



T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



ZEEMAN MODELİNİN DETERMİNİSTİK VE STOKASTİK ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Pınar ORAL

MAYIS 2018
GÜMÜŞHANE

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ZEEMAN MODELİNİN DETERMİNİSTİK VE STOKASTİK ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Pınar ORAL

Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

"Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı"

Yüksek Lisans Programında Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih :

Tezin Sözlü Savunma Tarihi :

MAYIS 2018



KABUL VE ONAY



Doç. Dr. Mehmet MERDAN danışmanlığında **Pınar ORAL** tarafından hazırlanan **“ZEEMAN MODELİNİN DETERMİNİSTİK VE STOKASTİK ANALİZİ”** isimli bu çalışma jürimiz tarafından Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Mühendisliği** Anabilim Dalı'na Yüksek Lisans Tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Başkan

: 
Doç. Dr. Tülay KESEMEN

Üye (Danışman)

: 
Doç. Dr. Mehmet MERDAN

Üye

: 
Doç. Dr. Rıdvan ŞAHİN

ONAY

Bu tez. 14/11/2012 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca kabul edilmiştir.


Doç. Dr. Ferkan SİPAHİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BEYANNAMESİ

Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlamış olduğum“ZEEMAN MODELİNİN DETERMİNİSTİK VE STOKASTİK ANALİZİ” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Doç. Dr. Mehmet MERDAN sorumluluğundatamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim 19/03/2018

İmza

Pınar ORAL

ÖZET
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZEEMAN MODELİNİN DETERMİNİSTİK VE STOKASTİK ANALİZİ

Pınar ORAL

Gümüşhane Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mehmet MERDAN

2018, 76 Sayfa

Bu çalışmada iki ve üç boyutlu Zeeman modeli (kalp atış modeli) incelenmiştir. Söz konusu modelde kararlılık analizi yapılacaktır. Tipik gevşemiş lif uzunluğunun durumu için analizler yapılmaktadır. Zeeman modellerinin yaklaşık analitik çözümleri elde edilecektir.

Başlangıç olarak iki boyutlu Zeeman modeline gecikme (delay) terimi ilave edilerek kararlılık analizi gerçekleştirilecektir. Daha sonra bu çalışmada Zeeman tarafından geliştirilen kalp atış modeli olarak da bilinen modele, rastgele stokastik etkiler eklenerek çözümün davranışını, p tansiyon normal dağılıma sahip bir rastgele değişken olması durumunda Zeeman modeli ele alınmış, x kalp kas lifinin ilk dört momentleri hesaplanarak, beklenen değer, varyans, standart sapma ve güven aralığı hesaplanmaktadır.

Ayrıca sayısal yöntemlerden yararlanarak kalp atış modeli için grafik simülasyonu oluşturulmaktadır.

Kesirli (fractional) mertebeden türevli Zeeman modelinin kararlılık analizi yapılmıştır, ayrıca farklı mertebeden türevler için çözüm eğrileri elde edilmektedir. İki ve üç boyutlu Zeeman modeline Wiener süreci (beyaz gürültü) terimleri eklenerek stokastik Zeeman modeli elde edilmiştir. Elde edilen bu stokastik model, Milstein ve Euler-Maruyama yöntemleriyle çözülmektedir. Deterministik, rastgele efektli ve stokastik Zeeman modelinin çözümleri karşılaştırılmaktadır.

Rastgele Zeeman Kalp Atış Modelinin çözümü için Random Diferansiyel Dönüşüm Metodu (RDDM) kullanılmıştır. Parametreler ve başlangıç şartları sırasıyla Beta ve Normal dağılıma sahip rastgele değişkenler olarak alınmıştır. Rastgele Zeeman modelinin yaklaşık analitik çözümü yapılarak sistemin yaklaşık beklenen değer ve varyansı hesaplanmıştır. Random Diferansiyel Dönüşüm Metodu, bu metoddan elde edilen kesik seri çözümünün yakınsaklık oranı ve doğruluğunu artırmak için Pade yaklaşımı ve Laplace dönüşümünün kullanımını içeren Modified Diferansiyel Random Dönüşüm Metodu kullanılmıştır. Rastgele modelin çözümünden elde edilen sonuçlar ve bileşenlerin rastgele davranışları grafikler ve tablolar yardımıyla verilmiştir. Beta ve normal dağılımlı rastgele etkileri içeren rastgele modellerin çözüm davranışları karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Zeeman kalp atış modeli, kararlılık analizi, Wiener süreci, delay (gecikme), Euler-Maruyama, Milstein, beklenen değer, varyans, Laplace-Pade yaklaşımı, Random Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi.

**THESIS
SUMMARY**

THE STOCHASTIC AND DETERMINISTIC ANALYSIS OF ZEEMAN MODEL

Pınar ORAL

Gümüşhane University
Science Institute Mathematics Engineering Department

Supervisor: Assoc. Prof. Mehmet MERDAN

2018, 76 Pages

Two and three dimension Zeeman Model is studied in this project. Stability analysis will be studied in that type. It is made analysis for the station of typical relaxed fiber length. Approximate analytic solutions for Zeeman models will be obtained.

Firstly, stability analysis will be carried out by adding ‘delay’ term to the two dimension Zeeman model. After that in this study, Zeeman model with the behaviour of the solution which was developed by Zeeman was dealt in case of being a random variable which has ‘p’ tension normal distribution by adding random stochastic effects which is known as heartbeat model and it is calculated variance, standard deviation, confidence interval, expected value with calculating first four moments of x heartbeat muscle fiber, also it is formed graph simulation for heartbeat model by using numerical methods.

It is made stability analysis of differential Zeeman model from fractional level. Also, it is obtained solution curves for derivatives from different levels. It is obtained stochastic Zeeman model by adding Wiener process terms to two and three dimension Zeeman model. This obtained stochastic model is being solved with Milstein and Euler-Maruyama methods. It is compared the solutions of stochastic, deterministic Zeeman model with random effect.

It is used Random Differential Transformation Method (RDDM) for the solution of Random Zeeman Heartbeat Model. Parameters and initial conditions are taken as random variables which has respectively Beta and Normal distributions. Approximate expected value and variance of the system is calculated by making approximate analytical solution of Random Zeeman Model. It is used Modified Differential Random Method which contains the usage of Laplace-Pade Approach conversion to increase the accuracy and ratio of convergence of the solution of slash serial which is obtained from RDDM. The results obtained from the solution of Random model and random behaviours of components are shown by the help of tables and graphs. The solution behaviours of random models which includes random effects with Beta and Normal distributions are compared.

Key Words: Zeeman Heartbeat Model, Stability Analysis, Wiener process, Delay, Euler-Maruyama, Milstein, Expected Value, Variance, Laplace-Pade Approximate, Random Differential Transformation Method, Normal Distribution, Beta Distribution

TEŞEKKÜR

Konunun belirlenmesinden, çalışmanın tamamlanıp bu hale getirilmesine kadar yardımını ve desteğini esirgemeyen hocam Doç.Dr. Mehmet MERDAN'a saygılarımı sunar, emeği için teşekkür ederim.

Ayrıca bu süre içerisinde, desteğini esirgemeyen ve her zaman yanımda olan aileme ve nişanlım Mete AÇIKGÖZ'e teşekkür ederim.

Pınar ORAL
Gümüşhane, 2018

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET	IV
SUMMARY	VII
TEŞEKKÜR	VIII
İÇİNDEKİLER.....	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ	XII
TABLolar DİZİNİ.....	XIII
1. GENEL BİLGİLER.....	2
1.1. Giriş	2
1.2. İki Boyutlu Zeeman Modeli	6
1.3. Üç Boyutlu Zeeman Modeli	6
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	7
2.1. İki Boyutlu Zeeman Modeli İçin Dallanma Analizi.....	7
2.2. Üç Boyutlu Zeeman Modeli için Dallanma Analizi.....	11
2.3. Zaman Gecikmeli Zeeman Modeli	16
2.4. İki boyutlu Zaman Gecikmeli Zeeman Modeli	17
2.4.1. Birinci Durum.....	17
2.4.2. İkinci Durum	20
2.5. Kesirli Mertebeden Zeeman Modelinin Kararlılık Analizi	29
2.6. Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi.....	31
2.7. Standart Beta Dağılımı Özellikleri	33
2.8. Beta Dağılımının Beklenen Değeri	34
2.9. İki Boyutlu Rastgele Zeeman Modelinin Beklenen Değer ve Varyansı	34
2.10. Laplace Padé Tekniği	37
2.11. İki Boyutlu Zeeman Modeli İçin Varyans.....	42
2.12. Sadece Y_0 ve Y_1 Başlangıç Şartlarına Bağlı Rastgele Zeeman Modeli için Beklenen Değer	42
2.13. Sadece T Parametresinin Rastgele Seçildiği Zeeman Modeli İçin Beklenen Değeri	43
2.14. Üç Boyutlu Zeeman Modeli	44
2.15. Üç Boyutlu Zeeman Modeli İçin Varyans	46
2.16. İki Ve Üç Boyutlu Stokastik Zeeman Kalp Atış Modeli.....	47

2.16.1.	Deterministik Sonuçlar.....	49
2.16.2.	İki boyutlu Stokastik Model	50
2.16.3.	Stokastik Sonuçlar	51
2.16.4.	Üç Boyutlu Zeeman Modeli İçin Deterministik Sonuçlar.....	53
2.16.5.	Üç Boyutlu Stokastik Zeeman Modeli	54
2.16.6.	Stokastik Sonuçlar	54
2.17.	İki ve Üç Boyutlu Zeeman Modelinin Rastgele Analizi	57
2.17.1.	Deterministik Sonuçlar.....	58
2.17.2.	İki Boyutlu Rastgele Model	59
2.17.3.	Rastgele Sonuçlar	60
2.17.4.	Deterministik Sonuçlar.....	63
2.17.5.	Üç Boyutlu Rastgele Model	64
2.17.6.	Rastgele Sonuçlar	65
3.	BULGULAR	69
4.	İRDELEME.....	70
5.	SONUÇLAR	71
6.	ÖNERİLER	73
7.	KAYNAKLAR.....	74
	ÖZGEÇMİŞ.....	74

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1.1.	Waller'in ilk EKG'si (1887).....	2
Şekil 1.2.	Willem Einthoven (soldan ikinci), çalışma arkadaşları, yabancı ülkelere gelen ziyaretçiler ve W.Einthoven 'in geliştirdiği EKG cihazıyla	2
Şekil 1.3.	Hastanın EKG'si çekilirken elleri ve bir ayağı su dolu kaptaki	3
Şekil 1.4.	EKG'deki P,Q,R,S,T dalgaları ve zaman aralıkları.....	5
Şekil 1.5.	Kalpde meydana gelen ritim bozukluğu.....	5
Şekil 1.6.	Dakikada 300 ve üzeri atan bir kalp	5
Şekil 2.1.	$xd = 0$ için iki boyutlu zeeman modelinin yön alanları ve faz portresi.....	9
Şekil 2.2.	$xd = 0.1$ için İki Boyutlu Zeeman modelinin yön alanları ve faz portresi....	10
Şekil 2.3.	$\tau_0 += 0.011$ için çözüm eğrileri	28
Şekil 2.4.	$\tau_1 += 1.2581$ için çözüm eğrileri	28
Şekil 2.5.	X_1 'in beklenen değerinin zamana bağlı değişimi	36
Şekil 2.6.	X_2 'in beklenen değerinin zamana bağlı değişimi	37
Şekil 2.7.	Modifiye DTM den elde edilen X_1 'in beklenen değerinin zamana bağlı değişimi.....	41
Şekil 2.8.	Modifiye DTM den elde edilen X_2 'in beklenen değerinin zamana bağlı değişimi.....	41
Şekil 2.9.	x_1, x_2 in deterministik sonuçları ve faz portesi	49
Şekil 2.10.	İki Boyutlu Zeeman Modeli İçin Euler-Maruyama Yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümler	51
Şekil 2.11.	İki Boyutlu Zeeman Modeli için Milstein yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümler	52
Şekil 2.12.	Üç boyutlu Zeeman modelinin çözümleri	53
Şekil 2.13.	Üç boyutlu Zeeman modeli için Euler - Maruyama Yöntemiyle yaklaşık çözümleri	54
Şekil 2.14.	Üç boyutlu zeeman modeli için Milstein yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümler	56
Şekil 2.15.	$xd = 0$ için x_1, x_2 nin deterministik sonuçları ve faz portresi	58
Şekil 2.16.	$xd = 0.41$ için x_1, x_2 nin deterministik çözümleri ve faz portresi	59

Şekil 2.17. Rastgele modelin çözüm eğrileri	60
Şekil 2.18. Rastgele modelin beklenen değerleri	61
Şekil 2.19. Rastgele modelin varyansları	62
Şekil 2.20. Rastgele modelin güven aralıkları	62
Şekil 2.21. Üç boyutlu Zeeman modelinin çözümleri	64
Şekil 2.22. Rastgele modelin çözüm eğrileri	65
Şekil 2.23. Rastgele modelin beklenen değerleri	66
Şekil 2.24. Rastgele modelin varyansları	67
Şekil 2.25. Rastgele modelin güven aralıkları	68



TABLÖLER DİZİNİ

Sayfa No

Tablo 1.1. (1) sistemindeki parametrelerin değerleri ve açıklamaları	6
Tablo 2.1. Deterministik çözümlerin ekstremum değerleri	50
Tablo 2.2. Çözümlerin uç değerleri	52
Tablo 2.3. Çözümlerin uç değerleri	52
Tablo 2.4. (3) Deterministik çözümlerin uç değerler	53
Tablo 2.5. Çözümlerin uç değerleri	55
Tablo 2.6. Çözümlerin uç değerleri	57
Tablo 2.7. $xd = 0$ için deterministic çözümlerin uç değerleri	58
Tablo 2.8. $xd = 0.41$ için deterministic çözümlerin uç değerleri	59
Tablo 2.9. Değişkenlerin uç değerleri	61
Tablo 2.10. Beklenen değerlerin uç değerleri	61
Tablo 2.11. Varyansların uç değerleri	62
Tablo 2.12. Güven aralıklarının uç değerleri	63
Tablo 2.13. (3) Denkleminin deterministik dözümlerinin uç değerleri	63
Tablo 2.14. Değişkenlerin uç değerleri	65
Tablo 2.15. Beklenen değerlerin uç değerleri	66
Tablo 2.16. Varyansların uç değerleri	67
Tablo 2.17. Güven aralıklarının uç değerleri	68

SEMBOLLER DİZİNİ

$E[X]$	: X rastgele değişkeninin beklenen değeri
$E[X^n]$	: X rastgele değişkeninin n.momenti
$Var[X]$	: X rastgele değişkeninin varyansı
$cov[X, Y]$	: X,Y rastgele değişkenlerinin kovaryansı
$B(a, b)$	: Beta fonksiyonu
$\lambda_{1,2}$	: Öz değerler
$J(A)$	: A nın Jakobien Matrisi

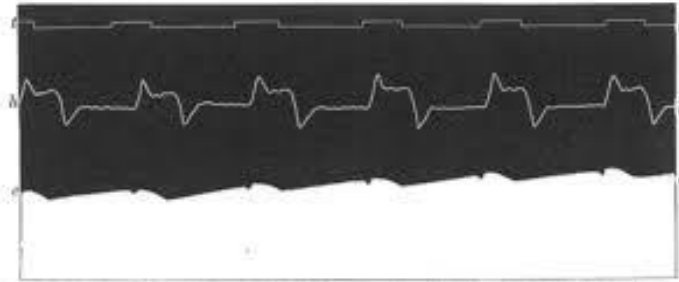
1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Elektrokardiyografi, kalp kasının ve sinirsel iletim sisteminin çalışmasını incelemek üzere kalpte meydana gelen elektriksel faaliyetin kaydedilmesidir. Bu kayıt ile elde edilen grafiğeelektrokardiyogram, kullanılan aletede elektrokardiyografi denir.

Elektrokardiyografi Hollanda'da geliştirilmiştir. EKG cihazını Hollandalı filozof ve doktor olan Willem Einthoven 1903'te Leiden Üniversitesinde geliştirdi ve bilime kattığı bu önemli alet adına 1924'te Nobel Tıp Ödülü almıştır.

Leiden şişesi 1744'te keşfedilince elektrik tıp alanına girmiştir. Tıp alanında elektriğin önemi çok eskilere dayanır. İngiltere kraliçesi I.Elizabeth'in doktoru W.Gilbert 1600'de statik elektrik hakkındaki ilk bilimsel kitabını yazmıştır. Statik elektriği muhafaza edebilen Leiden şişesi, 1744'te Hollanda'da keşfedilmiştir. Ardından Avrupalı doktorlar elektrikle ilgili deneyler yapmaya başlamıştır. İtalyan biyolog L.Gavani 1780'de öğrencilere kurbağa bacağına kaslarını göstermek amacıyla metal tabaktaki bacağı keserken, bacağın aniden kasıldığını gözlemlemiştir. Aynı yıl başka bir bilim adamı, elektrik yüklü bir Leiden şişesiyle ölü bir kurbağanın bacağının hareket ettiğini keşfetmiştir. Galvani, ölü bir kurbağa bacağında elektrik saklıdır fikrini öne sürmüştür. Hayvansal Elektrik adını verdiği bu konuda kitaplar yazmış ve meşhur olmuştur. İtalyan Fizik profesörü A.Volta, bacağı hareket ettiren elektriğin kurbağadan gelmediğini söyleyerek aksini iddia etmiş oldu. Bu olaya, bıçak ve metal tabağın farklı metallerden oluşunun sebep olduğunu kanıtladı. Volta 1800'de çinko ve bakır metalleri arasına tuzlu suyla ıslatılmış karton koyarak ilk elektrik pilini üretmiştir. Avrupa'da elektriğin bazı hastalıkları iyileştireceği ve ölüleri canlandıracağı fikrine inanan çoktu. İngiltere'de bir ölünün elektrikle dirilişini anlatan Frankenstein romanı 1818'de yazıldı ve filmlere konu oldu. [B.Mary, 2008].



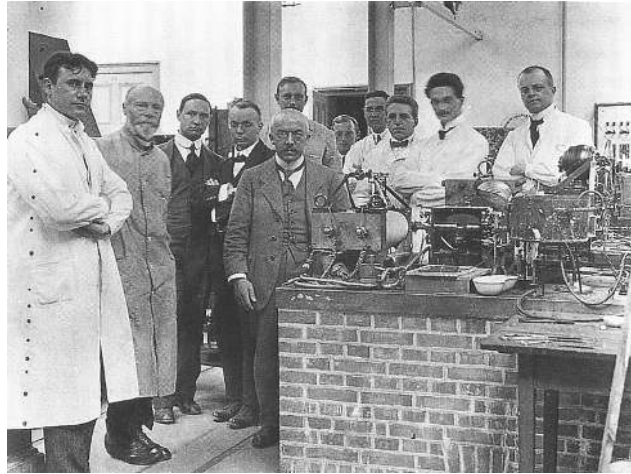
Şekil 1.1.Waller'in ilk EKG'si (1887)

EKG cihazının keşfinden önceki gelişmeleri ise şöyle açıklayabiliriz:

Galvanometre, elektrik akımındaki değişimin manyetik alan oluşturması prensibiyle çalışan bir tür test cihazıdır. Bir telden geçen elektrik akımının varlığını ve şiddetini gösteren bu cihazın icadı elektrokardiyografi cihazının keşfedilmesine yol açtı.

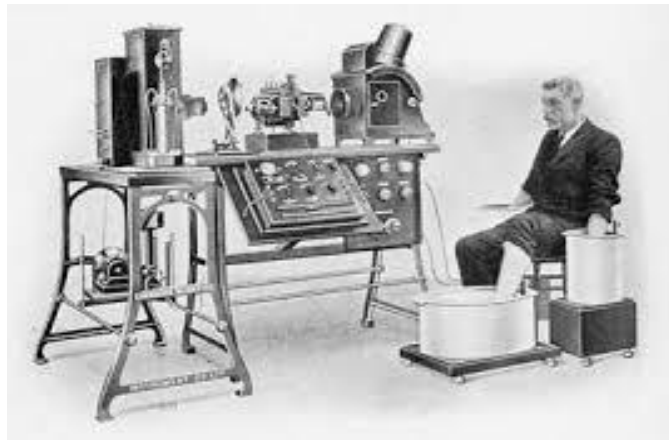
Galvanometrenin keşfinden önce Danimarkalı fizik ve kimya profesörü olan H.Oersted 1820’de tesadüfen bir keşif yaptı. Öğrencilere elektrikle ilgili bir deney yaparken kablonun yanında duran pusulanın, mıknatıstan yapılmış olan ibresi telden akım geçince saptı. Akım kesilince ibre normal yerine döndü. Böylece kablodan geçerken bir manyetik alan oluşturduğu için yakınındaki mıknatısı hareket ettirdiği ortaya çıkmış oldu. Bu fikirden faydalanarak aynı yıl Almanya’da pusulanın etrafına ince bir kablo sarılarak ilk galvanometre icat edilmiş oldu.

Galvanometre hızlı bir şekilde geliştirildi ve elektrik konusunda araştırma yapanlar için büyük ölçüde yardımcı bir cihaz oldu. Galvanometre’nin ileri düzey geliştirilmiş hale geldiği ülke ise İngiltere’dir. Hayvanların beyinde elektrik sinyallerinin varlığı, 1875’te yine İngiltere’de galvanometre yardımıyla ispatlandı. İngilizler sonraki yıl canlı bir kurbağanın kalbine kablolar bağlayıp, elektrik sinyalleri ürettiğini de galvanometre yardımıyla ispatladılar. [E.Esmeray, 2005].



Şekil 1.2. Willem Einthoven (soldan ikinci), çalışma arkadaşları, yabancı ülkelere gelen ziyaretçiler ve W.Einthoven’in geliştirdiği EKG cihazıyla.

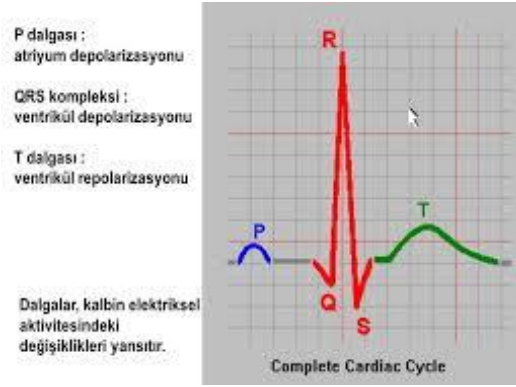
Kalp atışları sırasında insan kalbindeki voltaj değişikliklerini gözleyen ilk kişi İngiliz A.D.Waller'dir. Waller, 1887'de laboratuvarındaki teknisyenin elektrokardiyogramını çekmişti. Başka bir İngiliz doktor, kalpte üretilen elektrik sinyallerinin iki farklı dalga halinde olduğunu açıkladı. Bu dalgalar ileriki yıllarda QRS ve T olarak tanımlanmıştır. Bu elektrik sinyallerinden bir anlam çıkarmak güçtü. Oxford Üniversitesi'ndeki bilim adamları matematiksel yöntemlerle anlamsız sinyalleri sadeleştirmiştir. Bu sayede doktorların sinyalleri parazitsiz dalga formunda elde etmeleri sağlandı. Hollanda'da Leiden Üniversitesi'nde tıp profesörü olan W.Einthoven (1860-1927) Waller'in elektrokardiyografi denemeleri hakkındaki sunumunu seyretmişti. Konu ilgisini çektiği için Einthoven köpeğin EKG'lerini çekti. Galvanometreye bir yükseltici bağlayarak sinyalleri güçlendirdi. Elektriği iletebilmesi için köpeğin ayaklarını, tuzlu su dolu kaplara sokarak EKG çekiyordu. İnsanların EKG'lerini çekerken el ve ayaklarını tuzlu suya daldırıyordu. Hastanedeki hastaların EKG'sini çekebilmek için uzaktan bir sistem kurdu. Matematiksel olarak elektrik sinyallerindeki parazitleri yok ederek 5 farklı faz belirledi. Bu fazları P,Q,R,S ve T harfleriyle tanımladı. Einthoven A,B,C,D,E harflerini kullanmadı çünkü daha önce matematiksel düzeltme yapmadan elde ettiği sinyallerle bu harfleri vermişti. Bu nedenle alfabenin ikinci yarısındaki harfleri tercih etti. Bu harfler günümüzde de kullanılır. P kulakçıkların kasılması, QRS karıncıkların kasılması ve T karıncıkların gevşemesi sırasındaki sinyallerdir. O zamanlardaki cihazın ağırlığı 270 kilogramken, günümüzdeki cihazlar 1 kilogramdan daha hafiftir. Einthoven 1903'te cihazı daha kolay kullanılabilir hale getirdi. Zamanla daha da geliştirdi. Ardından seri üretimini ve ihraç edilmesini sağladı. EKG'yi geliştirip yaygınlaştırdığı için 1924'te Nobel Ödülü'nü kazandı. [U.Dinçer, 1997]



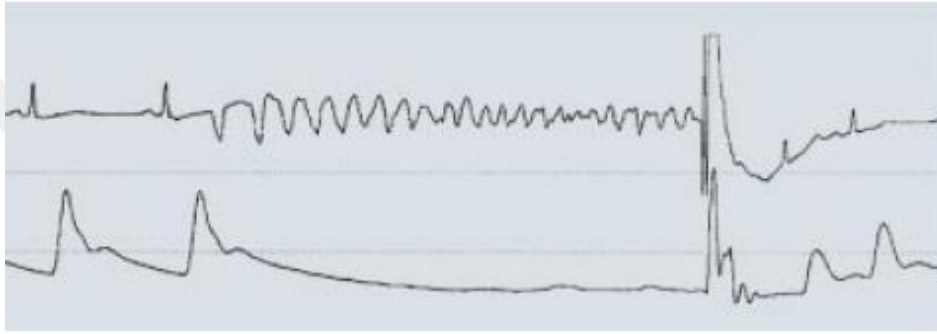
Şekil 1.3. Hastanın EKG'si çekilirken elleri ve bir ayağı su dolu kapta

Kalbin çalışma prensibi ile EKG'deki elektrik dalgalarının ilişkisi aşağıdaki gibi özetlenebilir.

