptir denir. U nun alt modülleri U da $\oplus$ -tümleyene sahip oluyorsa U ya $\oplus$ -tümlenmiştir denir (Mohamed ve Müller, 1990).

Örneğin oyuk modüller $\oplus$ -tümlenmiş modüllerdir.

3.2.2. Önerme P projektif ve tümlenmiş modül ise $P, \oplus$ -tümlenmiş modüldür (Wisbauer, 1991).

3.2.3. Teorem $\oplus$ -tümlenmiş modüllerin sonlu sayıdaki direkt toplamı da $\oplus$ -tümlenmiştir (Harmancı vd., 1999).

3.2.4. Tanım T modül ve $L \leq T$ ise $T = L + N$ ve $L \cap N \ll T$ şartını sağlayan T nin alt modülü N ye L nin *zayıf tümleyeni* adı verilir. Eğer T nin alt modüllerinin T de zayıf tümleyeni mevcutsa T ye *zayıf tümlenmiş modül* adı verilir (Clark vd., 2006).

3.2.5. Teorem T bir modül olsun. T_1 ve K modülleri T nin birer alt modülü ve T_1 zayıf tümlenmiş modül olmak üzere $T_1 + K$ nin T de bir zayıf tümleyeni mevcutsa K , T de zayıf tümleyene sahip olur (Clark vd., 2006).

3.2.6. Teorem V ve N , U nun alt modülleri ve $U = V + N$ modülünde V ve N modülleri zayıf tümlenmişse U da zayıf tümlenmiş modüldür (Clark vd., 2006).

İspat $T \leq U$ olsun. $V + (N + T)$ nin U da 0 aşikar zayıf tümleyene sahiptir ve V zayıf tümlenmiş olduğu için Teorem 3.2.5 gereği $N + T$ nin U da bir zayıf tümleyeni mevcuttur. N zayıf tümlenmiş olduğu için tekrar Teorem 3.2.5 den T , U da bir zayıf tümleyene sahiptir. Dolayısıyla U zayıf tümlenmiş olur.

3.2.7. Sonuç Zayıf tümlenmiş modüllerin sonlu toplamı da zayıf tümlenmiş modüldür (Clark vd., 2006).

3.3. (Zayıf) Yükseltilebilir ve Zayıf- $\oplus$ -Tümlenmiş Modüller

3.3.1. Tanım U modül ve $T \leq U$ için T modülü U nun bir direkt toplam terimi üzerine yükseltilebiliyorsa yani T modülü, $T/Y \ll U/Y$ olacak biçimde U nun direkt toplamı olan Y alt modülünü içeriyorsa U ya *yükseltilebilir modül* adı verilir (Clark vd., 2006).

3.3.2. Önerme T modülü için aşağıdakiler denktir;

(i) T yükseltilebilir modüldür,

(ii) $K \leq T$ için $T_1 \leq K$ ve $K \cap T_2 \ll T_2$ olacak biçimde T nin bir $T = T_1 \oplus T_2$ parçalanışı vardır,

(iii) $K \leq T$ için $L \subseteq T$ ve $P \subseteq K$ olmak üzere $K = P + L$ ve $L \ll T$ olacak şekilde T nin P direkt toplam terimi vardır. (Clark vd., 2006).

3.3.3. Örnek Yükseltilebilir modüllerin direkt toplamı yükseltilebilir değildir. Örneğin $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ yükseltilebilir $\mathbb{Z}$ -modülleri ele alalım. $M = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ modülü yükseltilebilir değildir (Clark vd., 2006).

3.3.4. Tanım T modülünün L yarı basit alt modülü için $V \leq L$ ve $L/V \ll T/V$ şeklinde T nin bir V direkt toplam terimi mevcutsa T ye *zayıf yükseltilebilir modül* adı verilir (Orhan Ertaş, 2006).

3.3.5. Örnek $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ zayıf yükseltilebilir fakat yükseltilebilir değildir.

$Des(T) = 0$ olan her T modülü zayıf yükseltilebilir modüldür (Orhan Ertaş, 2006).

3.3.6. Önerme T modülü için aşağıdakiler denktir;

(i) T zayıf yükseltilebilir modüldür,

(ii) K , T nin yarı basit alt modülü, $T_1 \leq K$ ve $K \cap T_2 \ll T_2$ şeklinde $T = T_1 \oplus T_2$ parçalanışı vardır,

(iii) K , T nin yarı basit alt modülü ve B , T nin direkt toplam terimi iken $S \ll T$ olacak biçimde $K = B \oplus S$ parçalanışı mevcuttur (Orhan Ertaş, 2006).

3.3.7. Önerme M_1 zayıf yükseltilebilir modül ve M_2 yarı basit modül olsun. Eğer $M = M_1 \oplus M_2$ ise M zayıf yükseltilebilir modüldür (Orhan Ertaş, 2006).

3.3.8. Tanım T modül ve T nin her yarı basit alt modülü N ise $T = N + V$ ve $N \cap V \ll V$ şeklinde T nin bir V direkt toplam terimi varsa T ye *zayıf- $\oplus$ -tümlenmiş modül* (*w- $\oplus$ -tümlenmiş modül*) denir (Orhan Ertaş, 2006).

3.3.9. Örnek S yerel artin halka olsun. $\mathbb{Q} = S/Rad(S)$, $Rad(S)^2 = 0$ değişmeli ve $boy_{\mathbb{Q}}^{Rad(S)} = 2$, $boy(Rad(S)_{\mathbb{Q}}) = 1$ olsun. $D = \{(us - vs) \mid s \in S\}$ şeklinde $U = [(S \oplus S)/D]_S$ S -modülü zayıf- $\oplus$ -tümlenmiştir fakat $\oplus$ -tümlenmiş modül değildir (Orhan Ertaş, 2006).

3.3.10. Önerme Zayıf yükseltilebilir modüller zayıf- $\oplus$ -tümlenmiş modüllerdir (Orhan Ertaş, 2006).

İspat T zayıf yükseltilebilir modül ve $N \leq T$ yarı basit olsun. Kabul gereği $T = T_1 \oplus T_2$ parçalanışı mevcuttur ve $T_1 \leq N$ ve $N \cap T_2 \ll T_2$ olur. $T = N + T_2$ olduğundan T zayıf- $\oplus$ -tümlenmiş modüldür.

Tanımlar gereği aşağıdaki diyagramları elde edilir.

Yükseltilebilir modül $\Rightarrow \oplus$ -tümlenmiş modül $\Rightarrow$ zayıf- $\oplus$ -tümlenmiş modül

3.3.11. Önerme T (D_3) koşuluna sahip zayıf- $\oplus$ -tümlenmiş modül ise T nin her direkt toplam terimi zayıf- $\oplus$ -tümlenmiş modüldür (Orhan Ertaş, 2006).

3.3.12. Önerme M , (D_3) koşulunu sağlayan zayıf- $\oplus$ -tümlenmiş modül olmak üzere M_1 , yarı basit, M_2 zayıf- $\oplus$ -tümlenmiş modül ve $Des_s(M_2) \ll M_2$ olacak şekilde bir $M = M_1 \oplus M_2$ parçalanışı vardır (Orhan Ertaş, 2006).

İspat M zayıf- $\oplus$ -tümlenmiş modül olduğundan $M = Des(M) + M_2$ ve $Des(M_2) = M_2 \cap Des(M) \ll M_2$ şeklinde $M = M_1 \oplus M_2$ parçalanışı mevcuttur. Önerme 3.3.11 den M_1 ve M_2 zayıf- $\oplus$ -tümlenmiş modüllerdir. $Des(M) = Des(M_1) \oplus Des(M_2)$ olduğundan $Des(M) + M_2 = Des(M_1) \oplus Des(M_2) + M_2 = Des(M_1) \oplus M_2 = M = M_1 \oplus M_2$ den $Des(M_1) = M_1$ dir. Böylelikle M_1 yarı basit olur.

3.3.13. Teorem Zayıf- $\oplus$ -tümlenmiş modüllerin sonlu sayıdaki direkt toplamaları da zayıf- $\oplus$ -tümlenmiş modüldür (Orhan Ertaş, 2006).

3.4. ss-Tümlenmiş Modüller

3.4.1. Tanım T modül ve $T = K + U$ olan $K, U \leq T$ için $K \cap U \subseteq Des_s(U)$ ise U ya K nın T de *ss-tümleyeni* denir (Kaynar vd., 2020).

Tanım 3.4.1 gereğince aşağıdaki diyagram elde edilir.

ss-tümleyen $\Rightarrow$ tümleyen

3.4.2. Tanım T modül ve $N \leq T$ olmak üzere $T = N + V$ şeklinde olan her $V \leq T$ için N nin $V' \leq V$ şeklinde bir V' ss-tümleyeni bulunuyorsa N , T de *bol ss-tümleyene sahiptir* denir (Kaynar vd., 2020).

3.4.3. Tanım T modülünün tüm alt modülleri ss-tümleyene sahipse, T ye *ss-tümlenmiş modül* adı verilir (Kaynar vd., 2020).

3.4.4. Önerme T ss-tümlenmiş modül ve $K \ll T$ ise $K \subseteq Des_s(T)$ dir (Kaynar vd., 2020).

İspat $K \ll T$ olduğu için K nın ss-tümleyeni sadece T dir. Bu durumda $K = K \cap T \subset Des_s(T)$ yarı basit olup $K \subseteq Des(T)$ dir. Ayrıca $K \cap T = K \subseteq Rad(T)$ olup Önerme 2.10.9 dan $K \subseteq Des_s(T)$ elde edilir

3.4.5. Sonuç V ss-tümlenmiş modül ve $Rad(V) \ll V$ ise $Rad(V) \subseteq Des(V)$ dir (Kaynar vd., 2020).

İspat V , ss-tümlenmiş ve $Rad(V) \ll V$ ise, $Rad(V)$ nin ss-tümleyeni V olur. Buradan $V \cap Rad(V) = Rad(V) \ll V$, $V = V + Rad(V)$ ve $V \cap Rad(V) = Rad(V)$ yarı basit olup $Rad(V) \subseteq Des(V)$ bulunur.

3.4.6. Lemma U tümlenmiş modül ve $Rad(U) \subseteq Des(U)$ olmak üzere U ss-tümlenmiş modüldür (Kaynar vd., 2020).

İspat $T \leq U$ olsun. Hipotez gereğince U nun $U = T + V$ ve $T \cap V \ll V$ koşullarını sağlayan V alt modülü vardır. $T \cap V \ll V$ olduğu için $T \cap V \subseteq Rad(V) \subseteq Rad(U) \subseteq Des(U)$ kapsamı yardımıyla $T \cap V$, U nun yarı basit alt modülü olur. Böylece $T \cap V \subseteq Des_s(V)$ olup U ss-tümlenmiş olur.

3.4.7. Önerme T güçlü yerel modül olmak üzere T , ss-tümlenmiştir (Kaynar vd., 2020).