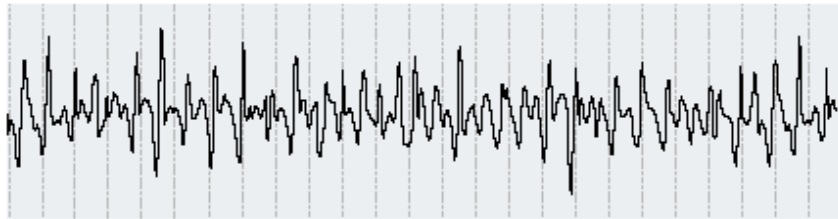
Kalp yaklaşık yumruk büyüklüğünde, vücutta dakikada yaklaşık beş litre kan pompalayan içi boş bir kastır. Bu pompalama görevini yerine getirmek üzere, sağlıklı bir insanda istirahat veya zorlanma durumlarına göre 60 ila 140 kez arasında atar. İnsan kalbi ortalama olarak günde 100.000 kez, yılda yaklaşık 40 milyon kez ve tüm yaşam boyunca yaklaşık 3 milyar kez atar. Kalbin iç kısmında sağ ve sol kalp olarak adlandırılan bölümler bulunur. Kalbin her iki yarısı da kulakçık ve karıncıklardan oluşur. Kalbin sağ tarafı kirli, koyu kırmızı kanı yeniden oksijenle zenginleştirerek kalbin sol yarısına gönderecek olan akciğere yollar. Kalbin sol kısmı temiz, açık kırmızı renkli kanı ana atar damara yollar ve organizmayı oksijenle besler. Kalp atışı, kulakçıkların ve karıncıkların ritmik olarak açılıp kapanması yoluyla gerçekleşir. Kalbin her kas lifi kendiliğinden kasılma kuvvetine sahiptir. Kas lifleri her biri kendi elektrik yüküne sahip kas hücrelerinden oluşur. Bu elektrik yükü sağlıklı insanlarda bir sinir ağı, yani sinüs düğümü tarafından üretilen elektriksel uyarılardan komut alır, yani düzene sokulur denebilir. Sinüs düğümünden gelen küçük elektriksel uyarılar, kalp atışını başlatır ve her bir evrenin seyrini düzenlerler. Uyarılar, sinüs düğümünden kalp kasının içine yerleşmiş iletme yeteneğine sahip bir doku aracılığıyla aktarılır. Bu dokunun adı uyarı iletim sistemidir. Uyarı iletim sistemi sağlıklı ise gelen tüm uyarılar en uzaktaki kalp kası hücresine kadar ulaşırlar. Bu da tüm kas liflerinin doğru ritimle kasılması ve yeniden gevşemesinin koşuludur. Elektrik sinyalleriyle kalp kasları kasılarak kan pompalanır. Kalp kasının en kalın olduğu nokta, pompalama işleminin en büyük bölümünden sorumlu olan sol karıncık civarındır. Kalbin kasılıp gevşemesi sırasındaki elektriksel değişimlerin kayıt edildiği çıktıya elektrokardiyogram denilir. Elektrokardiyogram, doktorlara kalbin ritim ve iletim bozukluğu, koroner yetmezliği, enfarktüs tanısı, kalp duvarında kalınlaşma, kalp pilinin işlevi, elektrolit dengesizliği gibi konularda bilgi verir. P, T, U dalgaları ve QRS kompleksindeki değişiklikler, dalgalar arasındaki sürelerdeki değişimler kalp hakkında ipuçları verir. Ancak bu sonuçlar kesin değildir. Doktorlar EKG sonuçları ve diğer tıbbi bulguları birlikte inceleyerek karar verir. Elektrokardiyografi, kalp hastalarının teşhisini kolaylaştırdı. Yaklaşık yüz yıldır erken teşhis sayesinde milyonlarca kişinin hayatını kurtardı. [K.M Gabriel, 2007]



Şekil 1.4. EKG'deki P,Q,R,S,Tdalgaları ve zaman aralıkları



Şekil 1.5. Kalpte meydana gelen ritim bozukluğu



Şekil 1.6. Dakikada 300 ve üzeri atan bir kalp

Zeeman Kalp atış modeli kalp döngüsünün bir benzerini oluşturmak için Afet Teorisinde yer alan çalışmada kullanılmıştır. Kalp uzay evresinde mavi bir döngü olarak temsil edilir ve yeşildöngüler olarak temsil edilen kalbin ritmik genişlemesinden kalbin kasılmasına hareket eder. Kalp kas lifi (x_1) y ekseninde temsil edilir ve elektrokimyasal aktivite (x_2) x ekseninde temsil edilir. Model dakikada kalp atış hızını ve kalp piline bağlı olan gamma (x_d) olarak adlandırılan bir değişkeni hesaplamaktadır.

Model, kullanıcıya kalp atış hızının nasıl etkilendiğini görmek için kalbin ritmik genişlemesinin ve kalbin kasılmasının konumunu ve kas tansiyonunu içeren birkaç çeşit değişkeni ayarlamaya müsaade etmektedir.

İlk olarak bu tez çalışmasında üzerinde çalıştığımız iki ve üç boyutlu Zeeman modellerini ele alalım.

1.2. İki Boyutlu Zeeman Modeli

İki boyutlu Zeeman kalp atış modeli aşağıdaki gibi verilmiştir. (E.C. Zeeman, 1972a):

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= -\frac{1}{\varepsilon}(x_1(t)^3 - Tx_1(t) + x_2(t)) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= x_1(t) - x_d\end{aligned}\tag{1}$$

Burada değişkenler; x_1 kalp kas lifinin uzunluğu, x_2 kalp kas lifinin kasılmasını kontrol eden bir uyarıcıdır ve t bağımsız değişkeni de dakikayı göstermektedir. Modelin parametreleri aşağıdaki gibi Tablo 1.1'de gösterilmiştir. (E.C. Zeeman, 1972a, 1972b, 1977)

Tablo 1.1. (1) sistemindeki parametrelerin değerleri ve açıklamaları

Parametre	Açıklama	Değer
ε	Zamana bağlı sabit	0.2
T	Kalpdeki tansiyon	0.5
x_d	Tipik gevşemiş lif uzunluğu	0, 0.41

(1) Sistemindeki denklemlerin başlangıç şartları aşağıdaki gibidir. (E.C. Zeeman, 1972a, 1972b, 1977):

$$x_1(0) = 0.5; x_2(0) = 0.$$

1.3. Üç Boyutlu Zeeman Modeli

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -x_1^3 - x_2x_1 - x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\beta x_1 - \delta x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_3 - \theta\end{aligned}\tag{2}$$

Başlangıç şartları $x_1(0) = -0.8, x_2(0) = -1.1, x_3(0) = 0.1$ olan ve $\beta = 2, \delta = 2$ ve $\theta = 1$ katsayılarına sahip denklem sistemi olarak tanımlanmaktadır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde tez çalışmalarında kullanılacak olan iki ve üç boyutlu Zeeman modelinin kararlılık analizi, modele gecikme terimi ilave edilerek yapılan analizler, kesirli mertebeden türevin kararlılık analizi, stokastik analiz ve stokastik denklemin çözümleri ve bu çözümlerin Euler-Maruyama, Milstein yöntemleriyle elde edilen simülasyonları ve tabloları verilecektir. Ayrıca denkleme rastgele etkiler de eklenerek gerekli simülasyonlar ve tablolar verilecektir.

2.1. İki Boyutlu Zeeman Modeli İçin Dallanma Analizi

İlk önce (1) denkleminin $T > 0$ ve $x_d = 0$ değerleri için denge noktasını bulalım. Denklem sisteminin sağ tarafını sıfıra eşitleyelim.

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon}(x_1^3 - Tx_1 + x_2) = 0$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_d = 0$$

Buradan $x_d = 0$ iken $x_1 = 0$ ve $x_2 = 0$ yani $(0,0)$ sisteminin denge noktasıdır.

Sistem lineerleştirilirse; yani

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon}(x_1^3 - Tx_1 + x_2) = f(x_1, x_2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_d = g(x_1, x_2)$$

seçilirse;

$$J \frac{\partial(f,g)}{\partial(x_1,x_2)} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3x_1^2}{\varepsilon} + \frac{T}{\varepsilon} & \frac{-1}{\varepsilon} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_0(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{T}{\varepsilon} & \frac{-1}{\varepsilon} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindeki matrisi elde edilir. Burada öz değerleri bulmak için ilk önce $\text{iz}(J_0)$ ı bulalım.

$$\text{iz}(J_0) = \frac{T}{\varepsilon}, \det(J_0) = 1/\varepsilon$$

Özdeğerleri yani λ_1 ve λ_2 yi bulmak için aşağıdaki formülü verelim:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\text{iz}(J_0) \pm \sqrt{\text{iz}(J_0)^2 - 4\det(J_0)}}{2}$$

Bu formülde istenenler yerine yazılırsa;

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{T}{\varepsilon} \pm \sqrt{\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)^2 - \frac{4}{\varepsilon}}}{2}$$

elde edilir. Buradan;

$$\Delta = \left(\frac{T}{\varepsilon}\right)^2 - \frac{4}{\varepsilon} = 0$$

Olarak alındığında;

$$1) \Delta = 0 \text{ iken } \lambda_{1,2} = \frac{T}{2\varepsilon}$$

Buradan alınız ki $\lambda_{1,2} > 0$, *kararsız, itici özgün olmayan düğüm noktasıdır.*

$$2) \Delta > 0 \text{ yani } \left(\frac{T}{\varepsilon}\right)^2 - \frac{4}{\varepsilon} > 0 \text{ ise } \frac{T^2}{\varepsilon^2} > \frac{4}{\varepsilon} \text{ ise } T^2 > 4\varepsilon \text{ ise } T > 2\sqrt{\varepsilon} \text{ ise}$$

$$\lambda_1 > 0 \text{ ve } \lambda_2 < 0$$

olur ve bu durumda kararsız semer noktası olur.

$$3) \Delta < 0 \text{ ise } \left(\frac{T}{\varepsilon}\right)^2 - \frac{4}{\varepsilon} < 0 \text{ ise } \frac{T^2}{\varepsilon^2} < \frac{4}{\varepsilon} \text{ ise } T^2 < 4\varepsilon \text{ ise } T < 2\sqrt{\varepsilon} \text{ ise}$$

$$\lambda_1 = \frac{T}{\varepsilon} + \sqrt{-\Delta}i, \lambda_2 = \frac{T}{\varepsilon} - \sqrt{-\Delta}i$$

Yani $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta (\beta \neq 0)$ durumunda

- a) $\alpha > 0$ itici sarmal nokta kararsız
- b) $\alpha = 0$ kararlı merkez nokta
- c) $\alpha < 0$ asimptotik kararlı çekici sarmal nokta.

elde edilir.

Literatürde mevcut olan modelde kullanılan parametre değerleri seçilirse; bunlar

$T = 0.5, \varepsilon = 0.1$ için $(0,0)$ noktasında lineerleştirilmiş sistem

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

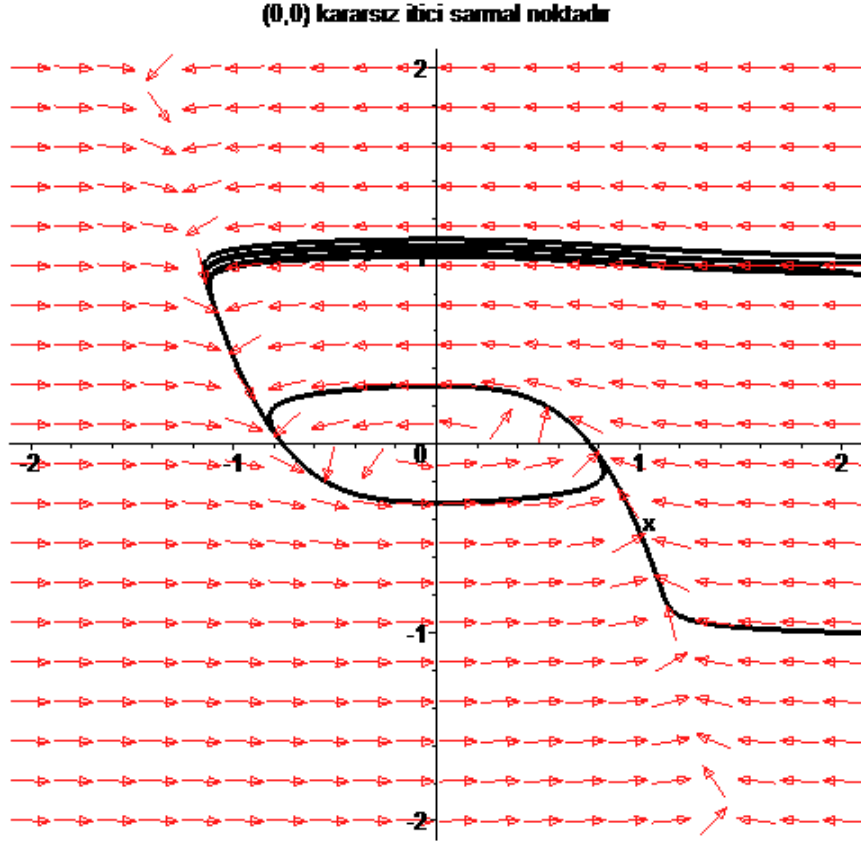
bulunur.

Bu sistemin özdeğerleri;

$$\lambda_1 = 2.5 + 1.9365i$$

$$\lambda_2 = 2.5 - 1.9365i$$

- d) Şeklindedir ve $\alpha > 0$ itici sarmal nokta kararsızdır.



Şekil 2.1. $x_d = 0$ için iki boyutlu zeeman modelinin yön alanları ve faz portresi

İkinci olarak $T > 0$ ve $x_d \neq 0$ için (1) sisteminin kararlılığını inceleyelim.

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{\epsilon}(x_1^3 - Tx_1 + x_2) \quad (1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_d$$

denklemini ele alalım. $x_d \neq 0$ olsun. Bu durumda sistemin denge noktası;

$$x_1 - x_d = 0 \text{ ise } x_1 = x_d$$

$$-\frac{1}{\epsilon}(x_1^3 - Tx_1 + x_2) = 0 \text{ ise } x_1^3 - Tx_1 + x_2 = 0$$

olur. Buradan $x_2 = (-x_d^3 + Tx_d)$ olur. O halde (1) sisteminin denge noktası,

$$E_1(x_d, (-x_d^3 + Tx_d)) = E(x_d, Tx_d - x_d^3)$$

olur. (1) sisteminin kararlılığını araştırmak için öncelikle Jakobiyen matrisini bulalım.

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{\epsilon}(x_1^3 - Tx_1 + x_2) = f(x_1, x_2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_d = g(x_1, x_2)$$

E_1 denge noktasında (1) sisteminin Jacobien matrisi

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\epsilon}x_d^2 + \frac{T}{\epsilon} & -\frac{1}{\epsilon} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Karakteristik denklem,

$$|J(E_1) - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\frac{3}{\epsilon}x_d^2 + \frac{T}{\epsilon} - \lambda & -\frac{1}{\epsilon} \\ 1 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \left(\frac{3}{\epsilon}x_d^2 - \frac{T}{\epsilon}\right)\lambda + \frac{1}{\epsilon} = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{-\left(\frac{3}{\epsilon}x_d^2 - \frac{T}{\epsilon}\right) + \sqrt{\left(\frac{3}{\epsilon}x_d^2 - \frac{T}{\epsilon}\right)^2 - \frac{4}{\epsilon}}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-\left(\frac{3}{\epsilon}x_d^2 - \frac{T}{\epsilon}\right) - \sqrt{\left(\frac{3}{\epsilon}x_d^2 - \frac{T}{\epsilon}\right)^2 - \frac{4}{\epsilon}}}{2}$$

$$T = 0.5, \epsilon = 0.1, x_d = 0.1$$

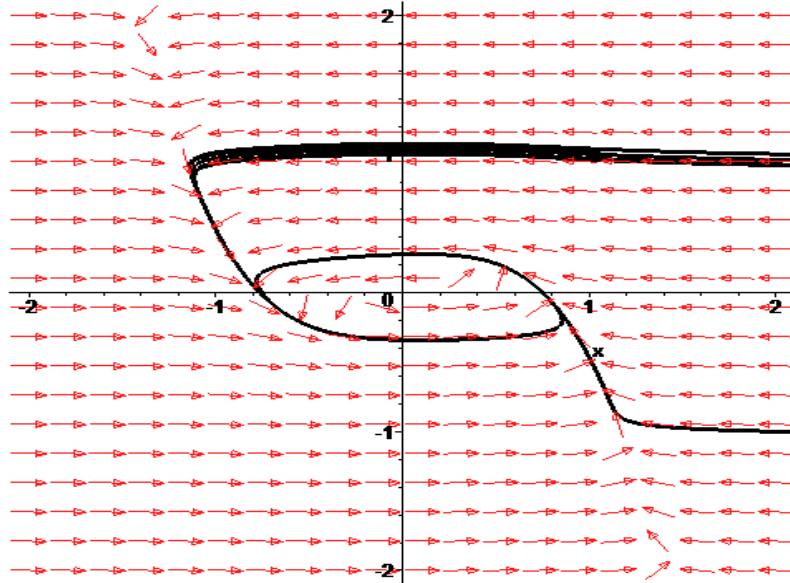
değerleri için;

$$\lambda_1 = 2.35 + 2.1160i$$

$$\lambda_2 = 2.35 - 2.1160i$$

şeklindedir ve $\alpha > 0$ itici sarmal nokta kararsızdır.

(0.1,0.049) kararsız itici sarmal noktadır



Şekil 2.2. $x_d = 0.1$ için İki Boyutlu Zeeman modelinin yön alanları ve faz portresi

Aşağıda üç boyutlu Zeeman modeli için kararlılık analizi yapılmaktadır.

2.2. Üç Boyutlu Zeeman Modeli için Dallanma Analizi

Başlangıç şartları $x_1(0) = -0.8, x_2(0) = -1.1, x_3(0) = 0.1$ olan ve $\beta = 2, \delta = 2$ ve $\theta = 1$ katsayılarına sahip (2) denklemini alalım. Sistemin denge noktalarını aşağıdaki gibi bulalım.

a) $\theta = 0$ için (2) sisteminin denge noktaları;

$$x_3' = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

dır.

$$x_2' = 0 \text{ olduğundan } -\beta x_1 - \delta x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{\beta}{\delta} x_1$$

olur.

$$x_1' = 0 \text{ ise } -x_1^3 - x_1 x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow -x_1^3 + \frac{\beta}{\delta} x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1^2 \left(-1 + \frac{\beta}{\delta} x_1 \right) = 0$$

olur. Buradan;

$$x_1 = 0, x_1 = \frac{\delta}{\beta}$$

bulunmuş olur. Bu durumda (2) sisteminin denge noktaları;

$$E_0(0,0,0), E_1\left(\frac{\delta}{\beta}, -1, 0\right)$$

olarak bulunmuş olur.

Önerme 1 : E_0 denge noktası, $\beta = 2, \delta = 2$ ve $\theta = 1$ değerleri için asimptotik kararsızdır.

İspat : (2) denkleminin Jakobiye matrisi;

$$J_0 = \begin{pmatrix} -3x_1^2 - x_2 & -x_1 & -1 \\ -\beta & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Matriste E_0 denge noktasını yerine koyalım. Bu durumda;

$$J_0(E_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\beta & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jakobiye matrisin karakteristik denklemi;

$$|J_0 - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ -\beta & -\delta - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

olur.

3.satıra göre açılırsa;

$$\begin{aligned} &= (1 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ -\beta & -\delta - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow (1 - \lambda)(\lambda^2 + \beta\lambda) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda^2 + \lambda\delta - \lambda^3 - \lambda^2\delta = 0 \\ &\Rightarrow -\lambda^3 + (1 - \delta)\lambda^2 + \lambda\delta = 0 \\ &\Rightarrow \lambda^3 + (\delta - 1)\lambda^2 - \lambda\delta = 0 \end{aligned}$$

Burada

$$\delta - 1 = A_1$$

$$-\delta = A_2$$

$$0 = A_3$$

olur.

$$A_1 A_2 - A_3 > 0 \text{ olmalı.}$$

$$\beta = 2, \delta = 2 \text{ için } A_1 = 1, A_2 = -2, A_3 = 0$$

olur.

$$\text{i) } A_1, A_2, A_3 > 0$$

$$\text{ii) } A_1 A_2 - A_3 > 0$$

Routh-Hurwitz şartlarını sağlamadığından E_0 denge noktası kararsızdır.

Routh-Hurwitz Kriteri

$i = 1, \dots, n$ polinom katsayıları (a_i) gerçel sabitler olan

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

polinomu veriliyor.

Karakteristik polinomun katsayıları (a_i) kullanılarak; her $j > n$ için $a_j = 0$ koşulunu sağlayan Hurwitz matrisleri aşağıdaki gibi tanımlanıyor.

$$H_1 = (a_1), H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}$$

ve

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

dır.

polinomun bütün köklerinin negatif olması ya da köklerin gerçel kısımlarının negatif değer alması, yalnız ve yalnız bütün Hurwitz matrislerinin determinant değerleri pozitif değer aldığında gerçekleşir.

$$\det H_j > 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

n=2 değeri için Routh-Hurwitz Kriteri aşağıdaki şekilde sadeleştirilebilir:

$$\det H_1 = a_1 > 0 \text{ ve } \det H_2 = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = a_1 a_2 > 0$$

veya daha basit şekilde

$a_1 > 0$ ve $a_2 > 0$ olarak yazılabilir.

n= 2,3,4 ve 5 için dereceden polinomlar için, Routh-Hurwitz Kriteri şöyle özetlenebilir:

n = 2,3,4 ve 5 için Routh-Hurwitz Kriteri;

$$n = 2: a_1 > 0 \text{ ve } a_2 > 0$$

$$n = 3: a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0 \text{ ve } a_1 a_2 > a_3$$

$$n = 4: a_1 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0 \text{ ve } a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$$

$$n = 5: a_i > 0 \text{ } i = 1, 2, 3, 4, 5, a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4,$$

$$(a_1 a_4 - a_5)(a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4) > a_5(a_1 a_2 - a_3)^2 + a_1 a_5^2$$

olur.

Routh-Hurwitz Kriterinin ispatı için Gantmacher(1964)'e bakılabilir. Teorem n=2 durumu için ispatlanmıştır.

Önerme 2 : (2) denklemi için E_1 denge noktası, $\beta = 2, \delta = 2$ ve $\theta = 1$ değerleri için asimptotik kararsız olur.