3.4.8. Önerme U oyuk modül olmak üzere U nun ss-tümlenmiş olması için U nun güçlü yerel modül olması gerekli ve yeterlidir (Kaynar vd., 2020).

İspat $(\Rightarrow)$ U ss-tümlenmiş modül ve $u \in Rad(U)$ için $uS \ll U$ dur. U ss-tümlenmiş olmasından dolayı Önerme 3.4.4 den $uS \subseteq Des_s(U)$ dir. Buradan $u \in Des(U)$ olup $Rad(U) \subseteq Des(U)$ bulunur. $U = Rad(U)$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde $U = Des(U)$ olduğu için U yarı basittir. Yarı basit modülün radikali sıfır olduğu için $U = Rad(U) = 0$ bulunur. U oyuk olduğundan $U \neq Rad(U)$ olmalıdır. $U \neq Rad(U)$ ve U oyuk olduğu için U yereldir. $Rad(U) \subseteq Des(U)$ olduğu için U güçlü yerel modüldür.

$(\Leftarrow)$ Önerme 3.4.7 den açıktır.

3.4.9. Örnek q asal tamsayı olmak üzere $T = \mathbb{Z}_{q^k}$ ($1 \leq k \in \mathbb{Z}$) yerel $\mathbb{Z}$ -modülünü alalım.

$k = 1$ durumunda T modülü basit ve ss-tümlenmiştir.

$k = 2$ durumunda T modülü tümlenmiş fakat basit değildir. Örneğin; $k = 2$ ve $q = 2$ için $\mathbb{Z}_4$ ss-tümlenmiştir.

$k \geq 3$ durumunda T modülü ss-tümlenmiş olmaz. Örneğin $k = 3$ ve $q = 2$ için $\mathbb{Z}_8$ tümlenmiş ancak ss-tümlenmiş değildir.

$\mathbb{Z}_4$ yerel modülü yarı basit olmayıp ss-tümlenmiş olan bir modüldür (Kaynar vd., 2020).

Örneklerden anlaşılacağı üzere yarı basit modüllerin genellemesi olarak ss-tümlenmiş modülleri düşünebiliriz.

$$\text{yarı basit modül} \Rightarrow \text{ss-tümlenmiş modül} \Rightarrow \text{tümnenmiş modül}$$

3.4.10. Örnek q asal tamsayı olmak üzere $\mathbb{Z}_{q^\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{q^n}$ oyuk $\mathbb{Z}$ -modülü ss-tümnenmiş modül değildir (Kaynar vd., 2020).

3.4.11. Lemma T bir modül, $X + U$ nun T de bir ss-tümleyeni var ve X ss-tümnenmiş ise U nun T de bir ss-tümleyeni vardır (Kaynar vd., 2020).

3.4.12. Önerme T modül ve $X, V \leq T$ için $T = X + V$ olsun. X ve V ss-tümnenmiş ise T ss-tümnenmiştir (Kaynar vd., 2020).

İspat $U \leq T$ olmak üzere 0 modülü $T = X + (V + U)$ nun ss-tümleyenidir. X ss-tümnenmiş olduğu için $V + U$ nun T de bir ss-tümleyeni mevcuttur. V ss-tümnenmiş ise U nun T de bir ss-tümleyeni bulunur. Bu T nin her U alt modülü için geçerli olduğu için T ss-tümnenmiştir.

3.4.13. Sonuç $T_1, T_2, \dots, T_n$ modülleri T modülünün ss-tümnenmiş alt modülleri ise $T_1 + T_2 + \dots + T_n$ sonlu toplamı ss-tümnenmiştir (Kaynar vd., 2020).

3.4.14. Önerme T modülünün bütün alt modülleri ss-tümnenmiş ise T , bol ss-tümnenmiştir (Kaynar vd., 2020).

İspat $T = U + K$ şeklinde $U, K \leq T$ alalım. K , ss-tümnenmiş olduğu için $K = (U \cap K) + K'$, $U \cap K' \subseteq \text{Des}_s(K')$ olacak biçimde $K' \leq K$ mevcuttur ve $T = U + K = U + ((U \cap K) + K') = U + K'$ bulunur. Buradan K' , U nun T de bir ss-tümleyeni olur ve U, T de bol ss-tümleyene sahiptir. Sonuç olarak T bol ss-tümnenmiştir.

3.4.15. Önerme T (bol) ss-tümnenmiş modül olmak üzere T nin tüm bölüm modülleri de (bol) ss-tümnenmiştir (Kaynar vd., 2020).

3.4.16. Lemma Bol ss-tümlemiş T modülünün, ss-tümleyen alt modülü K olmak üzere K bol ss-tümlemiş modüldür (Kaynar vd., 2020).

3.4.17. Sonuç U modülü için aşağıdaki şartlar denktir:

- (i) U bol ss-tümlemiştir,
- (ii) U nun alt modülleri de ss-tümlemiştir,
- (iii) U nun alt modülleri de bol ss-tümlemiştir (Kaynar vd., 2020).

3.5. Yerel Artin Tümlemiş Modüller

3.5.1. Tanım T yerel S -modül ve $Rad(T)$ T nin yerel artin alt modülü olmak üzere T ye *RLA yerel modül* adı verilir. S halkası RLA-yerel modülse S ye *RLA-yerel halka* adı verilir (Şahin ve Nişancı Türkmen, 2021).

$\mathbb{Z}_8$ RLA yerel $\mathbb{Z}$ -modüldür. Ayrıca T modülü hem yerel modül hem de artin modül ise bu takdirde T , RLA-yerel modüldür.

3.5.2. Önerme T bir RLA-yerel modül olmak üzere T nin her bölüm modülü de RLA-yerel modül olur (Şahin ve Nişancı Türkmen, 2021).

İspat T RLA-yerel modül ve $K \leq T$ olsun. T yerel olduğu için T/K yereldir ve T nin tek maksimal alt modülü $Rad(T)$ dir. Burada (Wisbauer, 31.2 (1) (ii)) den $Rad(T/K) = Rad(T)/K$ yerel artin modül olur. Sonuç olarak T/K , RLA-yerel modüldür.

3.5.3. Tanım T bir modül ve $U \leq T$ olmak üzere $U \cap L \ll L$, $T = U + L$ ve $U \cap L$, T nin yerel artin alt modülü oluyorsa L ye U nun *yerel artin tümleyeni* adı verilir. T nin alt modüllerinin T de yerel artin tümleyeni mevcutsa T ye *yerel artin tümlemiş modül* adı verilir. T nin $T = U + L$ şeklindeki her $U \leq T$ modülü L tarafından kapsanan yerel artin tümleyene sahip oluyorsa T modülüne *bol yerel artin tümlemiş* adı verilir (Şahin ve Nişancı Türkmen, 2021).

Örneğin Yarı basit modüller yerel artindir. $\mathbb{Z}_4$ yerel artin modüldür. q asal tamsayı olmak üzere $\mathbb{Z}_{q^\infty}$ $\mathbb{Z}$ -modülü artindir bu yüzden yerel artin tümlenmiştir.

Örneklerden yola çıkarak aşağıdaki diyagramı elde ederiz.

$$\text{ss- tümlenmiş} \implies \text{yerel artin tümlenmiş} \implies \text{tümlenmiş}$$

3.5.4. Lemma N tümlenmiş modül ve $Rad(N)$, N modülünün yerel artin alt modülü olmak üzere N yerel artin tümlenmiş modül olur (Şahin ve Nişancı Türkmen, 2021).

İspat N tümlenmiş modül ve $V \leq N$ için $N = V + T$ ve $V \cap T \ll T$ olacak şekilde $\exists T \leq N$ vardır. Dolayısıyla $V \cap T \ll N$ dir. $V \cap T \subseteq Rad(N)$ ve $Rad(N)$, yerel artin alt modül olduğu için Sonuç 2.11.5 (i) gereği $V \cap T$ yerel artin alt modül olur ve buradan N yerel artin tümlenmiş modüldür.

3.5.5. Teorem T modül ve $Rad(T) \ll T$ olmak üzere aşağıdakiler birbirine denktir;

(i) T yerel artin tümlenmiş modüldür,

(ii) $Rad(T)$ nin T de yerel artin tümleyeni mevcuttur ve T tümlenmiştir,

(iii) $Rad(T)$ yerel artindir ve T tümlenmiştir (Şahin ve Nişancı Türkmen, 2021).

İspat (i) $\implies$ (ii) T yerel artin tümlenmiş olduğu için T tümlenmiş modüldür ve $Rad(T)$, T de yerel artin tümleyene sahiptir.

(ii) $\implies$ (iii) $Rad(T) \ll T$ olduğu için $Rad(T)$ nin T de ki yerel artin tümleyeni T olur. Böylelikle $Rad(T) = Rad(T) \cap T \ll T$, $Rad(T) + T = T$ ve $Rad(T)$ yerel artin modül olur.

(iii) $\implies$ (i) Lemma 3.5.4 den açıktır.

3.5.6. Lemma N bir modül, $V \leq N$ ve U modülü N nin yerel artin tümlenmiş alt modülü olmak üzere $U + V$, N de yerel artin tümleyene sahipse V , N de yerel artin tümleyene sahip olur (Şahin ve Nişancı Türkmen, 2021).

3.5.7. Önerme $T = X + Y$ şeklindeki T modülünün X ve Y alt modülleri için X ve Y yerel artin tümlenmiş modül ise T de yerel artin tümlenmiş modül olur (Şahin ve Nişancı Türkmen, 2021).

İspat $N \leq T$ olmak üzere $T = X + Y + N$ dir. $X + Y + N$ ise T de 0 (sıfır) aşikâr yerel artin tümleyenine sahip olur. Burada X yerel artin tümlenmiş olduğu için Lemma 3.5.7 gereği $Y + N, T$ de yerel artin tümleyene sahiptir. Tekrar Lemma 3.5.7 uygulandığında Y yerel artin tümlenmiş olduğu için N, T de bir yerel artin tümleyene sahip olur. Buradan T yerel artin tümlenmiş olur.

3.5.8. Sonuç T yerel artin tümlenmiş modül olmak üzere T nin sonlu toplamı da yerel artin tümlenmiş modüldür (Şahin ve Nişancı Türkmen, 2021).

3.5.9. Önerme (Bol) yerel artin tümlenmiş modüllerin bölüm modülleri de (bol) yerel artin tümlenmiş modüldür (Şahin ve Nişancı Türkmen, 2021).

3.5.10. Önerme Tüm alt modülleri yerel artin tümlenmiş olan modüller bol yerel artin tümlenmiştir (Şahin ve Nişancı Türkmen, 2021).

İspat $K, N \leq T$ ve $T = K + N$ olsun. N yerel artin tümlenmiş olduğu için $N = (K \cap N) + N'$, $K \cap N' \ll N'$ ve $K \cap N'$ yerel artin alt modülü mevcut olacak şekilde $N' \leq N$ vardır. $N = (K \cap N) + N'$ olduğu için $T = K + N = K + ((K \cap N) + N') = K + N'$ bulunur. Buradan N', K nın N de kapsanan yerel artin tümleyeni olur. Sonuç olarak T bol yerel artin tümlenmiş olur.