İspat : (2) denkleminin Jakobiyen matrisi;

$$J_1 = \begin{pmatrix} -3x_1^2 - x_2 & -x_1 & -1 \\ -\beta & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Matriste E_0 denge noktasını yerine koyalım. Bu durumda;

$$J_1(E_1) = \begin{pmatrix} \frac{-3\delta^2}{\beta^2} - 1 & \frac{-\delta}{\beta} & -1 \\ -\beta & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jakobiyen matrisin karakteristik denklemi;

$$|J_1 - \lambda I| = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \frac{-3\delta^2}{\beta^2} - 1 - \lambda & \frac{-\delta}{\beta} & -1 \\ -\beta & -\delta - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

olur. 3.satıra göre açılırsa;

$$\begin{aligned} &= (1 - \lambda) \begin{vmatrix} \frac{-3\delta^2}{\beta^2} - 1 - \lambda & \frac{-\delta}{\beta} \\ -\beta & -\delta - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 + \left(\delta + \frac{3\delta^2}{\beta^2} + 1\right)\lambda + \frac{3\delta^3}{\beta^2} + \delta - \delta) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 + \left(\delta + \frac{3\delta^2}{\beta^2} + 1\right)\lambda + \frac{3\delta^3}{\beta^2}) \end{aligned}$$

Burada;

$$\delta + \frac{3\delta^2}{\beta^2} + 1 = C \text{ ve } \frac{3\delta^3}{\beta^2} = D \text{ denirse;}$$

$$\lambda^3 + \lambda^2 C + \lambda D - \lambda^2 - C\lambda - D = 0$$

$$\lambda^3 + (C - 1)\lambda^2 + (D - C)\lambda - D = 0$$

olur. Burada

$$C - 1 = A_1$$

$$D - C = A_2$$

$$-D = A_3$$

dersek;

Routh Hurwitz Kriterinden;

$$A_1 A_2 - A_3 > 0 \text{ olmalı.}$$

$$\beta = 2, \delta = 2 \text{ için } A_1 = 5, A_2 = 0, A_3 = -6$$

olur.

$$\text{i) } A_1, A_2, A_3 > 0$$

$$\text{ii) } A_1 A_2 - A_3 > 0$$

şartlarını sağlamadığından E_1 denge noktası kararsızdır.

b) $\theta \neq 0$ için sistemin kararlılığını inceleyelim.

$$x_3' = 0 \text{ ise } x_3 = \theta$$

$$x_1' = 0 \text{ ise } -x_1^3 - x_1 x_2 - \theta = 0$$

$$x_2' = 0 \text{ ise } -\beta x_1 - \delta x_2 = 0 \text{ ise } x_2 = -\frac{\beta}{\delta} x_1$$

olur.

$$-x_1^3 + \frac{\beta}{\delta} x_1^2 - \theta = 0$$

denkleminde ve $\beta = 2, \delta = 2$ ve $\theta = 1$ olduğundan;

$$-x_1^3 + x_1^2 - 1 = 0$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin kökleri bulunursa; sistemin denge noktası

$E_2(-0.7549, 0.7549, 1)$ olarak bulunmuş olur.

Önerme 3 : (2) denklemin için E_2 denge noktası, $\beta = 2, \delta = 2$ ve $\theta = 1$ değerleri için asimptotik kararsız olur.

İspat : (2) denkleminin Jakobiyen matrisi;

$$J_1 = \begin{pmatrix} -3x_1^2 - x_2 & -x_1 & -1 \\ -\beta & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Matriste E_2 denge noktasını yerine koyalım. Bu durumda;

$$J_1(E_1) = \begin{pmatrix} -0.18502599 & 0.7549 & -1 \\ -\beta & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jakobiyen matrisin karakteristik denklemi;

$$|J_2 - \lambda I| = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} -0.18502599 - \lambda & 0.7549 & -1 \\ -\beta & -\delta - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

olur. 3.satıra göre açılırsa;

$$=(1 - \lambda) \begin{vmatrix} -0.18502599 - \lambda & 0.7549 \\ -\beta & -\delta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$-\lambda^3 + (0.8150 - \delta)\lambda^2 + (0.1850 + 0.8150\delta - 0.0755\beta)\lambda + 0.0755\beta + 0.8150\delta = 0$$

olur.

Burada

$$(0.8150 - \delta) = A_1$$

$$0.1850 + 0.8150 \delta - 0.0755\beta = A_2$$

$$0.0755\beta + 0.8150\delta = A_3$$

dersek;

Routh Hurwitz Kriterinden;

$A_1 A_2 - A_3 > 0$ olmalı.

Aynı zamanda

i) $A_1, A_2, A_3 > 0$

ii) $A_1 A_2 - A_3 > 0$

şartlarını sağlamadığından E_2 denge noktası kararsızdır.

2.3. Zaman Gecikmeli Zeeman Modeli

Bir fiziksel olayı adi veya kısmi diferansiyel denklem yardımıyla tanımlamış olmak, o olayın gelecekteki durumunu geçmiş durumundan bağımsız kalarak hesaplamak demektir. Hâlbuki gerçek durum böyle değildir. Pek çok fiziksel olayda bir sistemin şu anki durumu geçmiş durumuna bağlı kalınarak ifade edilir. Bir olayın tarihsel gelişimi ile birlikte ele alınarak modellenmesi halinde gecikmeli diferansiyel denklem olarak adlandırılan başka bir denklem sınıfı elde edilmiş olur. Aşağıdaki denklemler gecikmeli diferansiyel denklemler için birer örnektir.

$$x_1'(t) = 5x(t-4) - x(t-2)$$

$$x_1''(t-1) + x_1'(t) - x(t-3) = 0$$

$$x_1'(t) = 5x\left(\frac{t}{2}\right) - 2x\left(\frac{t}{4}\right)$$

Bu örneklerden de görüleceği gibi, bir gecikmeli diferansiyel denklem bilinmeyen fonksiyon ve onun en yüksek türev hariç türevlerini farklı gecikme argümentlerine bağlı kılan bir diferansiyel denklemdir. Bu tür bir denkleme literatürde ilk kez onsekizinci yüzyılın ikinci yarısında rastlanmasına rağmen gecikmeli diferansiyel denklemler 1950 yılından sonra A.D. Myshkis, E.M.Wright, R.Bellman tarafından sistematik olarak incelenmeye başlanmıştır. Daha sonraki yıllarda L.E. El'sgol'ts, N.N. Krasovskii, J.K. Hale ve diğerlerinin yaptıkları çalışmalar bu teoremin gelişimini hızlandırmıştır. Gecikmeli diferansiyel denklemlerin fiziksel ve biyolojik sistemlerde birçok uygulama alanına sahip olması da bu teoriyi matematiğin en hızlı gelişen dallarından biri haline getirmiştir.

(1) modeline farklı durumlar için sabit Zeeman gecikmesi eklenerek aşağıdaki gibi ele alınacaktır.

2.4. İki boyutlu Zaman Gecikmeli Zeeman Modeli

2.4.1. Birinci Durum

Eğer τ zaman gecikme terimi (1) sisteminde ikinci terime eklenirse;

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -\frac{1}{\varepsilon}(x_1(t)^3 - Tx_1(t) + x_2(t - \tau)) \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1(t) - x_d.\end{aligned}\tag{3}$$

şeklinde (3) denklemi oluşturulur.

Burada $x_d \neq 0$ olsun. Kabul edelim ki $Q(x_{1_0}, x_{2_0})$ (3) denkleminin pozitif denge noktası olsun. Aşağıdaki gibi Q denge noktasında (3) sistemini lineerleştirelim:

Kabul edelim ki $u(t) = x_1(t) - x_{1_0}, v(t) = x_2(t) - x_{2_0}$

olsun. O halde;

$$\frac{du}{dt} = \frac{dx_1}{dt} \text{ ve } \frac{dv}{dt} = \frac{dx_2}{dt}$$

şeklinde değişken değişimi yapılırsa f ve g fonksiyonları

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2) &= -\frac{1}{\varepsilon}(x_1^3 - Tx_1 + x_2(t - \tau)) \\ g(x_1, x_2) &= (x_1 - x_d)\end{aligned}$$

şeklinde seçilirse;

(3) sistemini $Q(x_{1_0}, x_{2_0})$ noktasında lineerleştirelim;

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(Q^*)u(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(Q^*)v(t - \tau) \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial x_1}(Q^*)u(t) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(Q^*)v(t),\end{aligned}\tag{4}$$

olmak üzere gerekli işlemler yapılırsa (4) sistemi

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\varepsilon}(3x_{1_0}^2 - T)u(t) + \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)v(t - \tau) \\ \frac{dv}{dt} &= u(t).\end{aligned}\tag{5}$$

şeklinde (5) sistemine dönüşür. (5) sisteminin karakteristik denklemi

$$\Delta(\lambda, \tau) = \det(\lambda I - A_0 - \Sigma_{j=1}^1 A_j e^{-\lambda \tau_j}) \text{ şeklindedir.}$$

Burada

$$A_0 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\varepsilon} x_{1_0}^2 + \frac{T}{\varepsilon} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1/\varepsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dır. Bu yüzden,}$$

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda, \tau) &= \det \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{3}{\varepsilon} x_{1_0}^2 + \frac{T}{\varepsilon} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-\lambda \tau} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda + \frac{3}{\varepsilon} x_{1_0}^2 - \frac{T}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} e^{-\lambda \tau} \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dır.

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \left(\frac{3}{\varepsilon} x_{1_0}^2 - \frac{T}{\varepsilon} \right) \lambda + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\lambda \tau} = 0 \quad (6)$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + ce^{-\lambda \tau}. \quad (7)$$

Burada

$$a = \frac{3}{\varepsilon} x_{1_0}^2 - \frac{T}{\varepsilon}, c = \frac{1}{\varepsilon}.$$

dır. (7) denkleminin karakteristik denklemi $\tau = 0$ için

$$\lambda^2 + a\lambda + c = 0 \quad (8)$$

dır ve (8) denkleminin kökleri

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4c}}{2} \quad (9)$$

(H1) $a = 0$ için $\lambda_1 = -i\sqrt{c}$ and $\lambda_2 = i\sqrt{c}$. Bu yüzden,

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{c}$$

O halde, $a = 0$ için $Q(x_{1_0}, x_{2_0})$ denge noktası kararlı merkez nokta olur.

(H2) $a < 0$ için özdeğerler $\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4c}}{2}$ and $\lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4c}}{2}$ olarak bulunur. Bu yüzden

Hence $a = 0$ için $\lambda_{1,2} = \pm i\beta, \beta \neq 0$ olduğundan kararlıdır.

Bu yüzden $a \in R$ için sistemi genelleştirirsek Q denge noktası $\lambda_{1,2} = \pm i\beta, \beta \neq 0$ dır ve kararlı denge noktası olur.

Eğer

$$(H3) a > 0$$

$$(H4) c > 0$$

ise (8) denkleminin tüm kökleri negative reel kısma sahiptir.

(7) karakteristik denkleminde $\tau \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda (7) karakteristik denkleminin kökleri $\lambda = i\bar{w}, \bar{w} > 0$ olur. (7) denkleminde λ nın değerlerini yazarsak;

$$e^{-\lambda\tau} = e^{-i\bar{w}\tau} = \cos(\bar{w}\tau) - i\sin(\bar{w}\tau)$$

denkleminden yararlanarak

$$(i\bar{w})^2 + ai\bar{w} + c[\cos(\bar{w}\tau) - i\sin(\bar{w}\tau)] = 0.$$

bulunur. Buradan da

$$-\bar{w}^2 + ai\bar{w} + c\cos(\bar{w}\tau) - cisin(\bar{w}\tau) = 0 \quad (10)$$

denklemini elde ederiz.

(10) denkleminin reel ve sanal kısımlarını ayrı ayrı ele alırsak;

$$-\bar{w}^2 + c\cos(\bar{w}\tau) = 0 \quad (11)$$

ve

$$a\bar{w} - csin(\bar{w}\tau) = 0 \quad (12)$$

dır. Sonra gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\cos(\bar{w}\tau) = \frac{\bar{w}^2}{c}, \sin(\bar{w}\tau) = \frac{a\bar{w}}{c} \quad (13)$$

bulunur.

(12) denkleminin her iki tarafından kare alınırsa;

$$\bar{w}^4 + a^2\bar{w}^2 - c^2 = 0 \quad (14)$$

olur.

(14) denkleminin kökleri

$$\bar{w}^2 \pm = \frac{-a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4c^2}}{2} \quad (15)$$

şeklinde bulunur. Bu yüzden (14) denklemini pozitif ve negative köklere sahiptir. Şimdi aşağıdaki gibi τ_k değerlerini bulmalıyız. (13) den;

$$\tan(\bar{w}\tau_k) = \frac{\sin(\bar{w}\tau)}{\cos(\bar{w}\tau)} = \frac{\frac{a\bar{w}}{c}}{\frac{\bar{w}^2}{c}} = \frac{a}{\bar{w}} \quad (16)$$

olur ve (16) denkleminin her iki tarafından $\tan^{-1}$ alınırsa;

$$\bar{w}\tau_k = \tan^{-1}\left(\frac{a}{\bar{w}}\right) + 2k\pi, k = 0,1,2 \dots \quad (17)$$

$$\tau_k = \frac{1}{\bar{w}} \tan^{-1}\left(\frac{a}{\bar{w}}\right) + \frac{2k\pi}{\bar{w}} k = 0,1,2 \dots \quad (18)$$

bulunur.

Örnek: Bu yüzden $\varepsilon = 0.2, T = 0.5, x_d = 0.41$ parametreleri ile (3) sistemi düşünülürse, (3) sisteminin pozitif denge noktası, $(0.41, 0.136079)$. $\tau = 0$ için (3) sisteminin jakobiyen matrisinin $(0.41, 0.136079)$ noktasındaki özdeğerleri $\{-0.7482 + 2.1072i, -0.7482 - 2.1072i\}$ bulunur. Dikkat edilirse kompleks eşlenik özdeğerlerin reel kısımları negatif olduğundan $(0.41, 0.136079)$ denge noktası kararlı olur.

$\tau = 0$ olduğunda,

$$a = 0.0215$$

bulunur. a değeri kullanılarak $\bar{w}_+^2$ ve τ değerleri belirlenemez.

2.4.2. İkinci Durum

(1) denkleminde, gecikme terimi ikinci denklemdeki birinci terime yerleştirilirse;

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon}(x_1^3 - Tx_1 + x_2(t)) \quad (19)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1(t - \tau) - x_d$$

sistemi elde edilir. Burada $x_d \neq 0$ olsun. Kabul edelimki $Q(x_{1_0}, x_{2_0})$ (19) sisteminin denge noktası olsun. Sistemi Q noktasında aşağıdaki gibi lineerleştirelim.

Kabul edelim ki

$$u(t) = x_1(t) - x_{1_0}, v(t) = x_2(t) - x_{2_0} \text{ olsun, o zaman } \frac{du}{dt} = \frac{dx_1}{dt} \text{ ve } \frac{dv}{dt} = \frac{dx_2}{dt}$$

$f(x_1, x_2) = -\frac{1}{\varepsilon}(x_1^3 - Tx_1 + x_2(t))$ ve $g(x_1, x_2) = x_1(t - \tau) - x_d$

seçilmiş olsun. Bu yüzden, $Q(x_{1_0}, x_{2_0})$ noktasında (19) sistemini lineerleştirirsek;

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(Q^*)u(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(Q^*)v(t) \quad (20)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x_1}(Q^*)u(t - \tau) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(Q^*)v(t),$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon}(3x_{1_0}^2 - T)u(t) + \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)v(t) \quad (21)$$

$$\frac{dv}{dt} = u(t - \tau).$$

(21) sisteminin karakteristik denklemi

$$\Delta(\lambda, \tau) = \det(\lambda I - A_0 - \Sigma_{j=1}^1 A_j e^{-\lambda \tau j}),$$

şeklindedir ve burada

$$A_0 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\varepsilon}x_{1_0}^2 + \frac{T}{\varepsilon} & -1/\varepsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{dır. Bu yüzden;}$$

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda, \tau) &= \det \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{3}{\varepsilon}x_{1_0}^2 + \frac{T}{\varepsilon} & -\frac{1}{\varepsilon} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e^{-\lambda \tau} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda + \frac{3}{\varepsilon}x_{1_0}^2 - \frac{T}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} \\ -e^{-\lambda \tau} & \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \left(\frac{3}{\varepsilon}x_{1_0}^2 - \frac{T}{\varepsilon}\right)\lambda + \frac{1}{\varepsilon}e^{-\lambda \tau} = 0 \quad (22)$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + ce^{-\lambda \tau} = 0 \quad (23)$$

Burada $a = \frac{3}{\varepsilon}x_{1_0}^2 - \frac{T}{\varepsilon}$, $c = \frac{1}{\varepsilon}$ olarak seçilmiştir.

(7) denklemi için de aynı işlemleri yapmıştık.

(20) denkleminin $\tau = 0$ için karakteristik denklemi

$$\lambda^2 + a\lambda + c = 0 \quad (24)$$

şeklindedir ve (24) denkleminin kökleri

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4c}}{2}. \quad (25)$$

olarak bulunmuş olur.

Eğer;

$$(H5) a > 0$$

$$(H6) c > 0$$

ise (24) denkleminin tüm kökleri negative reel kısma sahiptir. Bu durumda şartların her ikisinde de Q yerel asimptotik kararlı nokta olur. Bazı köklerin reel kısmı sıfıra yaklaşarak arttığını görmek istiyoruz ve sonundadeğiştiğinde τ pozitif olur.

Kabul edelim ki (23) karakteristik denkleminde $\tau \neq 0$ olsun.

$\lambda = i\bar{w}, \bar{w} > 0$ (23) karakteristik denkleminin bir kökü olsun

$$e^{-\lambda\tau} = e^{-i\bar{w}\tau} = \cos(\bar{w}\tau) - i\sin(\bar{w}\tau)$$

formülünü (20) denkleminde yerine yazarsak;

$$(i\bar{w})^2 + ai\bar{w} + [\cos(\bar{w}\tau) - i\sin(\bar{w}\tau)]c = 0$$

olur. Buradan;

$$-\bar{w}^2 + ai\bar{w} + \cos(\bar{w}\tau)c - i\sin(\bar{w}\tau)c = 0 \quad (26)$$

denklemini elde ederiz.(26) denkleminin reel ve sanal kısımlarını ayrı ayrı ele alırsak;

$$-\bar{w}^2 + \cos(\bar{w}\tau)c = 0 \Rightarrow \cos(\bar{w}\tau) = \frac{\bar{w}^2}{c} \quad (27)$$

$$a\bar{w} - \sin(\bar{w}\tau)c = 0 \Rightarrow \sin(\bar{w}\tau) = \frac{a\bar{w}}{c}. \quad (28)$$

olur.

Bu yüzden;

$$\cos(\bar{w}\tau) = \frac{\bar{w}^2}{c} \quad (29)$$

$$\sin(\bar{w}\tau) = \frac{a\bar{w}}{c} \quad (30)$$

olur.

(29) ve (30) denklemlerinin her iki tarafından kare alınırsa ve toplanırsa;

$$\begin{cases} \frac{\bar{w}^2}{c^2} = \cos^2 \bar{w}\tau \\ \frac{a^2 \bar{w}^2}{c^2} = \sin^2 \bar{w}\tau \\ (\bar{w}^2 + a^2 \bar{w}^2) \frac{1}{c^2} = 1 \end{cases}$$

$$t^2 + a^2 t - c^2 = 0 \quad (31)$$

elde edilir. Buradan;

$$t_{1,2} = \frac{-a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4c^2}}{2}$$

$$\bar{w}_{\pm}^2 = \frac{-a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4c^2}}{2}. \quad (32)$$

(H7) $\bar{w}_{\pm}^2$ hiçbir değer için kompleks köke sahip değildir, iki reel kökü vardır. (27) ve (28) denklemlerinden

$$\cos(\bar{w}\tau) = \frac{\bar{w}^2}{c}$$

$$\sin(\bar{w}\tau) = \frac{a\bar{w}}{c}$$

olur ve taraf tarafa bölünürse;

$$\tan(\bar{w}\tau_k) = \frac{a}{\bar{w}}. \quad (33)$$

bulunur. (33) denkleminin her iki tarafından $\tan^{-1}$ alınırsa;

$$\bar{w}\tau_k = \tan^{-1}\left(\frac{a}{\bar{w}}\right) + 2k\pi, k = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (34)$$

şeklinde olur. Yukarıdaki tartışma aşağıdaki Lemma tarafından özetlenebilir. Aynı zamanda Lemmanın ispatı (Cushing and Saleem, 1982) dır.

Lemma 2:

- i) Eğer (20) denkleminde (H5) ve (H6) with $\tau = \tau_j^+$ lerle sağlanırsa denklem sadece $\pm i\bar{w}$ imajiner kısma sahip köke sahiptir.
- ii) Eğer (H5) ve (H6) $\tau = \tau_j^-$ ler için sağlanırsa (20) denklemi sadece $\pm i\bar{w}$ çift katlı imajiner köke sahiptir.

Zaman gecikmeli Zeeman modeli denkleminin kararlılığını açıklamak için aşağıdaki Teorem verilebilir.

Teorem 1:Eğer Q^* denge noktası aşağıdaki şartlar sağlandığında tüm $\tau \geq 0$ için asimptotik kararlı olur.

- i) $\Delta(\lambda, 0) = 0$ denkleminin tüm köklerinin gerçekte kısımları negatiftir.
- ii) Tüm $(\bar{w})$ ve $\tau \geq 0$ için $\Delta(i\bar{w}, \tau) \neq 0, i = \sqrt{-1}$ dir.

Şimdi bir sonuç olarak aşağıdaki teoremi elde edebiliriz.

Teorem 2:Eğer (20) denkleminin Q denge noktası $a < 0, c > 0$ şartları sağlandığında tüm $\tau \geq 0$ için asimptotik kararlı olur.

Çelişkili şartların ispatı için;

$$\frac{d}{d\tau} \text{Re}(\lambda_j^+(\tau_j^+)) > 0 \text{ ve } \frac{d}{d\tau} \text{Re}(\lambda_j^-(\tau_j^-)) < 0$$

dır. τ ya bağlı (20) denkleminin her iki tarafından türev alınırsa;

$$\begin{aligned} \lambda^2 + a\lambda + ce^{-\lambda\tau} &= 0 \\ \Rightarrow 2\lambda \frac{d\lambda}{d\tau} + a \frac{d\lambda}{d\tau} - ce^{-\lambda\tau} \left[\tau \frac{d\lambda}{d\tau} + \lambda \right] &= 0 \\ \Rightarrow [2\lambda + a - ce^{-\lambda\tau} \tau] \frac{d\lambda}{d\tau} - c\lambda e^{-\lambda\tau} &= 0 \\ \tau_k^\pm &= \frac{1}{\bar{w}_\pm} \tan^{-1} \left(\frac{a}{\bar{w}} \right) + \frac{2k\pi}{\bar{w}_\pm^2}, k = 0, 1, 2, 3 \dots \end{aligned}$$

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{c\lambda e^{-\lambda\tau}}{2\lambda + a - ce^{-\lambda\tau}\tau} \quad (35)$$

olur.

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} = \frac{1}{\frac{d\lambda}{d\tau}} \text{ olduğundan}$$

$$\frac{d\tau}{d\lambda} = \frac{2\lambda + a - ce^{-\lambda\tau}\tau}{c\lambda e^{-\lambda\tau}}. \quad (36)$$

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} = \frac{2\lambda + a - ce^{-\lambda\tau}\tau}{c\lambda e^{-\lambda\tau}} = \frac{2\lambda + a}{c\lambda e^{-\lambda\tau}} - \frac{\tau}{\lambda}. \quad (37)$$

$\lambda^2 + a\lambda + ce^{-\lambda\tau} = 0$ denkleminde,

$$e^{-\lambda\tau} = \frac{-\lambda^2 - a\lambda}{c} \quad (38)$$

olur.