3.5.11. Lemma T bol yerel artin tümlenmiş modül, V de yerel artin tümleyen alt modül olmak üzere V bol yerel artin tümlenmiş modüldür (Şahin ve Nişancı Türkmen, 2021).

3.5.12. Önerme π -projektif yerel artin tümlenmiş modüller bol yerel artin tümlenmiştir (Şahin ve Nişancı Türkmen, 2021).

3.5.13. Önerme T modülü bol yerel artin tümlenmiş ise T nin $X = K + L$ formundaki her X alt modülü için K yerel artin tümlenmiş ve yerel artin olan $L \ll T$ alt modülü olacak şekilde mevcuttur (Şahin ve Nişancı Türkmen, 2021).

İspat $X \leq T$ olsun. T yerel artin tümlenmiş olduğu için X, V yerel artin tümleyene sahip olur. T bol yerel artin tümlenmiş olduğu için T de V nin yerel artin tümleyeni şeklinde $K \leq X$ modülü mevcuttur. $X \cap V = L$ olmak üzere V, X nin yerel artin tümleyeni olduğu için L yerel artin modül olur. Modüler kurallara göre $X = X \cap T = X \cap (K + V) = K + (X \cap V) = K + L$ dir. Lemma 3.5.11 gereği K yerel artin tümlenmiştir. $L \ll V$ olduğu için $L \ll T$ olur.



4.BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Zayıf $\oplus$ - Yerel Artin Tümlenmiş Modüller

4.1.1 Tanım (i) L modül ve U, L nin herhangi bir yerel artin alt modülü olsun. Eğer $U \cap T \ll T$ ve $L = U + T$ biçiminde L nin bir T direkt toplam terimi mevcutsa L modülüne *zayıf $\oplus$ - yerel artin tümlenmiş modül* veya kısaca $\oplus_{WLA}$ -tümlenmiş modül adı verilir.

(ii) L modül ve U, L nin herhangi bir yerel artin alt modülü olsun. Eğer $U/T \ll L/T$ olacak biçimde L nin $T \subseteq U$ direkt toplam terimi mevcutsa L modülüne *zayıf yerel artin yükseltilebilir modül* veya kısaca (D_{1WLA}) - modül denir.

(iii) L modül ve U, L nin herhangi bir alt modülü olmak üzere $U/T \ll L/T$ ve U/T yerel artin olacak biçimde $T \subseteq U$ direkt toplam terimi mevcutsa L modülüne *yerel artin yükseltilebilir modül* veya kısaca (D_{1LA}) - modül denir.

(iv) L modül ve L nin sonlu üretilmiş her U alt modülü için $U/T \ll L/T$ ve U/T yerel artin olacak biçimde $T \subseteq U$ direkt toplam terimi mevcutsa L modülüne *sonlu üretilmiş yerel artin yükseltilebilir modül* veya kısaca *sonlu üretilmiş (D_{1LA}) - modül* denir.

Tanım (ii) gereğince L nin (D_{1WLA}) -modül olabilmesi için $U \leq L$ için $L = U \oplus T$ ve $U \cap T \ll T$ ve $U \cap T$ yerel artin olacak biçiminde $T \subseteq L$ alt modülünün bulunması gerek ve yeterlidir.

4.1.2. Lemma $L, (D_{1WLA})$ -modül olmak üzere $L, \oplus_{WLA}$ -tümlenmiş modüldür.

İspat $L, (D_{1WLA})$ -modül olsun. (Clark vd., 2006) da yer alan 22.1 (a) $\Rightarrow$ (d) geçişine benzer yolla $L (D_{1WLA})$ - modül iken, L deki her yerel artin U alt modülü için U, L modülünde direkt toplam terimi biçiminde bir yerel artin tümleyenine sahip olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla $L, \oplus_{WLA}$ -tümlenmiş modüldür.

4.1.3. Teorem $M, (D_{1LA})$ -modül olmak üzere $M, \oplus_{WLA}$ -tümlenmiştir.

İspat M , (D_{1LA}) -modül ise (D_{1WLA}) -modül olduğu açıktır. O halde Lemma 4.1.2. den $\oplus_{WLA}$ -tümleşmiş modüldür.

4.1.4 Teorem Her alt modülü M de direkt toplam terimine yükseltilebilir olan bol yerel artin tümleşmiş M modülü $\oplus_{WLA}$ -tümleşmiştir.

İspat M bol yerel artin tümleşmiş modül olduğu için $M = X + K$ ve $T \subseteq K$ olacak biçimde X in T yerel artin tümleyeni mevcuttur. Hipotez gereğince M nin her X yerel artin alt modülü için $K' \subseteq X$ ve $X/K' \ll M/K'$ olacak biçimde M nin K' direkt toplam terimi mevcuttur. Böylece M (D_{1LA}) -modül olduğu için Teorem 4.1.3. den M modülü $\oplus_{WLA}$ -tümleşmiştir.

4.1.5. Lemma M bir Noether modül olsun. M sonlu üretilmiş (D_{1LA}) -modül ise M (D_{1LA}) -modüldür.

İspat Noether modül tanımından görülür.

4.1.6. Teorem M Noether ve sonlu üretilmiş (D_{1LA}) -modül ise M modülü $\oplus_{WLA}$ -tümleşmiş modüldür.

İspat M Noether olduğundan M nin alt modülleri sonlu üretilmiştir. Hipotez gereğince M sonlu üretilmiş (D_{1LA}) -modül olduğundan Lemma 4.1.5. den M , (D_{1LA}) -modüldür. Teorem 4.1.3. den M , $\oplus_{WLA}$ -tümleşmiş modüldür.

4.1.7. Teorem $K_1, K_2, \dots, K_m$ modülleri K modülünün $K = K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_m$ koşulunu sağlayan $\oplus_{WLA}$ -tümleşmiş alt modülleri olmak üzere K , $\oplus_{WLA}$ -tümleşmiştir.

İspat m bir pozitif tam sayı ve K_j ($j: 1, 2, \dots, m$) alt modülleri $\oplus_{WLA}$ -tümleşmiş olsun. İspatı m üzerine tümevarım uygulayarak yapalım. $m = 2$ olsun. Bu durumda $K = K_1 \oplus K_2$ dir. Burada $\pi_j = K \rightarrow K_j$ j . projeksiyonunu ($j: 1, 2$) alalım. T modülü K nin keyfi bir yerel artin alt modülü olsun. Teorem 2.11.2 (i) gereğince $(T + K_1) \cap K_2 = \pi_2(T)$ yerel artin alt modüldür. 0 (sıfır) alt modülü, $(T + K_1) + K_2$ nin K da bir direkt toplam terimi biçiminde tümleyeni olur. Lemma 3.5.6 dan $T + K_1$, K da H yerel artin tümleyenine sahiptir. Tekrar Teorem 2.11.2. (i) kullanılarak $(T + H) \cap K_1 \cap (T + K_2) \cap K_1 =$

$\pi_1(T)$ yerel artin alt modül olduğu görülür. Hipotez gereğince $(T + H) \cap K_1$ in K_1 de direkt toplam terimi olacak biçimde bir U tümleyeni olduğu açıktır. Tekrar Lemma 3.5.6 çalıştırılırsa $H \oplus U$ nun K da direkt toplam terimi biçiminde tümleyeni olduğu görülür. Dolayısıyla $K, \oplus_{WLA}$ -tümlenmiştir.

4.1.8 Tanım M modülünün her N alt modülü ve $M = M_1 \oplus M_2$ parçalanışı için $K_1 \oplus K_2$, M de N nin yerel artin tümleyeni olacak şekilde $K_1 \leq M_1$ ve $K_2 \leq M_2$ alt modülleri varsa M ye *genelleştirilmiş yerel artin yükseltilebilir modül* veya kısaca (D_{1GLA}) -modül denir.

4.1.9. Teorem $M, (D_{1GLA})$ -modül ise $M, \oplus_{WLA}$ -tümlenmiş modüldür.

İspat N, M nin yerel artin alt modülü olsun. Hipotez gereğince $N + (T_1 \oplus T_2) = M = M_1 \oplus M_2$ ve $N \cap (T_1 \oplus T_2) \ll T_1 \oplus T_2$ olacak şekilde M nin $T_1 \oplus T_2$ direkt toplam terimi vardır. $N \cap (T_1 \oplus T_2) \ll T_1 \oplus T_2$ bulunur. (Wisbauer, 1991, 19.3 (v)) gereğince $N \cap (T_1 \oplus T_2) \ll M$, $N \cap (T_1 \oplus T_2)$ yerel artin ve $T_1 \oplus T_2, M$ nin direkt toplam terimi olduğu için $N \cap (T_1 \oplus T_2) \ll T_1 \oplus T_2$ dir. Buradan M nin $\oplus_{WLA}$ -tümlenmiş modül olduğu görülür.

4.1.10. Teorem Yerel artin tümlenmiş modül olan M nin her yerel artin tümleyen alt modülü M nin bir direkt toplam terimine yükseltilebiliyorsa $M, \oplus_{WLA}$ -tümlenmiş modüldür.

İspat M nin yerel artin alt modülü U olsun. Kabul edelim ki V, U nun M de yerel artin tümleyeni olsun. M nin her yerel artin tümleyen alt modülü M de bir direkt toplam terimine yükseltilebilir olduğu için $V \cap M_2 \ll M_2, M_1 \leq V$ ve $M = M_1 \oplus M_2$ olan M nin M_1 ve M_2 alt modülleri vardır. Böylece $V = V \cap M = V \cap (M_1 \oplus M_2)$ eşitliğinin Modüler kural uygulanarak $V = M_1 \oplus (V \cap M_2)$ olduğu görülür. Burada $V \cap M_2 \ll M$ olduğu için $M = U + V = U + (V \cap M_2) + M_1 = U + M_1$ eşitliği bulunur. V, U nun M de yerel artin tümleyeni olduğundan aynı zamanda bir tümleyenidir. Böylece $V = M_1$ bulunur. Bu yüzden $M = V + M_2$ eşitliği sağlanır. V, M nin bir direkt toplam terimi biçimindedir. Dolayısıyla $M, \oplus_{WLA}$ -tümlenmiş modüldür.

4.1.11. Örnek T burulma bir $\mathbb{Z}$ -modül ve T nin bir yarı basit alt modülü N ise, $N = Des(T)$ dir. $Des(T)$ yarı basit ve $N \ll T$ olduğundan $N = Des(T) \ll T$ dir. (Abed M.M. ve Ahmad A.G., 2014, Örnek 2.12) gereğince T nin her yarı basit alt modülünün T de bir direkt toplam terimi biçiminde tümleyene sahip olduğu açıktır. Dolayısıyla T $w\text{-}\oplus$ -tümlenmiş modüldür. Böylece $N + T = T$ ve $N \cap T \ll T$ şeklinde T için bir direkt toplam terimi vardır. (Wisbauer, 31.15 (6)) gereğince T nin yerel artin modül olduğu açıktır. Ayrıca (Wisbauer, 1991, 31.2.(1)(i)) den N ve $N \cap T$, T nin yerel artin alt modülleridir. Sonuç olarak T , $\oplus_{WLA}$ -tümlenmiş modüldür.