(38) ifadesini (37) ifadesinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} &= \frac{2\lambda + a - ce^{-\lambda\tau}}{c\lambda e^{-\lambda\tau}} = \frac{-a - 2\lambda}{\lambda(\lambda^2 + a\lambda)} - \frac{\tau}{\lambda} \\ \text{sign}\left\{\frac{d}{d\tau}(Re\lambda)\right\} &= \text{sign}\left\{Re\left(\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\right)\right\}. \\ \text{sign}\left\{\frac{d((Re\lambda))}{d\tau}\right\}_{\lambda=i\bar{w}} &= \text{sign}\left\{Re\left(\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\right)\right\}_{\lambda=i\bar{w}}.\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu yüzden, ifade

$$\text{sign}\left\{\frac{d((Re\lambda))}{d\tau}\right\}_{\lambda=i\bar{w}} = \text{sign}\left\{\left(\frac{-a - 2\lambda}{\lambda(\lambda^2 + a\lambda)} - \frac{\tau}{\lambda}\right)\right\}_{\lambda=i\bar{w}} \quad (39)$$

Aşağıdaki gibi hesaplanabilir. Hesaplamada $i^2 = -1$ kullanılarak hesaplamayapılırsa;

$$\text{sign}\left\{\frac{d((Re\lambda))}{d\tau}\right\}_{\lambda=i\bar{w}} = \text{sign}\left\{Re\left(\left(\frac{-a - 2\lambda}{\lambda(\lambda^2 + a\lambda)}\right)\right) - Re\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)\right\}_{\lambda=i\bar{w}}$$

elde edilir. Şimdi $\text{sign}\left\{\frac{d((Re\lambda))}{d\tau}\right\}_{\lambda=i\bar{w}}$ hesaplamak için aşağıdaki gibi değerlendirebiliriz.

1. $Re\left(\left(\frac{-a - 2\lambda}{\lambda(\lambda^2 + a\lambda)}\right)\right)_{\lambda=i\bar{w}}$ nin değeri aşağıdaki gibidir.

$$Re\left(\frac{-a - 2i\bar{w}}{i\bar{w}(-\bar{w}^2 + ai\bar{w})}\right) = Re\left(\frac{-a}{i\bar{w}(-\bar{w}^2 + ai\bar{w})}\right) + Re\left(\frac{-2i\bar{w}}{i\bar{w}(-\bar{w}^2 + ai\bar{w})}\right)$$

Ama,

$$Re\left(\frac{-2i\bar{w}}{i\bar{w}(-\bar{w}^2 + ai\bar{w})}\right) = Re\left(\frac{-2i\bar{w}}{-i\bar{w}(\bar{w}^2 + ai\bar{w})}\right) = Re\left(\frac{2}{(\bar{w}^2 - ai\bar{w})} \frac{(\bar{w}^2 + ai\bar{w})}{(\bar{w}^2 + ai\bar{w})}\right)$$

$$= Re\left(\frac{2\bar{w}^2 + 2ai\bar{w}}{(\bar{w}^4 + a^2\bar{w}^2)}\right) = \frac{2\bar{w}^2}{(\bar{w}^4 + a^2\bar{w}^2)}$$

$$Re\left(\frac{-a}{i\bar{w}(-\bar{w}^2 + ai\bar{w})}\right) = Re\left(\frac{a}{i\bar{w}(\bar{w}^2 - ai\bar{w})}\right) = Re\left(\frac{a}{i\bar{w}(\bar{w}^2 - ai\bar{w})} \frac{(\bar{w}^2 + ai\bar{w})}{(\bar{w}^2 + ai\bar{w})}\right) =$$

$$Re\left(\frac{a\bar{w}^2 + a^2i\bar{w}}{i\bar{w}(\bar{w}^4 + a^2\bar{w}^2)}\right) = \frac{a^2}{(\bar{w}^4 + a^2\bar{w}^2)}$$

Bu yüzden,

$$Re\left(\left(\frac{-a - 2\lambda}{\lambda(\lambda^2 + a\lambda)}\right)\right)_{\lambda=i\bar{w}} = \frac{2\bar{w}^2 + a^2}{(\bar{w}^4 + a^2\bar{w}^2)} \quad (40)$$

2. $Re \left(\frac{\tau}{\lambda} \right) \Big|_{\lambda=i\bar{w}}$ nin değeri aşağıdaki gibidir.

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} = \frac{2\lambda + a - ce^{-\lambda\tau}}{c\lambda e^{-\lambda\tau}} = \frac{2\lambda + a}{c\lambda e^{-\lambda\tau}} - \frac{\tau}{\lambda} \quad (41)$$

$$Re \left(\frac{\tau}{\lambda} \right) \Big|_{\lambda=i\bar{w}} = Re \left(\frac{\tau}{i\bar{w}} \frac{-i\bar{w}}{-i\bar{w}} \right) = Re \left(\frac{-\tau i\bar{w}}{\bar{w}^2} \right) = 0 \quad (42)$$

(41) ve (42) yi (39) da yerine koyarsak;

$$\text{sign} \left\{ \frac{d((Re\lambda))}{d\tau} \Big|_{\lambda=i\bar{w}} \right\} = \text{sign} \left\{ \frac{2\bar{w}^2 + a^2}{(\bar{w}^4 + a^2\bar{w}^2)} \right\} \quad (43)$$

elde ederiz.

Teorem 3: $\tau = \tau^\pm$ (33) deki gibi tanımlanmış olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa;

$$\lambda^2 + a\lambda + ce^{-\lambda\tau} = 0,$$

denkleminde Q pozitif denge noktası m pozitif sabiti için kararsızdır.

$$\tau \in [0, \tau_0^+] \cup [\tau_0^-, \tau_1^+] \cup \dots \cup [\tau_{m-1}^-, \tau_m]$$

$$\tau \in [\tau_0^+, \tau_0^-] \cup [\tau_1^+, \tau_1^-] \cup \dots \cup [\tau_{m-1}^+, \tau_{m-1}^-].$$

İspat: Teoremdaki aşağıdaki koşullar sağlandığında o zaman sadece aşağıda verilen karşılık koşullarını sağlamaya gereksinim vardır.

$$\frac{d}{d\tau} (Re\lambda) \Big|_{\tau=\tau^+} > 0 \text{ and } \frac{d(Re\lambda)}{d\tau} \Big|_{\lambda=i\bar{w}^+} > 0,$$

$$\frac{d}{d\tau} (Re\lambda) \Big|_{\tau=\tau^-} > 0 \text{ and } \frac{d(Re\lambda)}{d\tau} \Big|_{\lambda=i\bar{w}^-} < 0,$$

$$\bar{w}_\pm^2 = \frac{-a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4c^2}}{2}$$

ve

$$\tau_k^\pm = \frac{1}{\bar{w}_\pm} \tan^{-1} \left(\frac{a}{\bar{w}} \right) + \frac{2k\pi}{\bar{w}_\pm^2}, k = 0, 1, 2, 3 \dots$$

Teorem 3 ün şartlarından,

$$a^4 + 4c^2 > 0$$

$$\sqrt{a^4 + 4c^2} > 0$$

$$\text{sign}\{\sqrt{a^4 + 4c^2}\} > 0$$

olur.

Bu yüzden,

$$\text{sign}\left\{\frac{d}{d\tau}(Re\lambda)|_{\lambda=i\bar{w}^+, \tau=\tau^+}\right\} > 0.$$

olur.

Şimdi,

$$\begin{aligned}\text{sign}\left\{\frac{d}{d\tau}(Re\lambda)|_{\lambda=i\bar{w}}\right\} &= \text{sign}\left\{\frac{2\bar{w}^2 + a^2}{(\bar{w}^4 + a^2\bar{w}^2)}\right\} = \text{sign}\{\sqrt{a^4 + 4c^2}\} > 0 \\ \text{sign}\{-\sqrt{a^4 + 4c^2}\} &< 0\end{aligned}$$

dır. Bu yüzden

$$\text{sign}\left\{\frac{d}{d\tau}(Re\lambda)|_{\lambda=i\bar{w}^+, \tau=\tau^-}\right\} < 0.$$

olur. Böylece çaprazlık koşulları sağlanır ve ispat tamamlanmış olur.

Örnek: Bu yüzden $\varepsilon = 0.2, T = 0.5, x_d = 0.41$ parametreleri ile (15) sistemi düşünülürse, (15) sisteminin pozitif denge noktası, $(0.41, 0.136079)$. $\tau = 0$ için (14) sisteminin jakobiyen matrisinin $(0.41, 0.136079)$ noktasındaki özdeğerleri $\{-0.7482 + 2.1072i, -0.7482 - 2.1072i\}$ bulunur. Dikkat edilirse kompleks eşlenik özdeğerlerin reel kısımları negatif olduğundan $(0.41, 0.136079)$ denge noktası kararlı olur.

$\tau = 0$ olduğunda,

$$a = 0.0215$$

$$c = 5$$

bulunur. a ve c değerleri (28)'de yerlerine yazılırsa

$$\bar{w}_+^2 = 4.9988,$$

$$\bar{w}_-^2 = 3.0007$$

$\bar{w}_+^2$ 'nin karekökü alınırsa,

$$\bar{w}_+ = \sqrt{4.9988} = 2.2357.$$

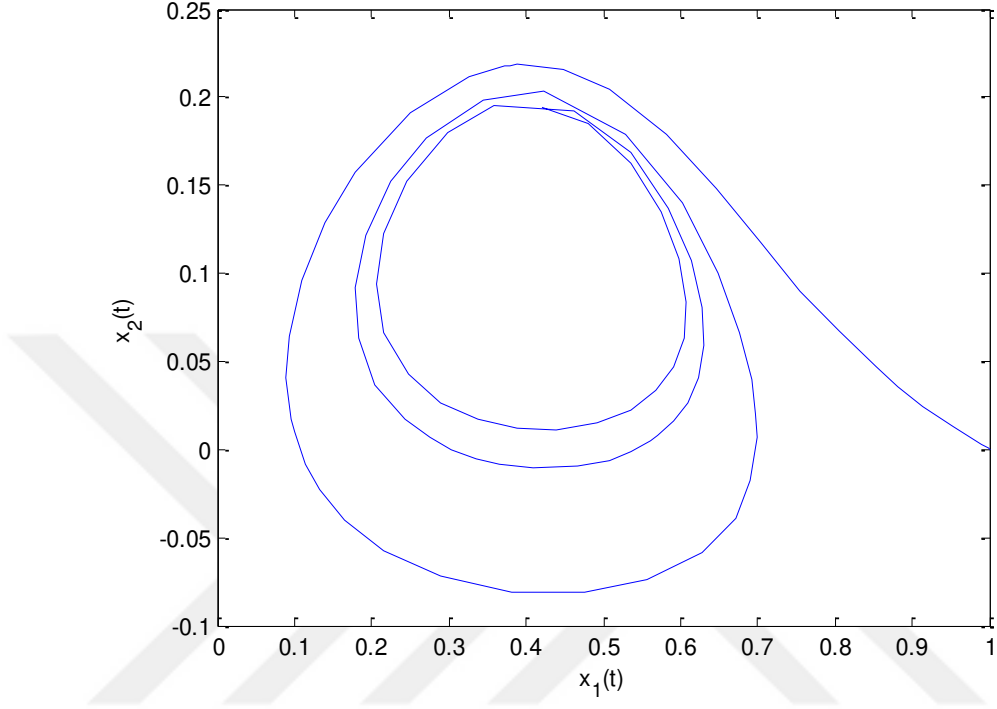
a, c ve $\bar{w}_+$ değerleri (32) denkleminde yerlerine yazılırlarsa, o zaman ilk zaman gecikme terim değeri,

$$\tau_0^+ = 0.011,$$

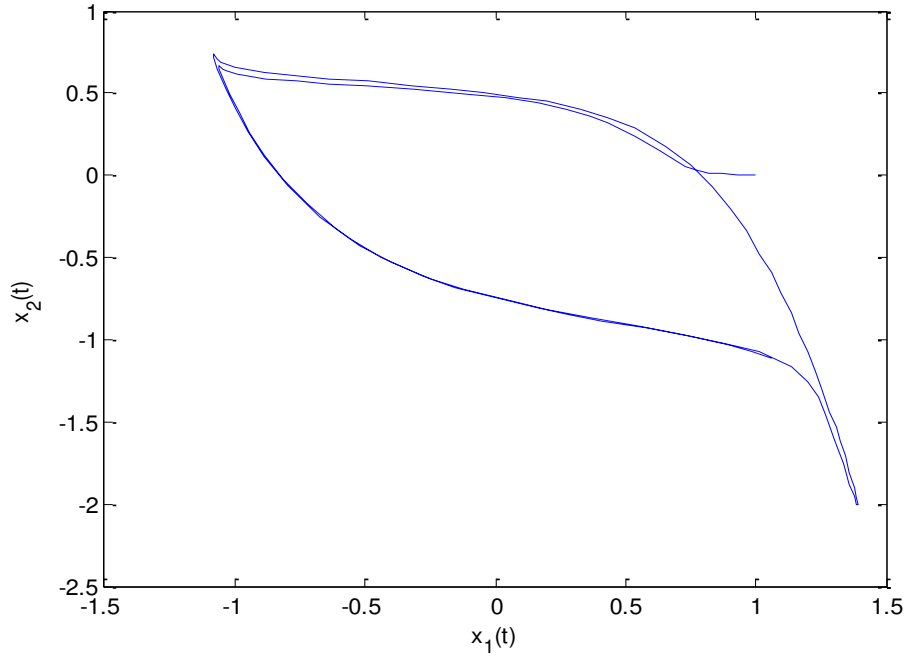
$$\tau_1^+ = 1.2581.$$

olur.

Zaman gecikmesinin kritik değeri $\tau = \tau_0^+ = 0.0215$ dır. $\tau < 0.011$ olduğunda $(0.41, 0.136079)$ denge noktası asimptotik kararlı olur, $\tau = 0.0215$ olduğunda $(0.41, 0.136079)$ kararlılık kaybolur, ve $\tau > 0.0215$ olduğunda $(0.41, 0.136079)$ denge noktası kararsız olur.



Şekil 2.3. $\tau_0^+ = 0.011$ için çözüm eğrileri



Şekil 2.4. $\tau_1^+ = 1.2581$ için çözüm eğrileri

2.5. Kesirli Mertebeden Zeeman Modelinin Kararlılık Analizi

$$D_t^\alpha x_1(t) = -\frac{1}{\varepsilon}(x_1^3 - Tx_1 + x_2)$$

$$D_t^\alpha x_2(t) = x_1 - x_d$$

Teorem 4: Aşağıdaki otonom (özerk) sistem

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = Ax, x(0) = x_0 \quad (44)$$

$0 < \alpha \leq 1, x \in R^n$ ve $A \in R^{n \times n}$ için asimptotik kararlı olur $\Leftrightarrow |\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}$, A matrisinin tüm özdeğerleri için sağlandığında (A matrisinin tüm özdeğerleri için $|\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ olduğunda). Buna ilaveten, bu sistem kararlı olur $\Leftrightarrow$ A nın kritik özdeğerleri $|\arg(\lambda)| = \frac{\alpha\pi}{2}$ olduğunda A nın tüm özdeğerleri $|\arg(\lambda)| \geq \frac{\alpha\pi}{2}$ yi sağlar.

Teorem 5: Aşağıdaki aynı kesirli mertebeden sistemi

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = f(x), x(0) = x_0 \quad (45)$$

$0 < \alpha \leq 1, x \in R^n$. (45) sisteminin denge noktaları $f(x) = 0$ denkleminin çözülmesi ile hesaplanabilir. Bu denklemler, $J = \frac{df}{dx}$ Jacobiyeen matrisinin tüm λ_i özdeğerleri denge noktasında $|\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ koşulunu sağlarsa yerel asimptotik kararlı olur.

Şimdi, (1) modelinin denge noktalarını bularak ve kararlılığını çalışarak modeli analiz edebiliriz. Modelin kararlılık ifadesi aşağıdaki sağlanabilir.

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = 0 \quad \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = 0 \quad (46)$$

(1) denkleminin denge noktaları

a) $x_d = 0$ ise $E_0 = (0,0)$

b) $x_d \neq 0$ ise $x_1 = x_d$ ise $x_2 = \frac{1}{\varepsilon}(x_d^3 - Tx_d)$

Buradan $E_1 = (x_d, \frac{1}{\varepsilon}(x_d^3 - Tx_d))$

(1) sisteminin yerel kararlılığını araştırmak için, denge noktalarının lineer bileşimi Jakobien matriste yerlerine yazalım.

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon}(x_1^3 - Tx_1 + x_2) = f(x_1, x_2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_d = g(x_1, x_2)$$

dersek;

$$J \frac{\partial(f,g)}{\partial(x_1,x_2)} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3x_1^2}{\varepsilon} + \frac{T}{\varepsilon} & \frac{-1}{\varepsilon} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_0(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{T}{\varepsilon} & \frac{-1}{\varepsilon} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindeki matrisi elde ederiz. Burada öz değerleri bulmak için ilk önce $\text{iz}(J_0)$ ı bulmalıyız.

$$\text{iz}(J_0) = \frac{T}{\varepsilon}, \det(J_0) = 1/\varepsilon$$

Özdeğerleri yani α_1 ve α_2 yi bulmak için aşağıdaki formülü verelim:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\text{iz}(J_0) \pm \sqrt{\text{iz}(J_0)^2 - 4\det(J_0)}}{2}$$

Bu formülde istenenler yerine yazılırsa;

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{T}{\varepsilon} \pm \sqrt{\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)^2 - \frac{4}{\varepsilon}}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{\frac{T}{\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)^2 - \frac{4}{\varepsilon}}}{2} > 0, \lambda_2 = \frac{\frac{T}{\varepsilon} - \sqrt{\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)^2 - \frac{4}{\varepsilon}}}{2} > 0$$

olur. Bu yüzden E_0 denge noktası kararsız olur.

E_1 denge noktasında (1) sisteminin Jacobien matrisi

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\varepsilon}x_d^2 + \frac{T}{\varepsilon} & \frac{-1}{\varepsilon} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Karakteristik denklem,

$$|J(E_1) - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\frac{3}{\varepsilon}x_d^2 + \frac{T}{\varepsilon} - \lambda & \frac{-1}{\varepsilon} \\ 1 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \left(\frac{3}{\varepsilon}x_d^2 - \frac{T}{\varepsilon}\right)\lambda + \frac{1}{\varepsilon} = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{-\left(\frac{3}{\varepsilon}x_d^2 - \frac{T}{\varepsilon}\right) + \sqrt{\left(\frac{3}{\varepsilon}x_d^2 - \frac{T}{\varepsilon}\right)^2 - \frac{4}{\varepsilon}}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-\left(\frac{3}{\varepsilon}x_d^2 - \frac{T}{\varepsilon}\right) - \sqrt{\left(\frac{3}{\varepsilon}x_d^2 - \frac{T}{\varepsilon}\right)^2 - \frac{4}{\varepsilon}}}{2}$$

$$T=0.5, \varepsilon = 0.1, x_d = 0.1$$

Değerleri için;

$$\lambda_1 = 2.35 + 2.1160i$$

$$\lambda_2 = 2.35 - 2.1160i$$

$$\lambda_{1,2} = \alpha \mp i\beta$$

$\beta \neq 0$ ve $\alpha > 0$ olduğundan kararsız itici sarmal noktadır.

$$|\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}$$

$$0.7331 > \frac{\alpha\pi}{2} \text{ ise } \frac{0.7331.2}{\pi} > \alpha$$

dır. Yukarıdaki verilen teoremdeki koşullar sağlandığından $0.4667 > \alpha$ için asimptotik kararlı olur.

2.6. Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Diferansiyel dönüşüm yöntemini aşağıdaki gibi basit bir şekilde tanımlayalım. $x(t)$, D bölgesinde analitik olan bir fonksiyon ve $t = t_0$ ise D bölgesinde bir nokta olsun. $x(t)$ fonksiyonu t_0 noktası komşuluğunda bir kuvvet serisiyle temsil edilebilir. $x(t)$ fonksiyonunun k .türevinin diferansiyel dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$X(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]_{t=t_0}, \forall t \in D \quad (47)$$

(47) de, $x(t)$ orjinal fonksiyon ve $X(k)$ dönüştürülmüş fonksiyondur. $X(k)$ nın ters diferansiyel dönüşümü aşağıdaki gibidir.

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X(k)(t - t_0)^k, \forall t \in D \quad (48)$$

(47) ve (48) den

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^k}{k!} \left[\frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]_{t=t_0}, \forall t \in D \quad (49)$$

elde edilir.[Zhuo, Punkov]

Bir boyutlu diferansiyel dönüşüm için temel teoremleri verelim:

Teorem 6. Eğer $z(t) = x(t) \pm y(t)$, o halde $Z(k) = X(k) \pm Y(k)$.

Teorem 7. Eğer $z(t) = cy(t)$, o halde $Z(k) = cY(k)$.

Teorem 8. Eğer $z(t) = \frac{dy(t)}{dt}$, o halde $Z(k) = (k + 1)Y(k + 1)$.

Teorem 9. Eğer $z(t) = \frac{d^n y(t)}{dt^n}$, o halde $Z(k) = \frac{(k+n)!}{k!} Y(k)$.

Teorem 10. Eğer $z(t) = x(t)y(t)$, o halde $Z(k) = \sum_{k_1=0}^k X(k_1)Y(k - k_1)$.

Teorem 11. Eğer $z(t) = t^n$, o halde $Z(k) = \delta(k - n) = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$.

Gerçek uygulamalarda $x(t)$ fonksiyonu sonsuz bir seriyle ifade edilir ve (49) dan aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$x(t) = \sum_{k=0}^N X(k)(t - t_i)^k, \forall t \in D \quad (50)$$

(50) denklemi $\sum_{k=N+1}^{\infty} X(k)(t - t_i)^k$ değerinin önemsenmeyecek küçüklükte olduğunu ifade eder.

1. Mertebeden adi diferansiyel denklem sistemi düşünürsek;

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} + h_1(t, x_1, x_2, \dots, x_m) &= g_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} + h_2(t, x_1, x_2, \dots, x_m) &= g_2(t), \\ &\vdots \\ \frac{dx_m}{dt} + h_m(t, x_1, x_2, \dots, x_m) &= g_m(t) \end{aligned} \quad (51)$$

başlangıç şartları

$$x_1(t_0) = d_1, x_2(t_0) = d_2, \dots, x_m(t_0) = d_m \quad (52)$$

dır.

Diferansiyel Dönüşüm Metoduna göre (51) ve (52) denklem sisteminin her iki tarafından diferansiyel dönüşümü alınarak aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} (k+1)X_1(k+1) + H_1(k) &= G_1(k), \\ (k+1)X_2(k+1) + H_2(k) &= G_2(k), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (53)$$

$$(k+1)X_m(k+1) + H_m(k) = G_m(k).$$

$$X_1(0) = d_1, X_2(0) = d_2, \dots, X_m(0) = d_m. \quad (54)$$

Bu yüzden Diferansiyel Dönüşüm Metoduna göre (51) sistemi için n. terim benzer şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,n}(t) &= x_1(t) = \sum_{k=1}^N X_1(k)t^k, \\
\varphi_{2,n}(t) &= x_2(t) = \sum_{k=1}^N X_2(k)t^k, \\
&\vdots \\
\varphi_{m,n}(t) &= x_m(t) = \sum_{k=1}^N X_m(k)t^k.
\end{aligned} \tag{55}$$

(1) Denklemin diferensiyel dönüşüm yöntemi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
(k+1)X_1(k+1) &= -\frac{1}{\varepsilon} \left[\sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} X_1(k_1)X_1(k_2-k_1)X_1(k-k_2) - \right. \\
&\quad \left. Tx_1(k) + x_2(k) \right] (k+1)X_2(k+1) = X_1(k) - x_d\delta(k)
\end{aligned} \tag{56}$$

elde edilir.

Aşağıda iki boyutlu Zeeman modelinde parametre veya başlangıç şartları rastgele seçilirse, rastgele Zeeman modeli elde edilir. Burada kullanacağımız mutlak sürekli dağılımlardan beta ve normal dağılımın özelliklerinden bahsedelim.

2.7. Standart Beta Dağılımı Özellikleri

Öncelikle $\alpha > 0, \beta > 0$ parametresine bağlı $B(\alpha, \beta)$ fonksiyonu tanımlayalım.

Fonksiyon

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \tag{57}$$

şeklindedir.

Yoğunluk fonksiyonu tanımından;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{diğer } x \text{ ler} \end{cases} \tag{58}$$

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \tag{59}$$

şeklinde tanımlanır. [R.J.Larsen, M.L. Marx, 1986]

2.8. Beta Dağılımının Beklenen Değeri

$$X \sim B(\alpha, \beta) \text{ ise } E[X] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$Var[x] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 \cdot (\alpha + \beta + 1)}$$

$$E[X^2] = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)}$$

$$E[X^3] = \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)}$$

⋮

$$E[X^n] = \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + (n - 1))}{(\alpha + \beta + n - 1)(\alpha + \beta + n - 2) \dots (\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)}$$

Y_0 ve Y_1 bağımsız rastgele değişkenler olduğundan $E[Y_0, Y_1] = 0$ olur. Yani Y_0 ve Y_1 in beklenen değeri sıfır olur.

$$x_N(t) = \sum_{k=-\infty}^N x(k)t^k \quad (60)$$

$$E[x_N(t)] = \sum_{k=-\infty}^N E[x(k)]t^k, \quad (61)$$

$$Var[x_N(t)] = \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N Cov(x(i), x(j)) t^{i+j},$$

$$Cov(x(i), x(j)) = E(x(i)x(j)) - E[X_i]E[X_j], \forall i, j = 0, 1, \dots, N. \quad (62)$$

2.9. İki Boyutlu Rastgele Zeeman Modelinin Beklenen Değer ve Varyansı

$$X \sim B(\alpha, \beta) \text{ ise } E[X] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$V[x] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 \cdot (\alpha + \beta + 1)}$$

$$E[X^2] = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)}$$

$$E[X^3] = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)},$$

$$\vdots$$

$$E[X^n] = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \dots (\alpha+(n-1))}{(\alpha+\beta+n-1)(\alpha+\beta+n-2) \dots (\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}$$

(1) denkleminde T parametresi, beta dağılımına sahip bir rastgele değişken $T \sim B(\alpha = 2, \beta = 1)$ Y_0 ve Y_1 başlangıç koşulları normal dağılıma sahip bağımsız rastgele değişkenler olarak seçilsin. Yani $Y_0, Y_1 \in N(\mu, \sigma^2)$ olsun.

Burada $\mu = 1, \sigma^2 = 1, \sigma = 1$ dir. O halde;

$$\begin{aligned} E[Y_0] &= \mu = 1, E[Y_1] = \mu = 1, \\ E[Y_0^2] &= \mu^2 + \sigma^2 = 1 + 1 = 2 \\ E[Y_1^2] &= \mu^2 + \sigma^2 = 1 + 1 = 2 \\ E[Y_0^3] &= \mu^3 + 3\mu\sigma^2 = 1 + 3.1.1 = 4 \\ E[Y_1^3] &= \mu^3 + 3\mu\sigma^2 = 1 + 3.1.1 = 4 \\ E[Y_1^3] &= \mu^3 + 3\mu\sigma^2 = 1 + 3.1.1 = 4 \\ E[Y_0^5] &= E[Y_1^5] = \mu^5 + 10\mu^3\sigma^2 + 15\mu\sigma^4 = 1 + 10.1.1 + 15.1 = 26 \\ E[Y_0^7] &= E[Y_1^7] = \mu^7 + 21\mu^5\sigma^2 + 105\mu^3\sigma^4 + 105\mu\sigma^6 = 232 \end{aligned} \quad (63)$$

$T > 0$ beta dağılımına sahip rastgele değişken olduğundan yani $T \sim B(\alpha = 2, \beta = 1)$

$$\begin{aligned} E[T] &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{2}{3} \\ E[T^2] &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)} = \frac{2.3}{3.4} = \frac{1}{2} \\ E[T^3] &= \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)} = \frac{2}{5} \\ E[T^4] &= \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)} = \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (64)$$

bulunur.

(56) ifadesinden, (1) denkleminde diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulanarak elde edilen yaklaşık analitik çözümleri

$$\begin{aligned} X_1 &= Y_0 - 2Y_1t + 2TY_0t - 2Y_0^3t - Y_0t^2 - 2Y_1Tt^2 + 2T^2Y_0t^2 - 8TY_0^3t^2 + 6Y_0^2Y_1t^2 + \\ &6Y_0^5t^2 + \frac{2}{3}Y_1t^3 - \frac{4}{3}TY_0t^3 + \frac{8}{3}Y_0^3t^3 - \frac{4}{3}T^2Y_1t^3 + \frac{4}{3}T^3Y_0t^3 - \frac{52}{3}T^2Y_0^3t^3 + 24TY_0^2Y_1t^3 + \\ &36TEY_0^5t^3 - 28Y_1Y_0^4t^3 - 20Y_0^7t^3 - 8Y_1^2Y_0t^3 + \dots \end{aligned} \quad \text{bulunur.}$$

X_1 ve X_2 rastgele değişkenlerinin beklenen değeri olan $E[X_1]$ ve $E[X_2]$ yi hesaplayalım. Buna göre (63) ve (64) teki bağıntılardan yararlanarak

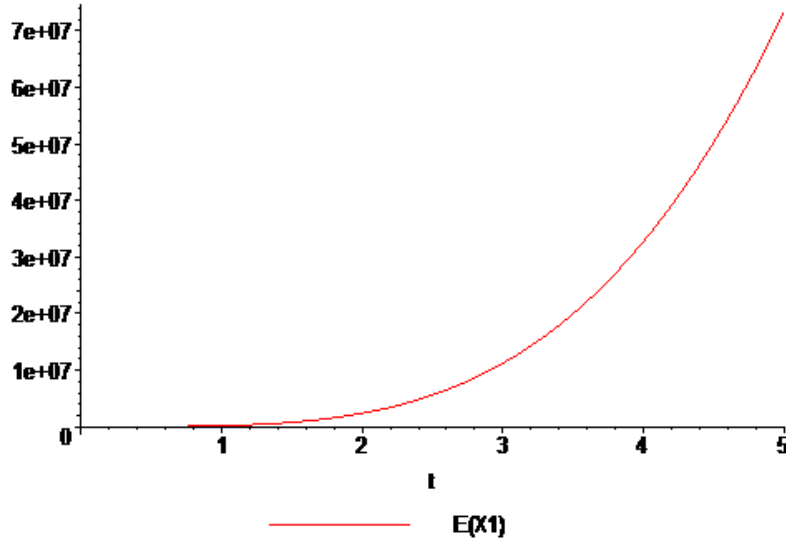
$$\begin{aligned} E[X_1] = & E[Y_0] - 2 E[Y_1]t + 2E[T]E[Y_0]t - 2E[Y_0^3]t - E[Y_0]t^2 - 2E[Y_1]E[T]t^2 + \\ & 2E[T^2]E[Y_0]t^2 - 8E[T]E[Y_0^3]t^2 + 6 E[Y_0^2]E[Y_1]t^2 + 6E[Y_0^5]t^2 + \frac{2}{3}E[Y_1]t^3 - \\ & \frac{4}{3}E[T]E[Y_0]t^3 + \frac{8}{3}E[Y_0^3]t^3 - \frac{4}{3}E[T^2]E[Y_1]t^3 + \frac{4}{3}E[T^3]E[Y_0]t^3 - \frac{52}{3}E[T^2]E[Y_0^3]t^3 + \\ & 24E[T]E[Y_0^2]E[Y_1]t^3 + 36E[T]E[Y_0^5]t^3 - 28E[Y_1]E[Y_0^4]t^3 - 20E[Y_0^7]t^3 - \\ & 8E[Y_1^2]E[Y_0]t^3 + \dots \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda bulunan değerler yerine yazılarak aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\begin{aligned} E[X_1] = & 1 + \left(-2 + \frac{4}{3} - 8\right)t + \left(-1 - \frac{4}{3} + 1 - \frac{64}{3} + 12 + 1560\right)t^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{8}{9} + \frac{32}{3} - \frac{2}{3} + \right. \\ & \left. \frac{8}{15} - \frac{104}{3} + 64 + 624 - 280 - 4640 - 16\right)t^3 + \dots \end{aligned}$$

$$E[X_1] = 1 - \frac{26}{3}t + \frac{436}{3}t^2 - \frac{383.416}{90}t^3 + \frac{15290326}{90}t^4 - \frac{996772380}{94500}t^5 + \dots \quad (65)$$

Aşağıdaki şekilde (65) te bulunan beklenen değer zamana bağlı değişimi verilmiştir.



Şekil 2.5. X_1 'in beklenen değerinin zamana bağlı değişimi

Benzer şekilde, X_2 yaklaşık analitik çözümünün beklenen değeri,

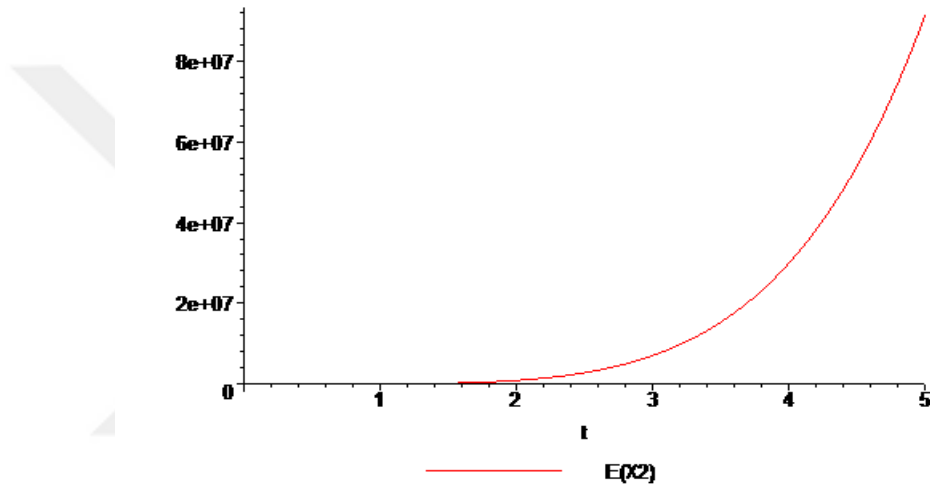
$$\begin{aligned} X_2 = & Y_1 + Y_0t - Y_1t^2 + Y_0Tt^2 - Y_0^3t^2 - \frac{1}{3}Y_0t^3 - \frac{2}{3}Y_1Tt^3 + \frac{2}{3}Y_0T^2t^3 - \frac{2}{3}Y_1Tt^3 - \\ & \frac{8}{3}Y_0^3Tt^3 + 2Y_0^2Y_1t^3 + 2Y_0^5t^3 + \dots \end{aligned}$$

$$E[X_2] = E[Y_1] + E[Y_0]t - E[Y_1]t^2 + E[Y_0]E[T]t^2 - E[Y_0^3]t^2 - \frac{1}{3}E[Y_0]t^3 - \frac{2}{3}E[Y_1]E[T]t^3 + \frac{2}{3}E[Y_0]E[T^2]t^3 - \frac{2}{3}E[Y_1]E[T]t^3 - \frac{8}{3}E[Y_0^3]E[T]t^3 + 2E[Y_0^2]E[Y_1]t^3 + 2E[Y_0^5]t^3 + \dots$$

$$E[X_2] = 1 + t + \left(-1 + \frac{2}{3} - 4\right)t^2 + \left(-\frac{1}{3} - \frac{4}{9} + \frac{1}{3} - \frac{4}{9} - \frac{32}{3} + 4 + 52\right)t^3 + \dots$$

$$E[X_2] = 1 + t - \frac{13}{3}t^2 + \frac{397}{9}t^3 - \frac{96848}{90}t^4 + \frac{2650771}{90}t^5 + \dots \quad (66)$$

olarak bulunur. Aşağıdaki şekilde (66) da bulunan beklenen değerin zamana bağlı değişimi verilmiştir.



Şekil 2.6. X_2 'in beklenen değerinin zamana bağlı değişimi

2.10. Laplace Padé Tekniği

Literatürde klasik Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi'nin başka çok adımlı prosedürler olmak üzere farklı modifikasyonları mevcut olsa da [Bervillier,C.,2012] bu çalışmada Pade yaklaşımını temel alan ve bazı kaynaklarda DTM-Pade Yöntemi olarak da adlandırılan Modifiye Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi kullanılacaktır.[Momani, S., & Ertürk, V., 2008] Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile diferansiyel denklemler için kuvvet serileri şeklinde analitik çözümler üretilmektedir. Ancak özellikle kompartmanlı modeller özelinde görülebildiği gibi uzun zaman aralıklarında yapılan incelemelerde (t değeri büyük olduğunda veya $t \rightarrow \infty$ iken) kuvvet serileri temelli yaklaşım yöntemleri çok kullanışlı olmamaktadır. [Medhi Rashidi,M., & Erfani, E., 2011].Bu dezavantajı kaldırmak için polinom formundaki yaklaşımları polinomların rasyonel fonksiyonlarına dönüştüren Pade yaklaşımı yöntemi kullanılmaktadır. [Baker, G.A. 1975]. DTM Yöntemi ile Pade

yaklaşımının birleşimi olan bu yöntem kullanılarak sonsuz tanım aralığına sahip problemlerde başarı elde edilen başarılı sonuçlar literatürde mevcuttur. [Rashidi,M.,2009; Mehdi Rashidi, M.,& Erfani,E.,2011; Gökdoğan, A., Merdan M., &Yildirim, A., 2012].

Bir $x(t)$ fonksiyonunun $[p/q]$ Pade yaklaşımı p-inci mertebeden bir polinomun q. Mertebeden bir polinoma bölümüdür. Bu polinomlar, yaklaşımın kuvvet serisinin baş katsayılarının $x(t)$ nin kuvvet serisinin ilk $(p + q + 1)$ terimiyle uyuşması esasına göre seçilirler. [Boyd, J., P., 1997]. Bir $x(t)$ fonksiyonunu temsil eden $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ kuvvet serisini ele alalım [Rashidi, M. M., 2009].[Z.Bekiryazici, 2017]

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \quad (67)$$

Bu fonksiyonun Pade yaklaşımı payı ve paydası polinom olan bir kesirdir ve

$$[L/M] = \frac{P_L(t)}{Q_M(t)} \quad (68)$$

şeklinde ifade edilir.

Burada $P_L(t)$ ve $Q_M(t)$ sırasıyla en fazla L-inci ve M-inci dereceden polinomlardır. Dolayısıyla (67) ve (68) denklemlerinde,

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots \quad (69)$$

$$P_L(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + \dots + p_L t^L, \quad (70)$$

$$Q_M(t) = q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3 + \dots + q_M t^M, \quad (71)$$

olduğu görülmektedir. Bu durumda (68) denkleminin pay ve paydasında sırayla $L + 1$ ve $M + 1$ katsayıları bulunmaktadır. Pay ve paydanın birer katsayı ile çarpılması $[L,M]$ ikilisini değiştirmeyeceğinden

$$Q_M(0) = 1 \quad (72)$$

normallik koşulu kullanılmaktadır. Bu koşul ile birlikte (68) denkleminde payda $L+1$ ve paydada M adet olmak üzere toplam $L+M+1$ adet bilinmeyen katsayı olduğu görülür. Dolayısıyla (67) denkleminde uyum için $[L,M]$ aracılığıyla $1, t, t^2, \dots, t^{L+M}$ mertebeleri kullanılmalıdır. Bu şekilde tek bir $[L,M]$ yaklaşımının olduğu [Baker, G.,& Graves-Morris, P., 1981] ve [Boyd, J. P., 1997] ile gösterilmiştir. Kuvvet serisi gösterimi kullanılarak

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i = \frac{p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + \dots + p_L t^L}{q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3 + \dots + q_M t^M} + 0(t^{L+M+1}) \quad (73)$$

yazılır.

Buradan

$$(p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + \dots + p_L t^L)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots) = q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3 + \dots + q_M t^M + 0(t^{L+M+1}) \quad (74)$$

elde edilir. (74) denkleminde

$$\begin{aligned} a_0 &= p_0, \\ a_1 + a_0 q_1 &= p_1, \\ a_2 + a_1 + a_1 q_2 &= p_2, \\ &\vdots \\ a_L + a_{L-1} q_1 + \dots + a_0 q_L &= p_L \end{aligned} \quad (75)$$

ve

$$\begin{aligned} a_{L+1} + a_L q_1 + \dots + a_{L-M+1} q_M &= 0, \\ a_{L+2} + a_{L+1} q_1 + \dots + a_{L-M+2} q_M &= 0 \\ &\vdots \\ a_{L+M} + a_{L+M-1} q_1 + \dots + a_L q_M &= 0 \end{aligned} \quad (76)$$

denklemleri elde edilir. Burada $n < 0$ iken $a_n = 0$ ve $j > M$ iken $q_j = 0$ dir. (75) ve (76) denklemleri tekil değilseler

$$[L/M] = \frac{\begin{vmatrix} a_{L-M+1} & a_{L-M+2} & \dots & a_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_L & a_{L+1} & \dots & a_{L+M} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{j=M}^L a_i - M t^j & \sum_{j=M-1}^L a_i - M + 1 t^j & \dots & \sum_{j=0}^L a_j t^j \\ a_{L-M+1} & a_{L-M+2} & \dots & a_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_L & a_{L+1} & \dots & a_{L+M} \\ t^M & t^{M-1} & \dots & 1 \end{vmatrix}} \quad (77)$$

şeklinde çözülebilirler. Toplamlarda alt indis üst indisi geçtiğinde, toplam sıfır ile değiştirilmektedir.

Alternatif formalar şöyledir:

$$\begin{aligned}
[L/M] &= \sum_{j=0}^{L-M} a_j t^j + t^{L-M+1} w_{L/M}^T W_{L/M}^{-1} w_{L/M} \\
&= \sum_{j=0}^{L+n} a_j t^j + t^{L+n+1} w_{(L+M)/M}^T W_{L/M}^{-1} w_{(L+n)/M}
\end{aligned} \tag{78}$$

burada

$$W_{L/M} = \begin{bmatrix} a_{L-M+1} - t a_{L-M+2} & \cdots & a_L - t a_{L+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_L - t a_{L+1} & \cdots & a_{L+M+1} - t a_{L+M} \end{bmatrix} \tag{79}$$

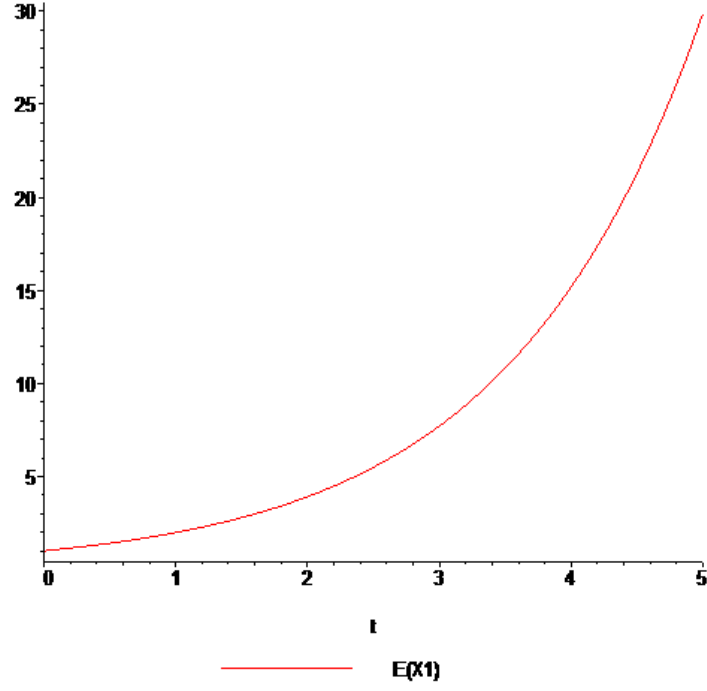
$$W_{L/M} = \begin{bmatrix} a_{L-M+1} \\ a_{L-M+2} \\ \vdots \\ a_L \end{bmatrix} \tag{80}$$

şeklindedir. [Rashidi, M. M., 2009; Mehdi Rashidi, M., & Erfani, E., 2011]. $[L/M]$ yaklaşımının inşasında her bir L ve M seçimi farklı bir yaklaşım vermektedir. Yöntemin en zor yanlarından biri en iyi yaklaşımın elde edilmesi için kullanılması gereken L ve M sayılarının belirlenmesidir. Uygulamalarda genel olarak $L = M$ şeklindeki seçimlerin iyi yaklaşımlar oluşturduğu gözlemlenmiştir. [Rashidi, M. M., 2009]

O halde çözümleri iyileştirmek yani daha uzun zaman aralığında yakınsak çözümler elde etmek için, Laplace-Pade tekniği uygulanırsa (65) denkleminde Laplace-Padé uygulanırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned}
M_1 &= 0.4000000000.10^{-9} (0.2500000000.10^{10} \cosh(20.60042595t) \\
&\quad - 0.1753686373.10^{10} \sinh(20.60042595t)) e^{5.784007835}
\end{aligned}$$

elde edilir.

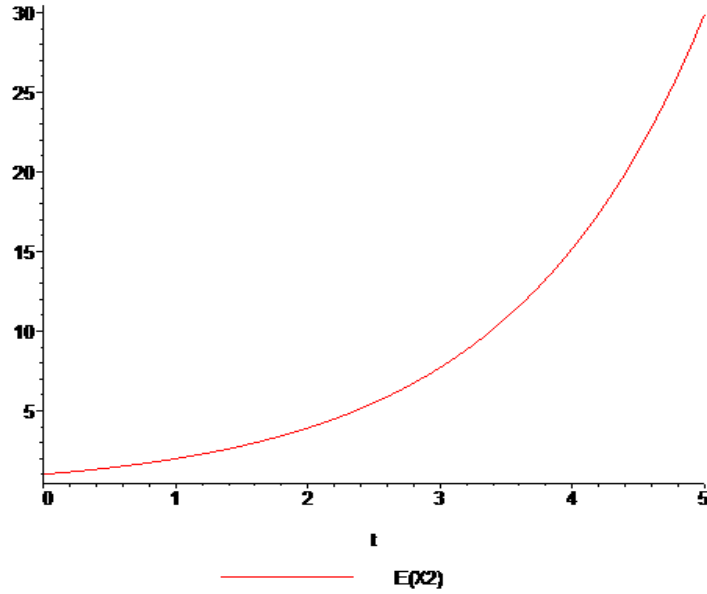


Şekil 2.7. Modifiye DTM den elde edilen X_1 'in beklenen değerinin zamana bağlı değişimi

Yukarıdakine benzer şekilde (66) denkleminde Laplace-Padé uygularsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$M_1 = \frac{1}{29146} e^{\left(-\frac{410t}{29}\right)} \left(29146 \cosh\left(\frac{19t\sqrt{4602}}{87}\right) + 430\sqrt{4602} \sinh\left(\frac{19t\sqrt{4602}}{87}\right) \right)$$

olarak bulunur.



Şekil 2.8. Modifiye DTM den elde edilen X_2 'in beklenendeğerinin zamana bağlı değişimi

2.11. İki Boyutlu Zeeman Modeli İçin Varyans

$$Var[x_1(t)] = \sum_{j=0}^3 \sum_{i=0}^3 cov(x_1(i)x_1(j))t^{i+j}$$

$$cov(x_1(i)x_1(j)) = E[(x_1(i)x_1(j))] - E[x_1(i)]E[x_1(j)]$$

formülünden yararlanarak iki boyutlu model için varyansı aşağıdaki gibidir.

$$Var[x_1(t)] = 1 - \frac{64}{3}t + \frac{6413}{9}t^2 - \frac{1377872}{45}t^3 \quad (81)$$

(81) denkleminde Laplace-Pade yaklaşımı uygularsak;

$$M_1 = \frac{1}{9214102514093} e^{\left(-\frac{5174344t}{65475}\right)} \left(9214102514093 \cosh\left(\frac{t\sqrt{18428205028186}}{65475}\right) + 1888772\sqrt{18428205028186} \sinh\left(\frac{t\sqrt{18428205028186}}{65475}\right) \right)$$

bulunur.

$$V[x_2(t)] = 1 - \frac{11}{3}t^2 + \frac{250}{9}t^3 \quad (82)$$

(82) denkleminde Laplace-Pade yaklaşımı uygularsak;

$$M_2 = \frac{1}{44213} e^{\left(-\frac{125t}{11}\right)} \left(44213 \cosh\left(\frac{t\sqrt{132639}}{33}\right) + 125\sqrt{132639} \sinh\left(\frac{t\sqrt{132639}}{33}\right) \right)$$

bulunur.

2.12. Sadece Y_0 ve Y_1 Başlangıç Şartlarına Bağlı Rastgele Zeeman Modeli için Beklenen Değer

(1) denkleminde Y_0 ve Y_1 başlangıç koşulları normal dağılıma sahip bağımsız rastgele değişkenler yani $Y_0, Y_1 \in N(\mu, \sigma^2)$ olsun. (19) dan yararlanılırsa; X_1 yaklaşık çözümünün beklenen değeri;

$$E[X_1] = 1 - 9t + \frac{23}{6}t^2 - \frac{133825}{30}t^3 + \frac{1046921}{6}t^4 - \frac{506115583}{60}t^5 + \left(\frac{1353423105937}{300}\right)t^6 \quad (83)$$

şeklinde bulunur.