4.1.12. Örnek S yerel ve artin halka olsun. $Q = S/Rad(S)$ halkasını, $Rad(S)^2 = 0$, $Q = S/Rad(S)$ değişmeli ve $boy(QRad(S)) = 2$, $boy(Rad(S)_Q) = 1$ olacak şekilde alalım. $D = \{us - vs : s \in S\}$ olacak biçimde $U = [(S \oplus S)/D]_S$ parçalanamaz injektif S -modüldür. (Orhan and Tütüncü, 2006. Örnek 2.1) gereğince U , $w\text{-}\oplus$ -tümlenmiştir. Dolayısıyla U , $\oplus_{WLA}$ -tümlenmiş modüldür.

4.1.13. Lemma M , (D_3) koşulunu sağlayan $\oplus_{WLA}$ -tümlenmiş modül olmak üzere M nin direkt toplam terimleri de $\oplus_{WLA}$ -tümlenmiştir.

İspat M nin direkt toplam terimi T ve T de yerel artin alt modül U olmak üzere hipotez gereği $M = U + L$, $U \cap L \ll L$ şeklinde M nin bir L direkt toplam terimi mevcuttur. Modüler kurala göre $T = U + (T \cap L) = T \cap (U + L)$ dir. Burada $M = T + L$ dir. M , (D_3) koşulunu sağladığından $T \cap L$ de T nin bir direkt toplam terimi olur. $U \cap (T \cap L) = U \cap L \ll T \cap L$ olduğundan T , $\oplus_{WLA}$ -tümlenmiş modüldür.

4.1.14. Sonuç M , (D_3) koşulunu sağlayan $\oplus_{WLA}$ -tümlenmiş modül olsun. Bu takdirde M_1 yerel artin alt modülü için $M = M_1 \oplus M_2$ parçalanışında $Des(M_2) \ll M_2$ olacak şekilde $\oplus_{WLA}$ -tümlenmiş olan M_2 alt modülü mevcuttur.

İspat M , $\oplus_{WLA}$ -tümlenmiş modül olsun. $Des(M)$, M nin yarı basit alt modülü olduğundan yerel artin alt modülüdür. $M = M_1 \oplus M_2$ parçalanışında $Des(M) \not\subseteq M_2 = M$ ve $Des(M_2) = Des(M) \cap M_2$ şeklindedir. Lemma 4.1.13 gereğince M_1 ve M_2 $\oplus_{WLA}$ -tümlenmiş modüldür. $Des(M) = Des(M_1) + Des(M_2)$ ve $Des(M) + M_2 = Des(M_1) \oplus$

$Des(M_2) + M_2 = M$ dir. Buradan $Des(M_1) + M_2 = M = M_1 \oplus M_2$ olup M_1 , yarı basit bulunur. Burada M_1 in yerel artin alt modül olduğu açıktır.

4.1.15. Önerme T , $\oplus_{WLA}$ -tümleşmiş modül ve T/M projektif olsun. Bu takdirde M , $\oplus_{WLA}$ -tümleşmiş modüldür.

İspat M nin yerel artin alt modülü L ise hipotez gereğince $L \cap V \ll V$, $L \cap V$ yerel artin ve $T = L + V$ biçiminde T nin V direkt toplam terimi mevcuttur. $M = L + (M \cap V)$ ve $L \cap (M \cap V) = L \cap V \subseteq Des_s(V)$ dir. $V/(M \cap V)$ projektif olduğundan $M \cap V$, T nin direkt toplam terimidir. Bu yüzden $M \cap V$ aynı zamanda M nin de bir direkt toplam terimi olur. Dolayısıyla $M \cap V \subseteq Des_s(V)$ olup M , $\oplus_{WLA}$ -tümleşmiş modüldür.

4.1.16. Teorem M kendi kendine projektif modülü için aşağıdakiler denktir;

- (i) M $\oplus_{WLA}$ - tümleşmiştir,
- (ii) M nin $M = M_1 \oplus M_2$ parçalanışındaki M_1 yarı basit ve M_2 $\oplus_{WLA}$ -tümleşmiş modül olacak şekilde alt modülleri mevcuttur.
- (iii) M (D_{1WLA}) -modüldür.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) Sonuç 4.1.14 gereği ve (Mohamed ve Müller, 1990) gereğince açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Teorem 4.1.7 gereği açıktır.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Tanım 4.1.1 gereği açıktır.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Kabul edelim ki M kendi kendine projektif ve $\oplus_{WLA}$ -tümleşmiş modül olsun. M nin keyfi bir N yerel artin alt modülüne karşılık $M = T \oplus T' = T + N$ ve $T \cap N \ll T$ olacak biçimde M nin T ve T' alt modülü mevcuttur. $\varphi: M \rightarrow M/N$ doğal epimorfizmasını ve her $t \in T$ için $\beta(t) = t + N$ ile tanımlı $\beta: T \rightarrow M/N$ epimorfizmasını gözönüne alalım. $\text{Çek}(\beta)$ nın $N \cap T$ olduğu açıktır. M, T -projektif olduğundan $\beta \circ h = \varphi$ olacak biçimde bir $h: M \rightarrow T$ homomorfizma mevcuttur. Bu homomorfizma epimorfizmadır. T, M -projektif olduğundan h parçalanabilir. Bu nedenle $M = \text{Çek}(h) \oplus \text{Gör}(g)$ olacak biçimde $g: T \rightarrow M$ homomorfizması mevcuttur. Burada $\text{Çek}(h)$ ın N nin alt modülü

olduğu açıktır. $g(N \cap T) = N \cap \text{Gör}(g)$, $N \cap T \ll T$, $N \cap \text{Gör}(g) \ll \text{Gör}(g)$ dir. Bu yüzden M , (D_{1WLA}) -modüldür.