(83) denkleminde Laplace-Pade uygulanırsa;

$$M_1 = 0.2000000000 \cdot 10^{-9} (0.4999999999 \cdot 10^{10} \cosh(1.601937785t) - 0.2719217367 \cdot 10^{11} \sinh(1.601937785t)) e^{(-0.2879659092t)}$$

Benzer şekilde X_2 yaklaşık analitik çözümün beklenen değeri;

$$E[X_2] = 1 + t - \frac{9}{2}t^2 + \frac{302}{6}t^3 - \frac{44554}{40}t^4 + \frac{13239481}{400}t^5 - \frac{4741899787}{3600}t^6 \quad (84)$$

(84) denklemine Laplace-Pade yaklaşımı uygulanırsa;

$$M_2 = \frac{1}{35187} e^{\left(\frac{311t}{20}\right)} \left(35187 \cosh\left(\frac{3t\sqrt{11729}}{20}\right) + 331\sqrt{11729} \sinh\left(\frac{3t\sqrt{11729}}{20}\right) \right)$$

fonksiyonu elde edilir.

2.13. Sadece T Parametresinin Rastgele Seçildiği Zeeman Modeli İçin Beklenen Değeri

(1) denkleminde T parametresini beta dağılımına göre alırsak ve (64) ü kullanırsak X_1 yaklaşık analitik çözümün beklenen değeri;

$$E[X_1] = 0,13333t - 0,094666t^2 + 0,13331217t^3 - 0,0752079t^4 + 0,001027t^5 \quad (85)$$

şeklinde bulunur.

(85) denklemine Laplace-Pade uygulanırsa;

$$M_1 = 0.06294460461 e^{(-0.7100180005t)} \sinh(2.118211734t)$$

fonksiyonu elde edilir.

Benzer şekilde X_2 analitik çözümünün beklenen değeri;

$$E[X_2] = 0,03155527t^3 - 0,0109953t^4 - 0,006615299t^5 \quad (86)$$

olarak beklenen değeri bulunur.

$$\begin{aligned} M_2 = & -0.01789421352 e^{((0.2901632671-1.850346330I)t)} \\ & - 0.005312919295 I e^{((0.2901632671-1.850346330I)t)} \\ & - 0.01789421352 e^{((0.2901632671+1.850346330I)t)} \\ & + 0.005312919295 I e^{((0.2901632671+1.850346330I)t)} \\ & + 0.03578842705 e^{(0.8395442558t)} \end{aligned}$$

fonksiyonu bulunur.

2.14. Üç Boyutlu Zeeman Modeli

Y_1, Y_2 ve Y_3 normal dağılıma sahip başlangıç şartları, ξ, μ, θ ise beta dağılımına sahip rastgele değişkenler olsun. O halde; (2) denklemini ele alalım.

Bu problem için bize gerekli olan değerleri bulalım. (63) ve (64)'teki $E[Y_1] = E[Y_2]$ değerlerini daha önceden bulmuştuk. Aynı değerler $E[Y_3]$ için de geçerlidir.

$\xi, \mu, \theta \sim B(\xi, \mu, \theta)$ olduğundan burada $\xi = 2, \mu = 2, \theta = 1$ dir. $\alpha = 1, \beta = 1$ rastgele seçelim. ξ, μ, θ beta dağılımına sahip olduğundan beta dağılımı özelliklerini kullanırsak (64) ten;

$$\begin{aligned} E[\xi] &= E[\mu] = E[\theta] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{1}{2} \\ E[\xi^2] &= E[\mu^2] = E[\theta^2] = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)} = \frac{1}{3} \\ E[\xi^3] &= E[\mu^3] = E[\theta^3] = \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)} = \frac{1}{4} \\ E[\xi^4] &= E[\mu^4] = E[\theta^4] = \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta + 3)} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned} \quad (87)$$

Bu bilgileri kullanarak 3 boyutlu model için X_1, X_2 ve X_3 ün beklenen değerlerini bulalım.

$$\begin{aligned} E[X_1] &= E[Y_1] + \frac{1}{2}E[Y_1]E[\mu]E[Y_2]t^2 - \frac{1}{2}E[Y_1]E[\xi]E[Y_3]t^3 - \frac{2}{3}E[Y_1]E[\xi]E[Y_3]t^3 \\ &\quad - \frac{1}{6}E[\xi]E[\mu]E[Y_1^2]t^3 - E[Y_1]E[Y_2]t + \frac{1}{2}E[Y_2]E[Y_3]t^2 + \frac{1}{2}E[Y_1^2]E[\xi]t^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}E[Y_1^2]E[Y_1]t^2 + 2E[Y_2]E[Y_1^3]t^2 + \frac{3}{2}E[Y_1^2]E[Y_3]t^2 - E[Y_3]t - E[Y_1^3]t \\ &\quad - \frac{1}{2}E[Y_2]t^2 + \frac{1}{2}E[\theta]t^2 + \frac{3}{2}E[Y_1^5]t^2 + \frac{1}{6}E[Y_2^2]t^3 - \frac{5}{2}E[Y_1^7]t^3 \\ &\quad - \frac{1}{6}E[Y_2]E[\theta]t^3 + \frac{1}{6}E[Y_1]E[\xi]t^3 + \frac{1}{6}E[\mu]E[Y_2]t^3 - \frac{1}{6}E[Y_2^2]E[Y_3]t^3 \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
& -\frac{1}{6}E[Y_2^3]E[Y_1]t^3 - \frac{13}{6}E[Y_2^2]E[Y_1^3]t^3 - \frac{9}{2}E[Y_2]E[Y_1^5]t^3 + \frac{1}{2}E[Y_1^2]E[Y_2]t^3 \\
& -\frac{1}{2}E[Y_1^2]E[\theta]t^3 - \frac{7}{2}E[Y_1^4]E[Y_3]t^3 - E[Y_3^2]E[Y_1]t^3 - E[\xi]E[Y_1^4]t^3 \\
& -\frac{1}{6}E[Y_2]E[\mu^2]E[Y_1]t^3 - \frac{1}{3}E[Y_3]E[\mu]E[Y_2] - \frac{1}{2}E[Y_1]E[\mu]E[Y_2^2] \\
& -\frac{5}{6}E[Y_1^3]E[\mu]E[Y_2] \\
& = 1 + (1 - 1 - 4)t + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 8 + 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 39\right)t^2 + \left(-\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{12} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \right. \\
& 580 - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{52}{3} - 117 + 1 - \frac{1}{2} - 35 - 2 - 5 - \frac{1}{18} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{5}{3}\left.)t^3 \right. \\
& \quad \left. = 1 - 4t + \frac{207}{4}t^2 - \frac{749}{36}t^3 \dots \right. \tag{88}
\end{aligned}$$

(88) denkleminde Laplace-Padé uygularsak;

$$\begin{aligned}
M1 := & \frac{1}{5267719} e^{\left(\frac{347t}{210}\right)} (5267719 \cosh\left(\frac{t\sqrt{5267719}}{210}\right) \\
& - 1187\sqrt{5267719} \sinh\left(\frac{t\sqrt{5267719}}{210}\right))
\end{aligned}$$

olur.

Benzer şekilde X_2 yaklaşık analitik çözümünün beklenen değeri,

$$\begin{aligned}
E[X_2] = & E[Y_2] + E[Y_1]E[\xi]t - E[Y_2]E[\mu]t + \frac{1}{2}E[\xi]E[Y_3]t^2 + \frac{1}{2}E[\xi]E[Y_1]E[Y_2]t^2 + \\
& \frac{1}{2}E[Y_1^3]E[\xi]t^2 + \frac{1}{2}E[\mu]E[\xi]E[Y_1]t^2 + \frac{1}{2}E[\mu^2]E[Y_2]t^2 + \frac{1}{6}E[\xi]E[Y_2]t^3 - \frac{1}{6}E[\theta]E[\xi]t^3 - \\
& \frac{1}{6}E[\xi^2]E[Y_1^2]t^3 - \frac{1}{3}E[\mu]E[\xi]E[Y_1]E[Y_2]t^3 - \frac{1}{6}E[\xi]E[Y_2]E[Y_3]t^3 - \frac{1}{6}E[\xi]E[Y_1]E[Y_2^2]t^3 - \\
& \frac{2}{3}E[\xi]E[Y_1^3]E[Y_2]t^3 - \frac{1}{2}E[\xi]E[Y_1^2]E[Y_3]t^3 - \frac{1}{2}E[\xi]E[Y_1^5]t^3 - \frac{1}{6}E[\mu]E[\xi]E[Y_3]t^3 - \\
& \frac{1}{6}E[\mu]E[\xi]E[Y_1^3]t^3 - \frac{1}{6}E[\mu^2]E[\xi]E[Y_1]t^3 - \frac{1}{6}E[\mu^3]E[Y_2]t^3 \\
& = 1 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)t + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{6}\right)t^2 \\
& \quad + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{24} - \frac{2}{9} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - \frac{4}{3} - \frac{1}{2} - \frac{13}{2} - \frac{1}{24} - \frac{1}{6} - \frac{1}{36} - \frac{1}{24}\right)t^3 \\
& \quad E[X_2] = 1 - t + \frac{41}{24}t^2 - \frac{317}{36}t^3 \tag{89}
\end{aligned}$$

bulunur. (89) denkleminde Laplace-Pade yaklaşımı uygulanırsa;

$$M1: = \frac{1}{441532} e^{\left(-\frac{593t}{58}\right)} \left(441532 \cosh\left(\frac{t\sqrt{662298}}{87}\right) + 535\sqrt{662298} \sinh\left(\frac{t\sqrt{662298}}{87}\right) \right)$$

fonksiyonu elde edilmiş olur.

Şimdi X_3 yaklaşık analitik çözümünün beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E[X_3] &= E[Y_3] + E[Y_2]t - E[\theta]t - \frac{1}{2}E[\xi]E[Y_1]t^2 - \frac{1}{2}E[\mu]E[Y_2]t^2 + \frac{1}{6}E[Y_3]E[\xi]t^3 \\ &\quad + \frac{1}{6}E[Y_2]E[\xi]E[Y_1]t^3 + \frac{1}{6}E[\mu]E[\xi]E[Y_1]t^3 + \frac{1}{6}E[\mu^2]E[Y_2]t^3 \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)t + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)t^2 + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24}\right)t^3 \\ E[X_3] &= 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{15}{24}t^3 \end{aligned} \quad (90)$$

şeklindedir.

Aynı şekilde (90) denkleminde Laplace-Pade yaklaşımı uygulanırsa;

$$M1: = \frac{1}{359} e^{\left(-\frac{17t}{10}\right)} \left(359 \cosh\left(\frac{t\sqrt{359}}{10}\right) + 22\sqrt{359} \sinh\left(\frac{t\sqrt{359}}{10}\right) \right)$$

fonksiyonunu elde edilir.

2.15. Üç Boyutlu Zeeman Modeli İçin Varyans

(85) modeli için varyans (63) ve (87) denklemlerinden yararlanarak varyans aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} V[x_1(t)] &= 1 - 7t + \frac{612}{4}t^2 - \frac{220129}{36}t^3 \\ V[x_2(t)] &= 1 - t + \frac{15}{2}t^2 - \frac{1008}{72}t^3 \\ Var[x_3(t)] &= 1 + \frac{13}{12}t^2 - \frac{7}{18}t^3 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

2.16. İki Ve Üç Boyutlu Stokastik Zeeman Kalp Atış Modeli

Stokastik süreç kavramı sistematik olarak A.N. Kolmogorov ve A.Y. Hinçin gibi ünlü olasılıkçılar tarafından ortaya konulmuştur. A.N. Kolmogorov günümüzde Markov tipli süreç olarak adlandırılan stokastik süreçlere ilişkin problemlere büyük ilgi gösterilmektedir. Bu alanda emeği geçen; N. Wiener, W. Feller, J. Dobb, I.I. Gihman, A.V. Skohorod, T.A. Sarımsakov, E. Çinlar, V.S. Korolyuk v.s.bilim insanları çalışmalar yapmıştır.

1828 yılında İskoçyalı botanikçi Robert Brown, sıvı içerisindeki polen taneciklerinin ani yön değiştirmeler ve hızlanmalar yaparak sıra dışı hareket ettiğini gözlemledi. Daha sonra bu hareket, polenin sıvı molekülleriyle rasgele yaptığı çarpışmalar sonucu hareket etmesi olarak açıklandı. Bu hareketi matematiksel olarak açıklamak için raslantı(rasgele) süreci kavramı kullanıldı. 1905 yılından Einstein ve Smoluchowski'nin yaptığı çalışma ile $x(t)$ 'yi raslantı süreci olarak ele almış, $x(t)-x(0)$ 'ın sıfır ortalamalı, $|t|$ varyanslı Gaussian dağılımı olduğunu bulmuştur. Einstein bunun için $\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{2\partial s^2}$ difüzyon denklemini oluşturmuştur. Bu denklemin temel çözümü $p(t,x,y)$ dir. Bu difüzyon deklemini $t = 0$ da $\delta(x - y)$ ye eşittir. Buradaki $\delta(x)$ Dirac'ın delta fonksiyonudur. Bu frekans dağılım fonksiyonu ile parabolik kısmi diferensiyel denklem arasındaki bağ daha sonra Smoluchowski, Fokker, Planck, Ornstein, Burger, Chapman, Kolmogorow, Feller gibi fizikçi ve matematikçiler tarafından incelenmiştir.

1900 yılların başında Brownian hareketi Einstein tarafından keşfedildi. Bu hareketin diferensiyel denklem yardımıyla dinamik modeli fizikçi Langevin ve Smoluchovsky tarafından yapıldı. Onlar $\frac{dx}{dt} = a(t, x)$ deterministik adi diferensiyel denklemini yerine,

$$\frac{dX(t)}{dt} = a(t, X(t)) + b(t, X(t))\xi_t$$

şeklindeki gürültülü diferensiyel denklemini elde ettiler. Burada $a(t, X(t))$ deterministik ve $b(t, X(t))$ yoğunluk çarpımı, ξ_t standart gauss rasgele değişkeni, $b(t, X(t)) \xi_t$ gürültü terimini ifade etmektedir. Burada ξ_t standart gauss rasgele değişkeninin türevi $d\xi_t(w) = dW(w(t))$ her yerde sürekli Wiener sürecidir. SDD'ler genellikle

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t$$

bu şekilde sembolik olarak gösterilir.

İntegral denklemide

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s) dW_s$$

bu şekilde yazılabilir.

Günümüzde kullanılan Brownian hareketi bu anlayışın zamana göre homojen stokastik sürece ve bunun yardımıyla tanımlanan artışları bağımsız olan sürece genişlemesidir. N.Winner bu stokastik süreci inceleyen ilk matematikçidir.

SDD kavramı difüzyonlar için olasılık yaklaşımı olarak Levy tarafından ortaya konulmuştur ve K.Ito tarafından başarılı çalışmalar yapılmıştır. 1940 yılında stokastik hesap K.Ito tarafından ortaya konulmuştur. Ito'nun çalışmasından bağımsız olarak, Gihman varlık ve teklik teoremleri ile birlikte SDD teorisini geliştirmiştir. 1961 de Ito bir SDD'in hem drift hemde difüzyon katsayılarının $\mathfrak{R}$ üzerinde Lipschitz koşullarını sağladığını gösterdi. Bu çalışmayı daha sonra SDD'in çözümlerin varlığı ve tekliği izledi. Japon matematikçi K.Ito'dan başka Rus matematikçi Gihman ve Skorokhod SDD'ler teorisi ile ilgili çalışmalar yapmışlardır(1968). Arnold (1974) SDD'lerin tanım ve çözüm yöntemlerine detaylı bir şekilde değinmişlerdir. Yamada (1986), Milstein (1978), SDD'lerin analitik çözümleri ile ilgilenmişler ve difüzyon süreçleri için birinci ve ikinci mertebeden SDD'leri ele almışlardır. Milstein(1974) ve Rümelin(1982) SDD'lerin sayısal çözümleri üzerinde durmuşlardır. Stokastik diferensiyel denklemlerin simülasyonu ile ilgili çalışmayı[Milstein,1995, Talay, 1995, Artemiev ve Averina, 1997, Kloeden ve Platen, 1999 ve Schurz, 2002] yapmışlardır. SDD'in sayısal integrasyonuna giriş algoritmasını[Desmond J. Higham, 2001]

Dönüşüm kullanılarak bazı stokastik diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri üzerine bir çalışma yaptı[Magdy A. El-Tawil,2004]. Ito stokastik diferensiyel denklemlerin çözümleri üzerine bir çalışma yaptı[Javier Villarroel,2003]. [Jankovic. S, Ilıç. D,2003]. SDD çözümleri için analitik yaklaşımı üzerine bir çalışma yaptı. [Fadrani. V.R,2003] Kısmi SDD'ler için hesaplama algoritması çalışmasını yaptı. Geri müdahaleli SDD'lerin çözümlerin tekliği çalışması yapıldı[Constantin. Gh,2004]. İndeks 1'in Stokastik diferensiyellerin cebirsel denklemleri ve devre simülasyonunda uygulamaları[Winkler. R, 2003]Değişmeli gütültülü Stratonovich SDD'ler için Runge-Kutta Metodunu kullandı[Röbler. A,2003]. Stokastik diferensiyel denklemlerin ikinci mertebeden Runge-Kutta yöntemleriyle Ortalama-Kare kararlılığı[Tocino. A,2004]

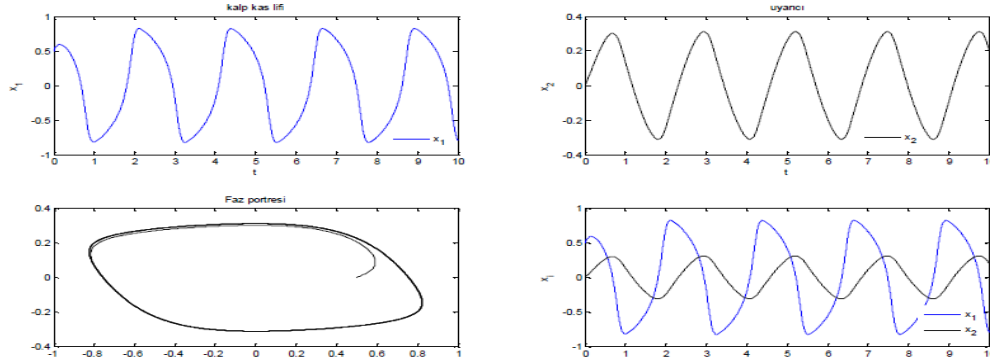
E.C. Zeeman ‘ın modellerinden oluşan deterministik diferansiyel denklem sistemleri, kalp atış hareketini iki ya da üç denklemle açıklar. Bu modellere benzer olarak diğer bir çok deterministik modeller, biyoloji, tıp fizik gibi alanların çeşitli dinamiklerinin analizinde yararlı bilgi sağlar fakat bu modellerin bazı bileşenlerinin gerçek hayatta stokastik hareket gösterdiği bilinir. Bazı deterministik modellerin parametreleri ya da bazı sistemlerin başlangıç değerleri rastgele bir yapıya sahiptir. (Merdan et al., nature 2017). Stokastik diferansiyel denklemleri elde etmek için stokastik etkilerin kullanımı, model içindeki bu alanların tüm rastgeleliğini modellemesini sağlar. Stokastik modeller, bakteriyel direnç, Malaria hastalığı SIRS bulaşıcı hastalıklar gibi (Merdan et al., 2017; Bekiryazici, Kesemen, Merdan, 2017; Lahrouz et al., 2015). Modellerin analizinde ve daha öncesinde kullanılmıştır. Bu çalışmada, E.C. Zeeman’ın kalp atış modellerinde stokastik etkileri kullanarak, kalbin stokastik hareketini modellemek için stokastik diferansiyel denklem sistemini oluşturacağız.

Bu bölümde iki ve üç boyutlu Zeeman modeline beyaz gürültü (Wiener süreç) eklenerek incelenecektir. Bu iki modelin yaklaşık çözümlerini bulmak için Euler–Maruyama and Milstein nümerik metodları kullanılacaktır. Stokastik modellerin çözümleri stokastik beyaz gürültünün etkisi altında deterministik sonuçlarla karşılaştırılacaktır. Her iki yöntemden elde edilen sonuçlar aynı zamanda iki durum için de yorum yapabilmek için karşılaştırılacaktır.

Aşağıda Zeeman kalp atış modelinin deterministic sonuçları şekildeki gibi gösterilmektedir.

2.16.1. Deterministik Sonuçlar

MATLAB’ın düşük düzen içinde var olan metodları, deterministik (1) denklem sistemi için aşağıdaki sonuçları elde etmek için kullanılır. (Şekil 2.9.)



Şekil 2.9. x_1, x_2 in deterministik sonuçları ve faz portesi

Deterministik modelin bileşenlerinin ekstremum değerleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir. (Tablo 2.1.)

Tablo 2.1. Deterministik çözümlerin ekstremum değerleri

Değişken	Maksimum	Zaman	Minimum	Zaman
$x_1(t)$	0.821861	5.9000	-0.821905	7.4200
$x_2(t)$	0.404943	6.9200	-0.404872	5.4000

$x_1(t)$ bileşeni $t = 7.4200$ anında -0.821905 minimum değerini alırken, $t = 5.9000$ anında 0.821861 maximum değerini alır.

$x_2(t)$ bileşeni $t = 5.4000$ anında -0.404872 minimum değerini alırken, $t = 6.9200$ anında 0.404943 maximum değerini alır.

2.16.2. İki boyutlu Stokastik Model

Rastgele diferansiyel denklemlerden oluşan rastgele modeller sadece denklemlerle birlikte başlangıç değerlerinin katsayılarının rastgeleliğini modeller. Ancak stokastik diferansiyel denklemleri elde etmek için stokastik etkilerin kullanımı üzerinde düşünülen doğal olaylarda tüm gürültünün modellenmesini sağlar. Bu yüzden biz Wiener süreçlerine göre gürültü koşullarını içeren stokastik diferansiyel denklemleri kullanacağız. Yeni oluşturulan stokastik sistemlerin sayısal çözümleri, olayın stokastikliğini incelemek için faydalı bilgi sağlar.

$t_0 \leq t \leq T$ üzerinde $X_0 = X_{t_0}$, başlangıç koşulu ile verilen stokastik diferansiyel denklemin çözümü olan $X = X_t, t_0 \leq t \leq T$ stokastik sürecini ele alalım. $[t_0, T]$ aralığının

$t_0 = \tau_1 < \dots < \tau_n < \dots < \tau_N = T, (n = 0, 1, 2, \dots, N - 1)$ şeklindeki ayrışması için Euler-Maruyama yaklaşımı

$$Y_{n+1} = Y_n + a(\tau_n, Y_n)(\tau_{n+1} - \tau_n) + b(\tau_n, Y_n)(W_{n+1} - W_n).$$

Ardışık yöntemini sağlayan bir $Y = Y_t, t_0 \leq t \leq T$ stokastik sürecidir. Milstein yöntemi de analizler için kullanılacaktır. Milstein yaklaşımı,

$$Y_{n+1} = Y_n + a + b\Delta W + \frac{1}{2}bb'(\Delta W)^2,$$

İterasyonunu sağlayan $t_0 \leq t \leq T$ için $Y = Y_t$ sürecidir. Burada $\Delta = (\tau_{n+1} - \tau_n)$ dir. (Kloeden, Platen, 1992). Bu iki metod, $W_i, i = 1, 2$ bağımsız Wiener süreçlerinde aşağıdaki stokastik modellerin sayısal incelenmesi için kullanılacaktır.

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon}(x_1^3 - Tx_1 + x_2)dt + Y_1x_1(t)dW_1(t) \quad (91)$$

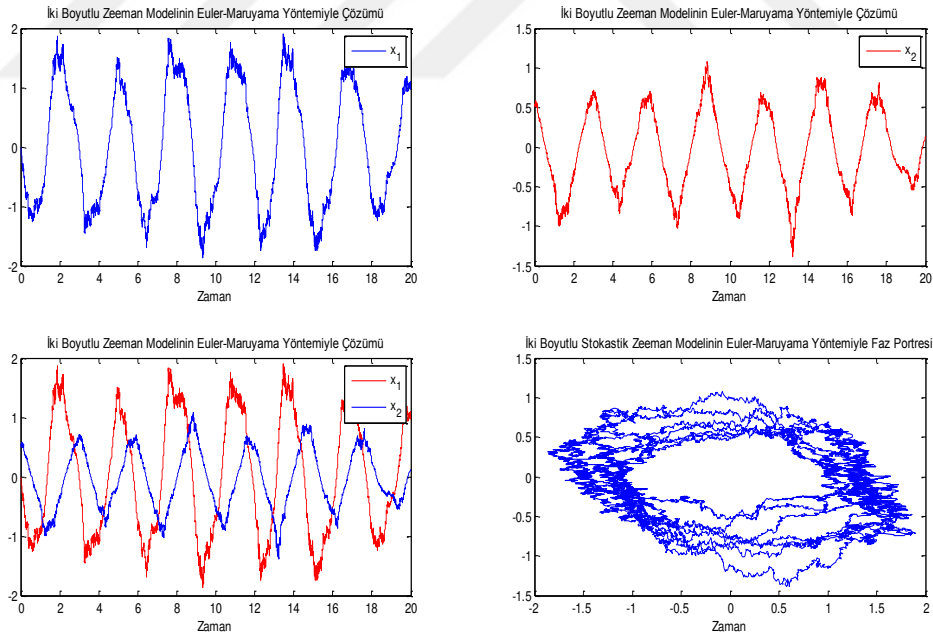
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = (x_1 - x_a)dt + Y_2x_2(t)dW_2(t)$$

(91) Denkleminde stokastik denklemin diffusion katsayıları küçük miktarlar olarak alınacaktır çünkü küçük dağılımları olan bir model, deterministik modellerin sonuçları ve alanların gerçek hayattaki çözümlerinin küçük farklarını modellemek için ihtiyaç duyulur.

2.16.3. Stokastik Sonuçlar

(91) stokastik denkleminin Euler Maruyama ve Milstein yöntemleriyle elde edilen çözümleri aşağıdaki gibi verilmiştir.

Euler-Maruyama Yöntemi:(91) stokastik denkleminin Euler-Maruyama Yöntemi ile yaklaşık bir çözümü MATLAB programı yardımıyla elde edilir. Bu yaklaşımın çözümleri aşağıda görüldüğü gibidir. (Şekil 2.10.) Yaklaşımın uç değerleri Tablo 2.2 ‘de verilmiştir.



Şekil 2.10. İki Boyutlu Zeeman Modeli İçin Euler-Maruyama Yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümler

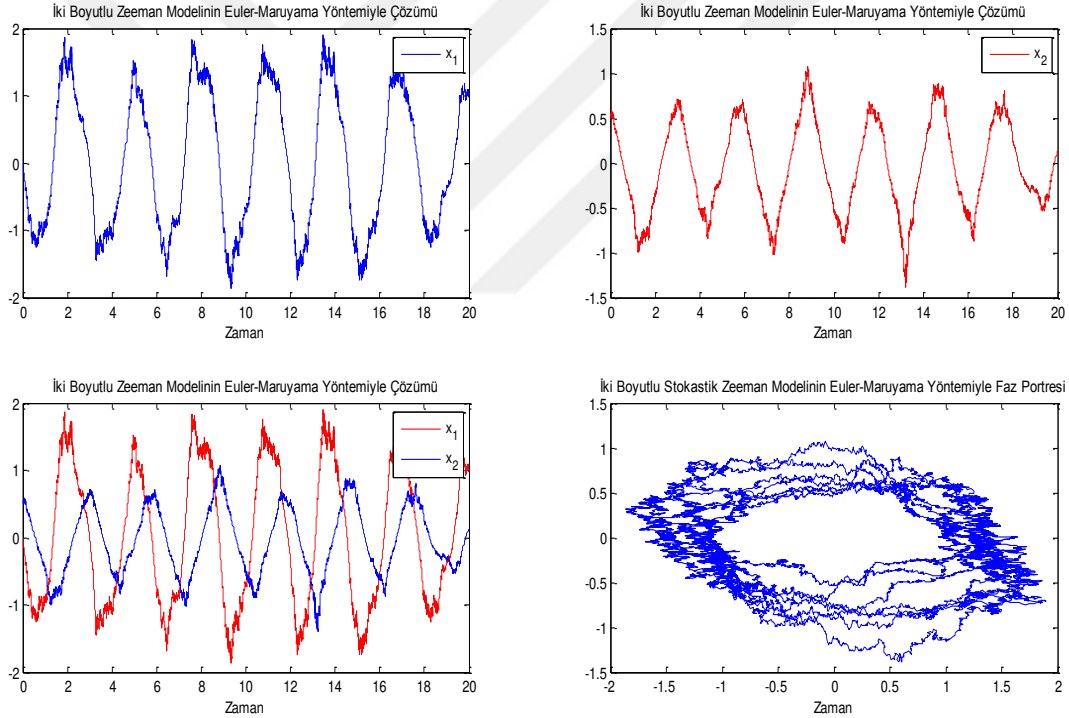
Tablo 2.2. Çözümlerin uç değerleri

Değişken	(Maksimum Değer , Zaman)	(Minimum Değer, Zaman)
$x_1(t)$	(1.63652,1.8660)	(-1.97532,8.9100)
$x_2(t)$	(1.0547,8.5360)	(-0.894728,7.2480)

$x_1(t)$ bileşenit = 8.9100 anında -1.97532minimum değerini alırken, $t = 1.8660$ anında 1.63652 maksimum değerini alır.

$x_2(t)$ bileşenit = 7.2480 anında -0.8947728minimum değerini alırken, $t = 8.5360$ anında 1.0547 maksimum değerini alır.

Milstein Yöntemi:(91) stokastik denklem sistemi için yaklaşık çözümler Milstein yöntemiyleMATLAB ‘de elde edilir (Şekil 2.11.) ve bu yaklaşık çözümlerin uç değerleri aşağıda verilmiştir. (Tablo 2.3.)



Şekil 2.11. İki Boyutlu Zeeman Modeli için Milstein yöntemiyle elde edilen yaklaşıkçözümler

Tablo 2.3. Çözümlerin uç değerleri

Değişken	(Maksimum Değer, Zaman)	(Minimum Değer, Zaman)
$x_1(t)$	(2.36291,8.3540)	(-2.43221,9.5960)
$x_2(t)$	(1.59703,9.6160)	(-1.85195,3.9760)

$x_1(t)$ bileşeni $t = 9.5960$ anında -2.43221 minimum değerini alırken, $t = 8.3540$ anında 2.36291 maksimum değerini alır.

$x_2(t)$ bileşeni $t = 3.9760$ anında -1.85195 minimum değerini alırken, $t = 9.6160$ anında 1.59703 maksimum değerini alır.

Aşağıda üç boyutlu Zeeman modeli için stokastik analiz yapılmaktadır.

2.16.4. Üç Boyutlu Zeeman Modeli İçin Deterministik Sonuçlar

İkiboyutlu modelin durumuna benzer (3) sistemi için uç değerler Tablo 2.4. te verilmiştir ve deterministik sonuçlaraşağıdaki gibidir.(Şekil 2.12.)

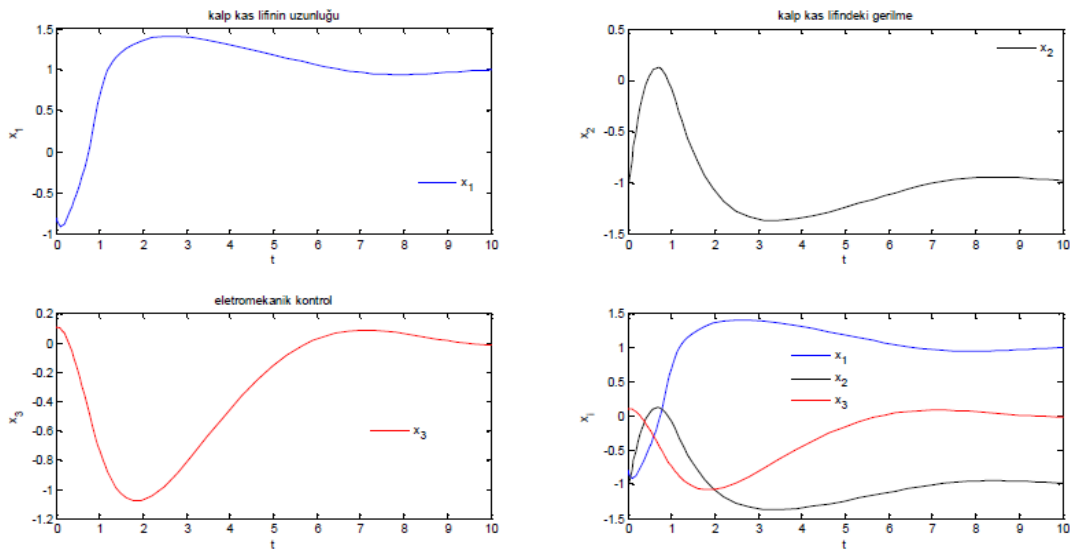
Tablo 2.4. (3) Deterministik çözümlerin uç değerler

Değişken	Maksimum	Zaman	Minimum	Zaman
$x_1(t)$	1.60908	3.5388	-0.833977	0.1488
$x_2(t)$	0.343799	0.9592	-1.57313	4.2874
$x_3(t)$	0.209643	9.0668	-2.05045	2.5360

$x_1(t)$ bileşeni $t = 0.1488$ anında -0.833977 minimum değerinalırken, $t = 3.5388$ anında 1.60908 maksimum değerinalır.

$x_2(t)$ bileşeni $t = 4.2874$ anında -1.57313 minimum değerini alırken, $t = 0.9592$ anında 0.343799 maksimum değerinalır.

$x_3(t)$ bileşeni $t = 2.5360$ anında -2.05045 minimum değerinalırken, $t = 9.0668$ anında 0.209643 maksimum değerinalır.



Şekil 2.12. Üç boyutlu Zeeman modelinin çözümleri

2.16.5. Üç Boyutlu Stokastik Zeeman Modeli

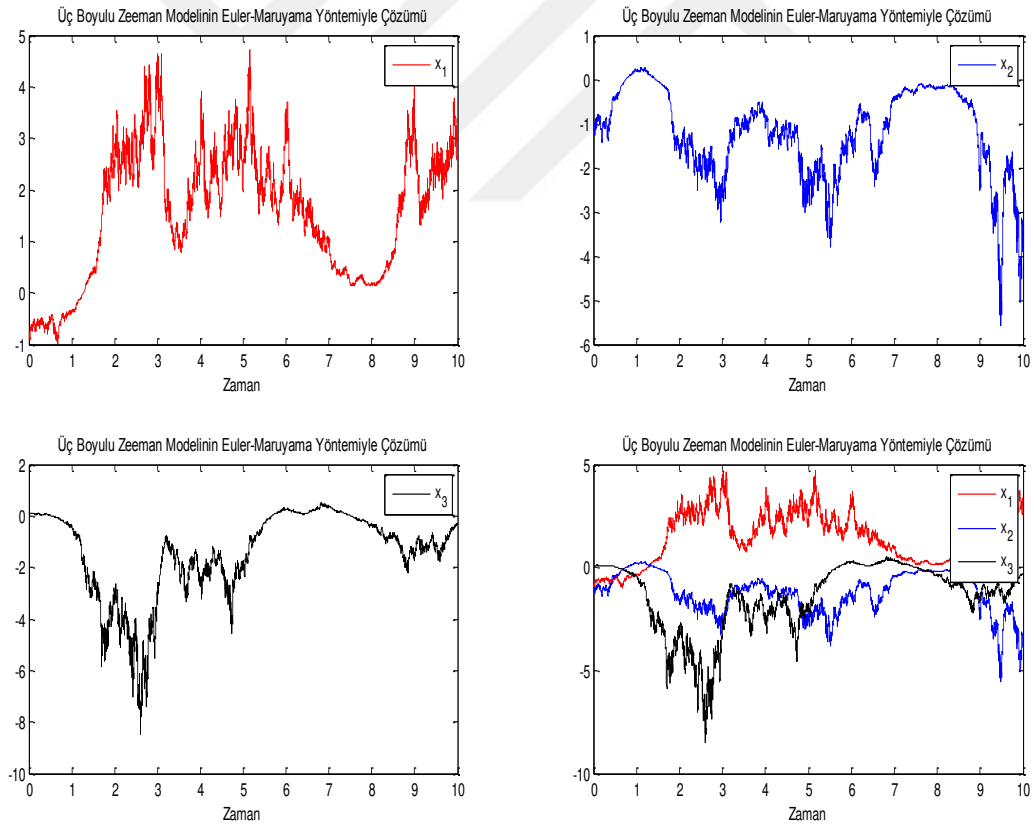
Stokastik model aşağıdaki gibi benzer yollarla elde edilir.

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= \frac{1}{\epsilon}(-x_1^3 - x_2x_1 - x_3)dt + \gamma_1x_1(t)dW_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= (-\beta x_1 - \delta x_2)dt + \gamma_2x_2(t)dW_2(t), \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= (-x_2 - \theta)dt + \gamma_3x_3(t)dW_3(t).\end{aligned}\tag{92}$$

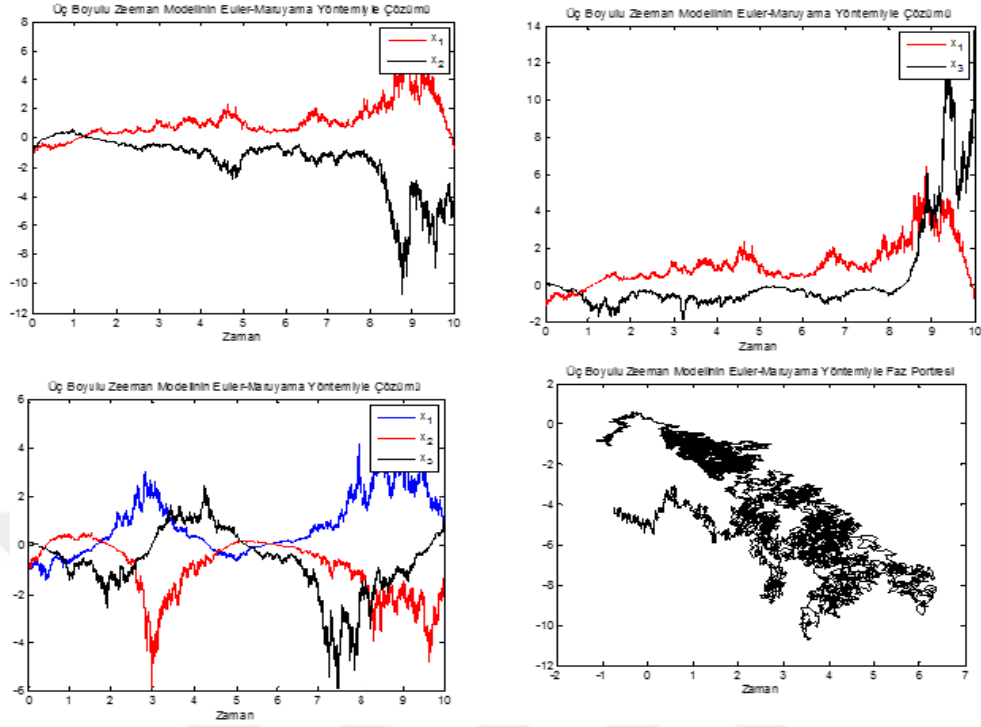
Burada $W_i, i = 1,2,3$ bağımsız Wiener süreçlerdir. Yine (92) sisteminin çözümlerini araştırmak için sayısal yöntemler kullanılacaktır.

2.16.6. Stokastik Sonuçlar

Stokastik modeli için sonuçlar Euler-Maruyama ve Milstein yöntemleriyle aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.13. Üç boyutlu Zeeman modeli için Euler - Maruyama Yöntemiyle yaklaşık çözümleri



Şekil 2.13. ün devamı

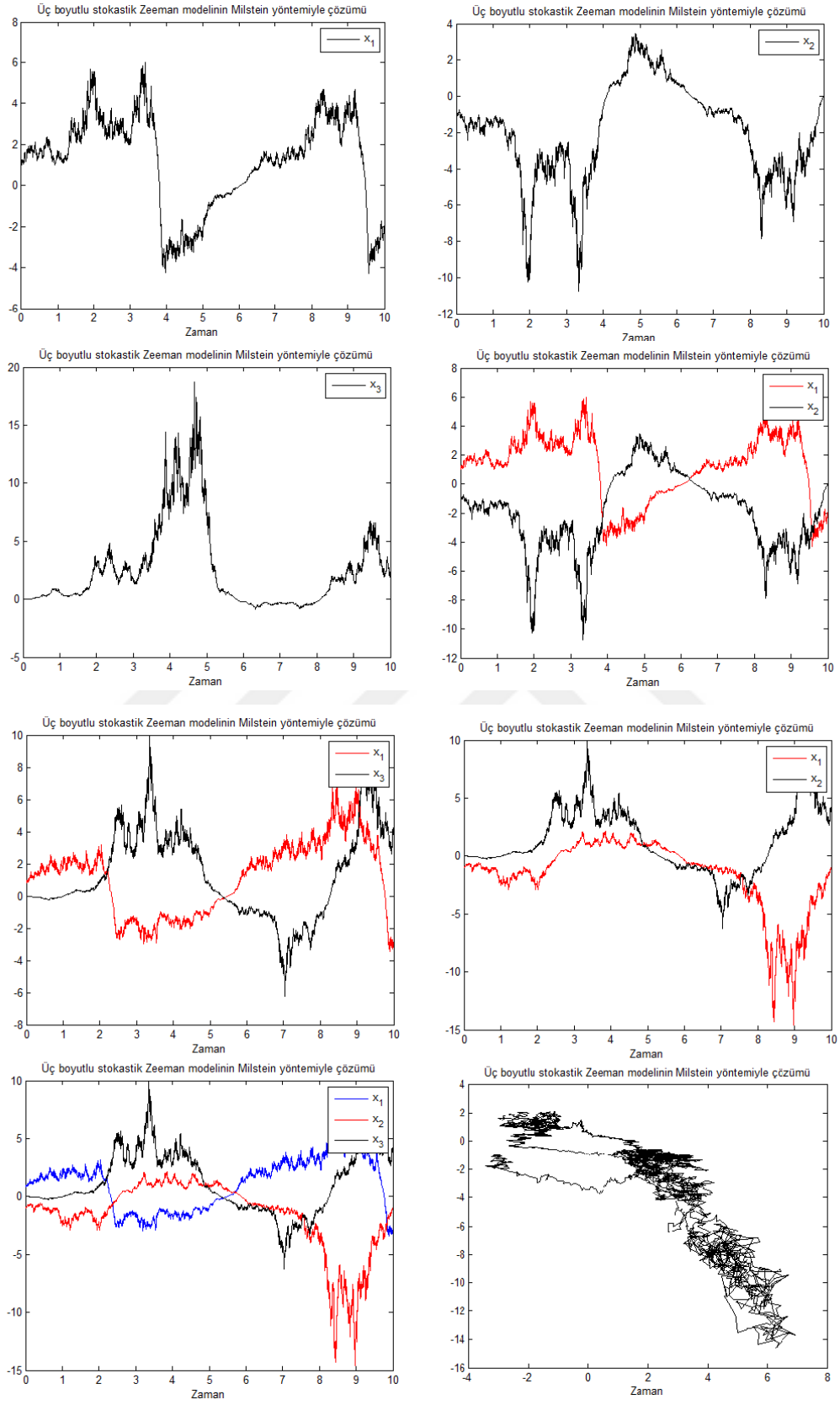
Tablo 2.5. Çözümlerin uç değerleri

Değişken	Maksimum	Zaman	Minimum	Zaman
$x_1(t)$	4.72285	5.1654	-0.993867	0.6702
$x_2(t)$	0.269405	1.1202	-5.57595	9.4878
$x_3(t)$	0.516564	6.8220	-8.49495	2.6036

$x_1(t)$ bileşeni $t = 0.6702$ anında -0.993867 minimum değerini alırken, $t = 5.1654$ anında 4.72285 maksimum değerini alır.

$x_2(t)$ bileşeni $t = 9.4878$ anında -5.57595 minimum değerini alırken, $t = 1.1202$ anında 0.269405 maksimum değerini alır.

$x_3(t)$ bileşeni $t = 2.6036$ anında -8.49495 minimum değerini alırken, $t = 6.8220$ anında 0.516564 maksimum değerini alır.



Şekil 2.14. Üç boyutlu zeeman modeli için Milstein yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümler

Tablo 2.6. Çözümlerin uç değerleri

Değişken	Maksimum	Zaman	Minimum	Zaman
$x_1(t)$	3.68199	3.8780	-2.36386	0.4800
$x_2(t)$	1.40226	0.9220	-3.6952	3.6620
$x_3(t)$	1.16324	4.2160	-5.71624	1.4840

$x_1(t)$ bileşeni $t = 0.4800$ anında -2.36386 minimum değerini alırken, $t = 3.8780$ anında 3.68199 maksimum değerini alır.

$x_2(t)$ bileşeni $t = 3.6620$ anında -3.6952 minimum değerini alırken, $t = 0.9220$ anında 1.40226 maksimum değerini alır.

$x_3(t)$ bileşeni $t = 1.4840$ anında -5.71624 minimum değerini alırken, $t = 4.2160$ anında 1.16324 maksimum değerini alır.

2.17. İki ve Üç Boyutlu Zeeman Modelinin Rastgele Analizi

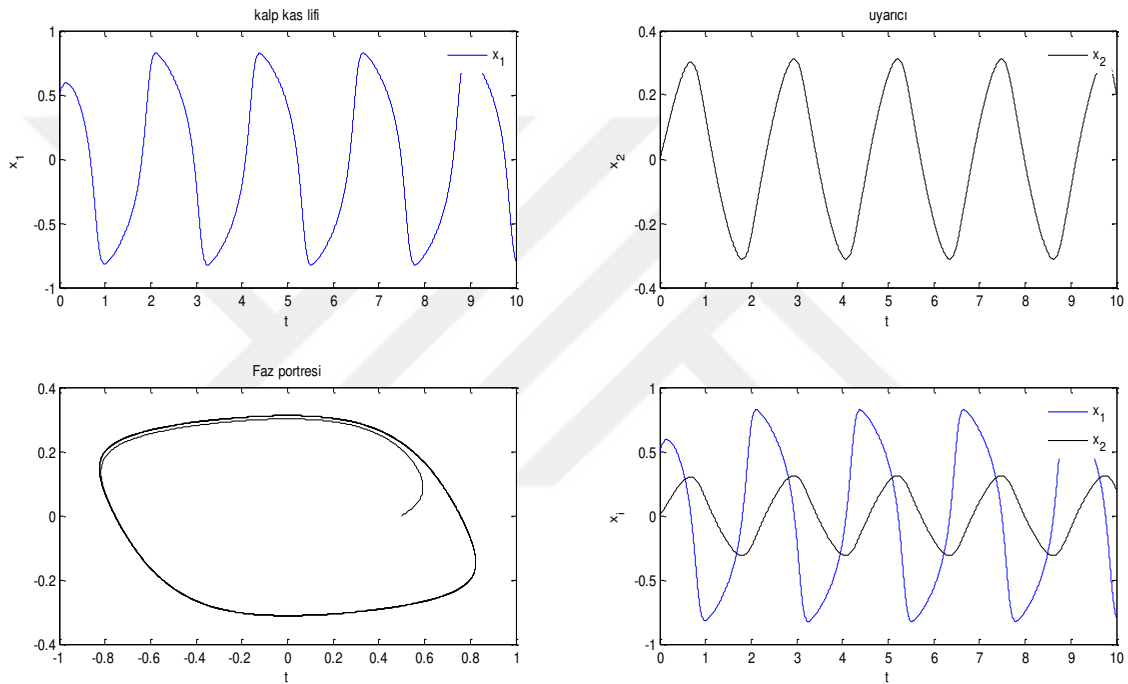
Bu bölümde iki ve üç boyutlu Zeeman modelinin parametrelerine rastgele etkiler eklenerek rastgele diferansiyel denklem sistemi oluşturulmuştur. Kalp atışı modelinin rastgele davranışını tanımlamak için bu denklemlerle rastgele bir model oluşturulur. Rastgele etki terimleri Gauss(normal) dağılımından seçilmektedir. Gauss(normal) dağılım efektleri altındaki rastgele model bileşenlerinin sayısal karakteristikleri hem iki hem de üç boyutlu Zeeman modelleri için incelenmiş ve bu iki olgu üzerinde yorumlar yapılmıştır. Sonuçlar aynı zamanda Zeeman 'ın deterministik ve rastgele modellerindeki değişimi gözlemlemek ve model bileşenlerin rastgele davranışlarını incelemek için kullanılmaktadır.