5.SONUÇ VE ÖNERİLER

Literatürde zayıf $\oplus$ -tümlenmiş modüller kavramında geçen yarı basit alt modüller yerel artin alt modüllere genelleştirilerek çalıştığımız $\oplus_{WLA}$ -tümlenmiş modüller ve bu modül sınıfının birtakım özelleştirmelerine yer verilerek bu cebirsel yapılar arasındaki geçiş teoremleri ve temel cebirsel özellikleri elde edildi. Bu tez konusu yardımıyla Dedekind bölgelerinin $\oplus_{WLA}$ -tümlenmiş modüller yardımıyla karakterizasyonu yapılabilir ve daha özelde modülleri $\oplus_{WLA}$ -tümlenmiş olan halkalar belirlenebilir.



KAYNAKLAR

- Abed, M.M. and Ahmad, A.G., (2014). Some Properties of Weak- $\oplus$ -Supplemented Module, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Volume 92 No. 3, 351-358, ISSN: 1314-3395
- Alizade, R., Pancar, A. (1999). Homoloji Cebire Giriş. Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, 184.
- Alizade, R., Bilhan, G., Smith P.F. (2001) Modules Whose Maximal Submodules Have Supplements. *Communications in Algebra*, 29(6), 2389-2405.
- Anderson, F.W., Fuller, K. R. (1992). Rings and Categories of Modules. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 363.
- Clark, J. , Lomp, C. , Vanaja , N. , Wisbauer, R. (2006). Lifting Modules. Supplements and Projectivity in Module Theory. *Frontiers in Mathematics*. Basel, 394.
- Dlap. V. and Ringel C.M., (1972), A class of balanced non-uniserial rings, *Mathematische Annalen.*, 195, 279-291.
- Facchini, A., (1998). Module Theory, Progress in Mathematics, 167, Birkhauser 281s, Verlag, Basel.
- Harmancı, A., Keskin, D., Smith, P.F., (1999) On $\oplus$ -Supplemented Modules. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*. Hungar, 83(1-2), 161-169. ISSN: 1588-2632
- Hungerford, T.W. (1974). Algebra. Springer Verlag, 502.
- Kasch, F. (1982). Modules and Rings. Academic Press, 372.
- Kaynar, E., Çalışıcı, H. ve Türkmen, E. (2020). ss-supplemented Modules, Communications Faculty of Science University of Ankara Series A1 Mathematics and statistics, Volume 69, Number 1, Pages 473–485. ISSN 1303–5991
- Lam, T.Y. (1991). A First Course in Noncommutative Rings , Springer-Verlag, 397.
- Mohamed S.H., .Müller B.J.,(1990), Continuous and Discrete Modules, London Math.Soc.LNS 147.
- Nişancı Türkmen, B. (2019). İdeallerin Çarpımsal Teorisi. Nobel Akademi, 248.
- Nişancı Türkmen, B., Pancar, A. (2010). On Generalization of $\oplus$ -Cofinitely Supplemented Modules. *Ukrainian Mathematical Journal*, 62(2) , 203-209.
- Nişancı Türkmen, B., Pancar, A. (2014). İnjektif Modüllere Giriş. Pegem Akademi, 217.

- Orhan Ertuş N. ve Keskin Tütüncü D., (2006), Generalization of Weak Lifting Modules. *Soochow Journal of Mathematics*. Volume 32. ss.71-76
- Orhan Ertuş N. (2006), D_1 -Modüller ve Genellemeleri, Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yayınlanmış Doktora Tezi.
- Sharpe, D.W. , Vamos, P. (1972). Injective Modules, Cambridge at the University Press, 190.
- Şahin Y. (2021) Yerel Artin Tümlenmiş Modüller, Amasya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi.
- Türkmen, E. (2010) Radikal Tümlenmiş ve Eş Sonlu Radikal Tümlenmiş Modüllerin karakterizasyonları, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yayınlanmış Doktora Tezi.
- Wisbauer, R. (1991). Foundations of Module and Ring Theory. Gordon and Breach, 606.
- Zhou D. X., Zhang X. R. (2011). Small-Essential Submodules and Morita Duality, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 35: 1051-1062.
- Zoschinger H. (1974). Moduln, die in jeder Erweiterung ein Komplement haben. *Mathematica Scandinavica* -1974. -35. P. 267-287
- Zoschinger H. (1974) Komplementierte Moduln Über Dedekindringen, *Journal of Algebra*, 29, 42-56.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ruhiye Kurt

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi: Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Balıkesir Üniversitesi, Necatibey Eğitim Fakültesi, Formasyon Eğitimi

Yabancı Diller: İngilizce

İŞ DENEYİMİ

Necibe Kemal Akdoğan İmam Hatip Lisesi, Gaziantep/Nizip, 2015-2017

Şehit Ahmet Özsoy İmam Hatip Lisesi, Amasya/Merkez, 2017-2019

Şehit Yılmaz Zengin Mesleki Eğitim Merkezi, Amasya/Merkez, 2019-