Deterministik modeller; biyokimya, ilaç, mühendislik gibi çeşitli yönleri analiz etmek için faydalı bilgiler sağlar, fakat bu modellerden bazılarının gerçek hayatta deterministik olmayan davranışlar sergiledikleri bilinmektedir. Özellikle, bazı deterministic modellerin parametreleri gerçek hayattaki verilerin istatistiksel analizi aracılığıyla belirlenir. Bu yüzden rastgele bir yapıya sahiptir. (Merdan et al., 2017). Katsayıların rastgele seçilmesiyle elde edilen rastgele modeller, rastgele diferansiyel denklemlerle ifade edilirler. Rastgele modeller, dang humması hastalığını, biyokimyasal etkileri ve daha fazlasını analiz etmek için kullanılır. (Bekiryazici et al., 2016; Bekiryazici et al., 2016b). E.C. Zeeman'ın kalp atış modelinde katsayılar beta dağılımından seçilerek elde edilen rastgele diferansiyel denklem sistemlerini ele alacağız.

Bu bölümde iki boyutlu Zeeman modeline katsayılar rastgele alınarak elde edilen rastgele model incelenmiş, elde edilen sonuçlar deterministik model ile karşılaştırılmıştır. Buna ilaveten üç boyutlu Zeeman modeli de rastgele hale getirilerek iki boyutlu modelinkine benzer analizler yapılacaktır.

2.17.1. Deterministik Sonuçlar

(1) de verilen deterministik Zeeman modeli için sayısal çözümler ve faz portresi Matlab programı yardımıyla elde edilmiştir. (Şekil 2.15.)



Şekil 2.15. $x_d = 0$ için x_1, x_2 nin deterministik sonuçları ve faz portresi

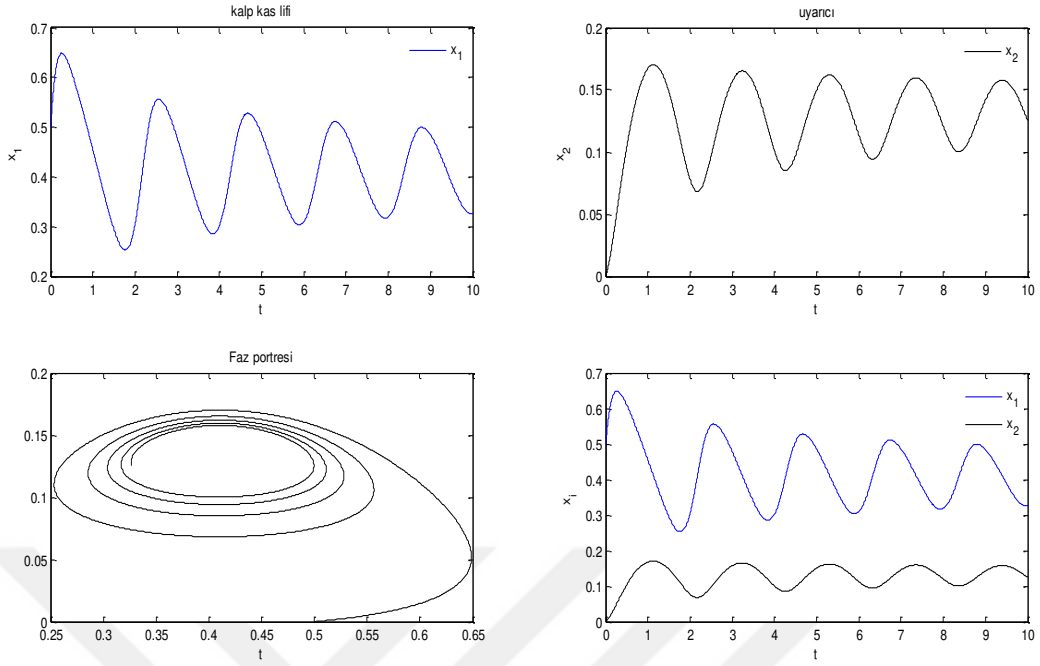
$x_d = 0$ deterministik model bileşenlerinin maximum ve minimum çözümleri aşağıdaki gibi Tablo 2.7. de gösterilmiştir.

Tablo 2.7. $x_d = 0$ için deterministic çözümlerin uç değerleri

Değişken	Maksimum	Zaman	Minimum	Zaman
$x_1(t)$	0.8240	8.966	-0.8240	5,355
$x_2(t)$	0.3114	7,509	-0.3114	6,509

$x_1(t)$ bileşeni $t = 5.355$ anında -0.8240 minimum değerini alırken, $t = 8.966$ anında 0.8240 maksimum değerini alır.

$x_2(t)$ bileşeni $t = 6,509$ anında -0.3114 minimum değerini alırken, $t = 7,509$ anında 0.3114 maksimum değerini alır.



Şekil 2.16. $x_d = 0.41$ için x_1, x_2 nin deterministik çözümleri ve faz portresi

$x_d = 0.41$ deterministik model bileşenlerinin maximum ve minimum çözümleri aşağıdaki gibi Tablo 2.8. de gösterilmiştir.

Tablo 2.8. $x_d = 0.41$ için deterministic çözümlerin uç değerleri

Değişken	Maksimum	Zaman	Minimum	Zaman
$x_1(t)$	0.6487	0.27	0.2534	1.82
$x_2(t)$	0.1701	1.154	0	0

$x_1(t)$ bileşeni $t = 1.82$ anında 0.2534 minimum değerini alırken, $t = 0.27$ anında 0.6487 maksimum değerini alır.

$x_2(t)$ bileşeni $t = 0$ anında 0 minimum değerini alırken, $t = 1.118$ anında 0.1701 maksimum değerini alır.

2.17.2. İki Boyutlu Rastgele Model

Deterministik modelleme çalışmalarında bazı parameter değerleri istatistiksel analizlerin doğrultusunda belirlenmiş, ortalama değerleri deterministik katsayılar olarak belirlenmiştir. Ancak, istatistiksel analiz bu parametrelerin yardımıyla değerlerinin gerçek hayattaki dağılımını belirlemek için standart sapma ve ortalaması hesaplanarak karar verilmiştir. Örneğin, tipik gevşemiş lif uzunluğunu tanımlayan parameter x_d asıl çalışmada 0.041 olan sabit bir değerle birlikte deterministik bir parameter olarak kullanılmıştır. Ancak gevşemiş lif uzunluğunun farklı insanlar için farklı değerler alacağı açıktır.

Bir diferansiyel denklem üç yolla rastgele diferansiyel denkleme dönüştürülür: Rastgele başlangıç değerleri, homojen olmayan kısımlar ve rastgele katsayılar kullanılarak. (Soong, 1973). Katsayılar rastgele alınarak oluşturulan model Stokastik efektli rastgele diferansiyel denklem sistemine eklenir.

Yeni rastgele katsayıları tanımlamak için

$$T \sim N(a_1, s_1^2), \epsilon \sim N(a_2, s_2^2), x_d \sim N(a_3, s_3^2)$$

olan normal dağılım kullanılacaktır. Burada $a_i, i = 1,2,3$ ve $s_i^2, i = 1,2,3$ bağımsız ve normal dağılmış rastgele parametrelerin değişkenleri ve ortalamalarıdır.

Parametreler için teorik bir %5 standart sapma kullanarak, parametreleri şöyle ifade ederiz:

$$T = 0.1 + 0.005\chi_1, \epsilon = 0.5 + 0.025\chi_2, x_d = 0.41 + 0.0205\chi_3,$$

Burada $\chi_i, i = 1,2,3$ ler bağımsız ve standart normal dağılıma sahip rastgele değişkenlerdir. (Bekiryazici et al., 2016a; Merdan and Khaniyev, 2008). (1)sisteminde yeni parametreleri denklemde yerine koyarak aynı başlangıç koşullarıyla yeni rastgele sistem elde edilir.

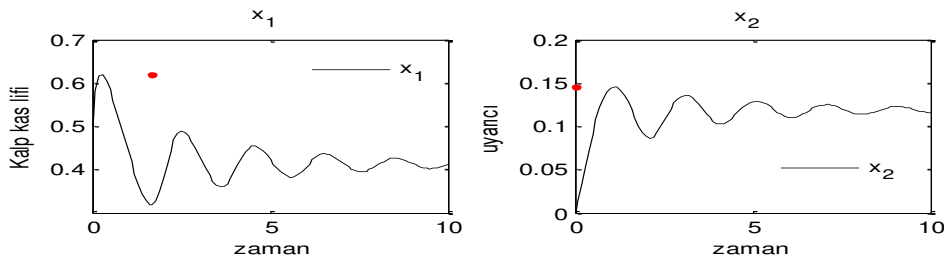
$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\frac{1}{(0.5 + 0.025\chi_2)}(x_1^3 - (0.1 + 0.005\chi_1)x_1 + x_2), \quad (93)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_1 - (0.41 + 0.0205\chi_3).$$

2.17.3. Rastgele Sonuçlar

Her simülasyonda, sistemin sayısal çözümünü elde etmek için 4.mertebedenRunge-Kutta metodu kullanılır ve bu 10^5 simülasyon ile modelin sayısal karakteristikleri araştırılır.

Cözüm Eğrileri:(93) sisteminin çözüm eğrileri aşağıdaki gibi simülasyonlardan elde edilmiştir. (Şekil 2.17.) Çözümlerin uç değerleri Tablo 2.9. da gösterilmiştir.



Şekil 2.17. Rastgele modelin çözüm eğrileri

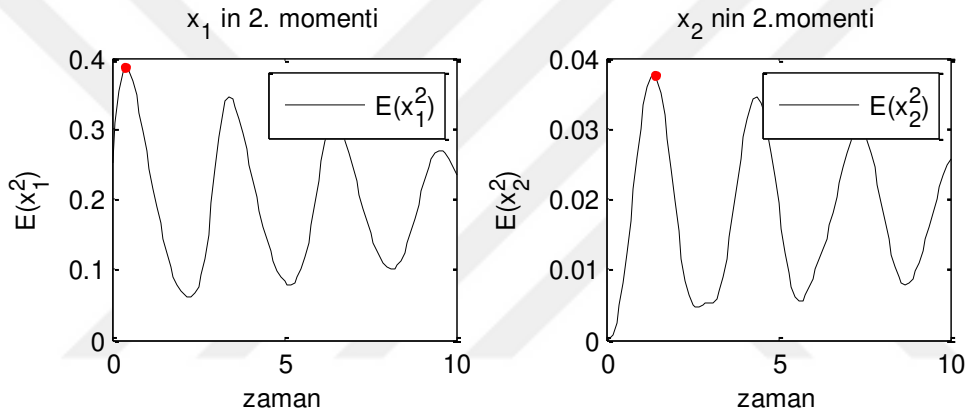
Tablo 2.9. Değişkenlerin uç değerleri

Değişken	(Maksimum Değer, Zaman)	(Minimum Değer, zaman)
$x_1(t)$	(0.61998,0.318826)	(0.3,1.7)
$x_2(t)$	(0.145611,1.1)	(0,0)

$x_1(t)$ bileşeni $t = 1.7$ anında 0.3 minimum değerini alırken, $t = 0.318826$ anında 0.61998 maksimum değerini alır.

$x_2(t)$ bileşeni $t = 1.1$ anında 0.145611 maksimum değerini alırken, $t = 0$ anında 0 minimum değerini alır.

Beklenen Değerler:(94) sisteminin bileşenlerinin beklenen değerleri aşağıda Şekil 2.18. de gösterilmiştir. Beklenen değerlerin uç değerleri Tablo 2.10. da gösterilmiştir.



Şekil 2.18. Rastgele modelin beklenen değerleri

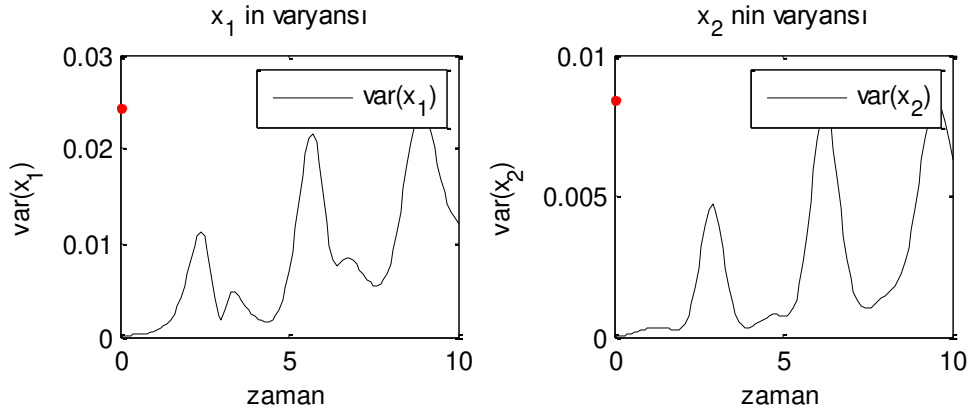
Tablo 2.10. Beklenen değerlerin uç değerleri

Değişken	(Maksimum değer, zaman)	(Minimum değer, Zaman)
$E(x_1(t))$	(0.38,0)	(0.0875,0.3)
$E(x_2(t))$	(0.0385,0.2)	(0.0875,1.4)

$x_1(t)$ bileşeninin beklenen değeri $t = 0.6$ anında 0.351835 minimum değerini alırken, $t = 0$ anında 0.5 maksimum değerini alır.

$x_2(t)$ bileşeninin beklenen değeri $t = 1.4$ anında -0.0323 minimum değerini alırken, $t = 0.2$ anında 0.0385 maksimum değerini alır.

Varyanslar:(93) sisteminin bileşenlerinin varyansları Şekil 2.19.'da gösterilmiştir. Varyanslarındeki değerleri Tablo 2.11'de gösterilmiştir.



Şekil 2.19. Rastgele modelin varyansları

Tablo 2.11. Varyansların uç değerleri

Değişken	(Maksimum Değer, Zaman)	(Minimum Değer, Zaman)
$Var(x_1(t))$	(0.0255,8)	(0,0)
$Var(x_2(t))$	(0,00865,8)	(0,0)

$x_1(t)$ bileşeninin varyansı $t = 0$ anında 0 minimum değerini alırken, $t = 1$ anında 0.000560493 maksimum değerinde alır.

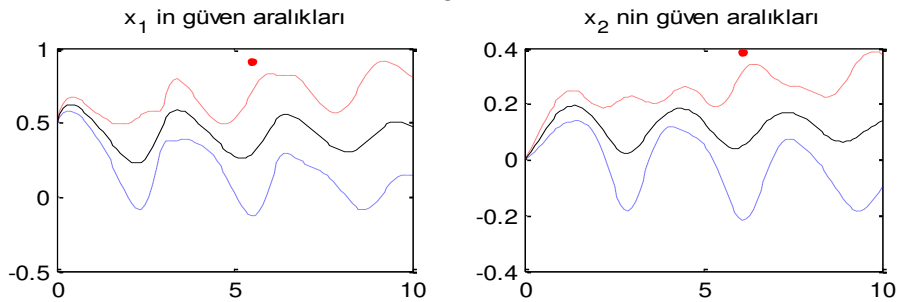
$x_2(t)$ bileşeninin varyansı $t = 0$ anında 0 minimum değerini alırken, $t = 2.5$ anında 8.05776×10^{-5} maksimum değerini alır.

Güven aralıkları: (93)sisteminin bileşenlerinin güven aralıkları Şekil 2.20.'de gösterilmiştir. Güven aralıklarının uç değerleri Tablo 2.12.'de gösterilmiştir.

%99 güven aralıkları aşağıdaki formdarastgele değişkenlerin ortalama değerleri için verilmiştir:

$$[E(X(t)) - K\sigma(X(t)), E(X(t)) + K\sigma(X(t))]$$

burada $K = 3$ tür. Alternatif olarak, $K = 2$ ya da $K = 1$ daha düşük güven aralığı için kullanılabilir. Grafiklerdeki kırmızı çizgiler aralıkların en üstteki sonucunu temsil ederken mavi çizgiler en alttaki sonucu temsil eder.



Şekil 2.20. Rastgele modelin güven aralıkları

Tablo 2.12. Güven aralıklarının uç değerleri

Değişken	(Maksimum Değer, Zaman)	(Minimum değer, Zaman)
$CI(x_1(t))$	(0.5,0)	(0.294034,0.7)
$CI(x_2(t))$	(0.0210048,0.3)	(0.0557494,1.5)

$x_1(t)$ bileşeninin güven aralığı $t = 0.7$ anında 0.294034 minimum değerini alırken, $t = 0$ anında 0.5 maksimum değerini alır.

$x_2(t)$ bileşeninin güven aralığı $t = 1.5$ anında -0.0557494 minimum değerini alırken, $t = 0.3$ anında 0.0210048 maksimum değerini alır.

Aşağıda üç boyutlu model için benzer sonuçlar elde edilmektedir.

2.17.4. Deterministik Sonuçlar

Üstte iki boyutlu modele benzer olarak (3) sistemi için aşağıdaki deterministik çözümleri ve uç değerleri elde ederiz. (Tablo 2.13.)

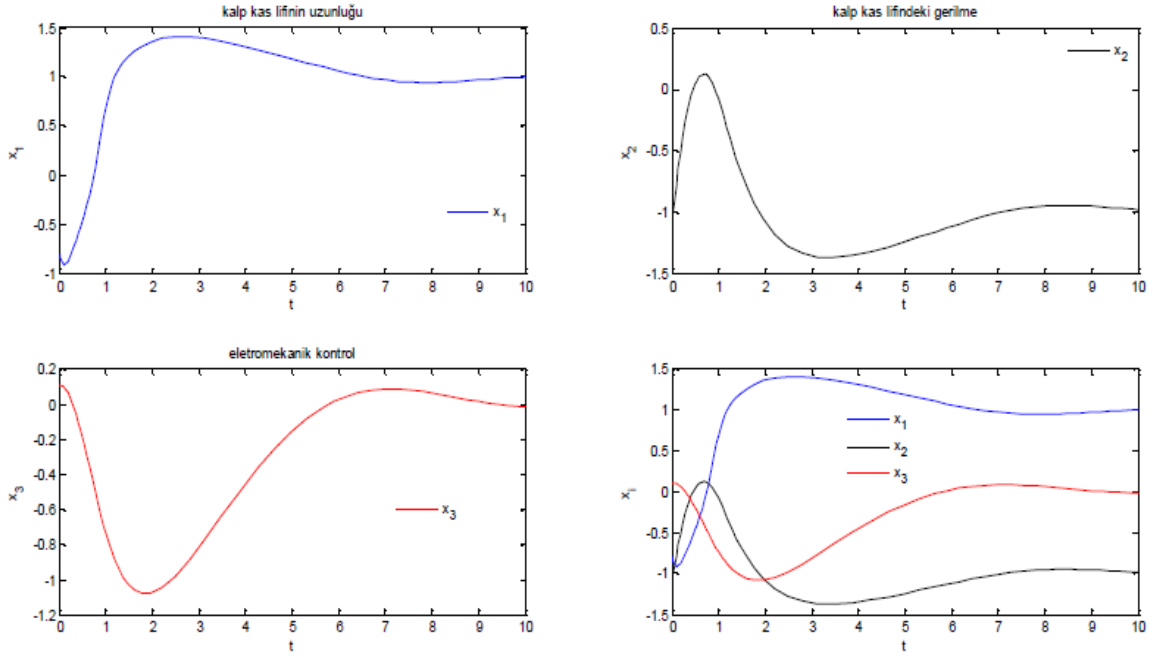
Tablo 2.13. (3) Denkleminin deterministik çözümlerinin uç değerleri

Değişken	Maksimum	Zaman	Minimum	Zaman
$x_1(t)$	1.609	3.5488	-0.8337	0.1354
$x_2(t)$	0.3412	1.0133	-1.573	4.2737
$x_2(t)$	0.2072	8.8657	-2.05	2.5714

$x_1(t)$ bileşeni $t = 0.1354$ anında -0.8337 minimum değerini alırken, $t = 3.5488$ anında 1.609 maksimum değerini alır.

$x_2(t)$ bileşeni $t = 4.2737$ anında -1.573 minimum değerini alırken, $t = 1.0133$ anında 0.3412 maksimum değerini alır.

$x_3(t)$ bileşeni $t = 2.5714$ anında -2.05 minimum değerini alırken, $t = 8.8657$ anında 0.2072 maksimum değerini alır.



Şekil 2.21. Üç boyutlu Zeeman modelinin çözümleri

2.17.5. Üç Boyutlu RastgeleModel

(3) deterministik denklem sistemi rastgele katsayılarla birlikte rastgele bir denklem elde etmek için kullanılacaktır. Katsayıların yeni formuaşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\beta \sim N(a_1, s_1^2), \epsilon \sim N(a_2, s_2^2), \delta \sim N(a_3, s_3^2), \theta \sim N(a_4, s_4^2)$$

Burada $a_i, i = 1, 2, 3, 4$ ve $s_i^2, i = 1, 2, 3, 4$ ayrı ayrı normal dağılımların değişkenleri ve ortalamalarıdır. Bu değişkenler için bir %5 standart sapma kullanarak parametrelerin yeni değerleri aşağıdaki gibidir.

$$\beta = 2 + 0.1\chi_1, \epsilon = 1 + 0.05\chi_2, \delta = 2 + 0.1\chi_3, \theta = 1 + 0.05\chi_4$$

Burada $\chi_i, i = 1, 2, 3, 4$ bağımsız ve standart normal dağılıma sahip rastgele değişkenlerdir. [M. Merdan and T. Khaniyev, 2008], [Z. Bekiryazici, M. Merdan, T. Kesemen and T. Khaniyev, 2016a].

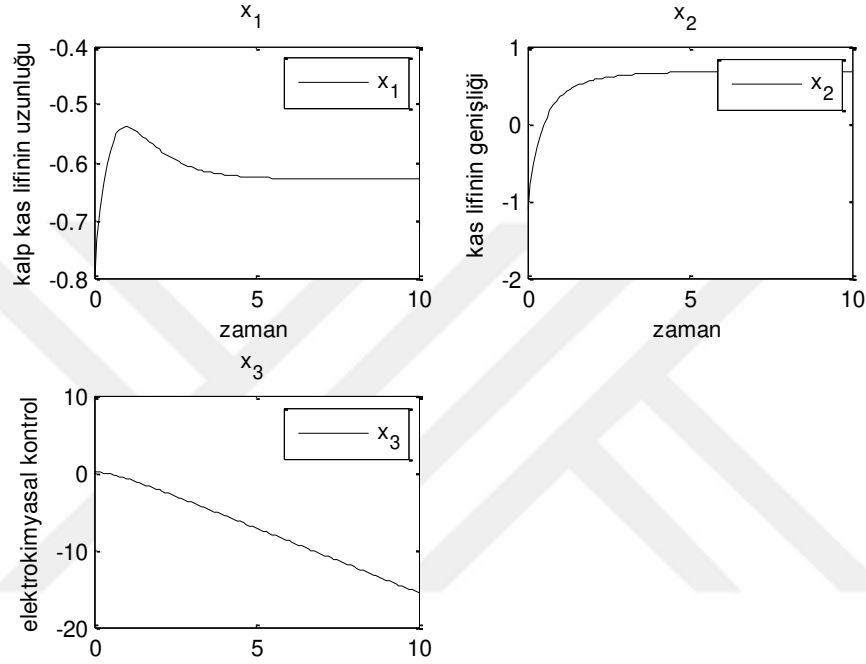
Bu yüzden rastgele model şöyledir:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{(1 + 0.05\chi_2)} (-x_1^3 - x_2x_1 - x_3), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -(2 + 0.1\chi_1)x_1 - (2 + 0.1\chi_3)x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= -x_2 - (1 + 0.05\chi_4). \end{aligned} \quad (94)$$

2.17.6. Rastgele Sonuçlar

Her simülasyonda, sistemin sayısal çözümünü elde etmek için 4.mertebedenRunge-Kutta metodu kullanılmıştır ve modelin sayısal karakterleri 10^5 tane simülasyon yapılarak elde edilmiştir.

Cözüm Eğrileri:(94) sisteminin çözüm eğrileri aşağıdaki gibi simülasyonlardan elde edilmiştir. (Şekil 2.22.) Çözümlerin uç değerleri Tablo 2.14.te gösterilmiştir.



Şekil 2.22. Rastgele modelin çözüm eğrileri

Tablo 2.14. Değişkenlerin uç değerleri

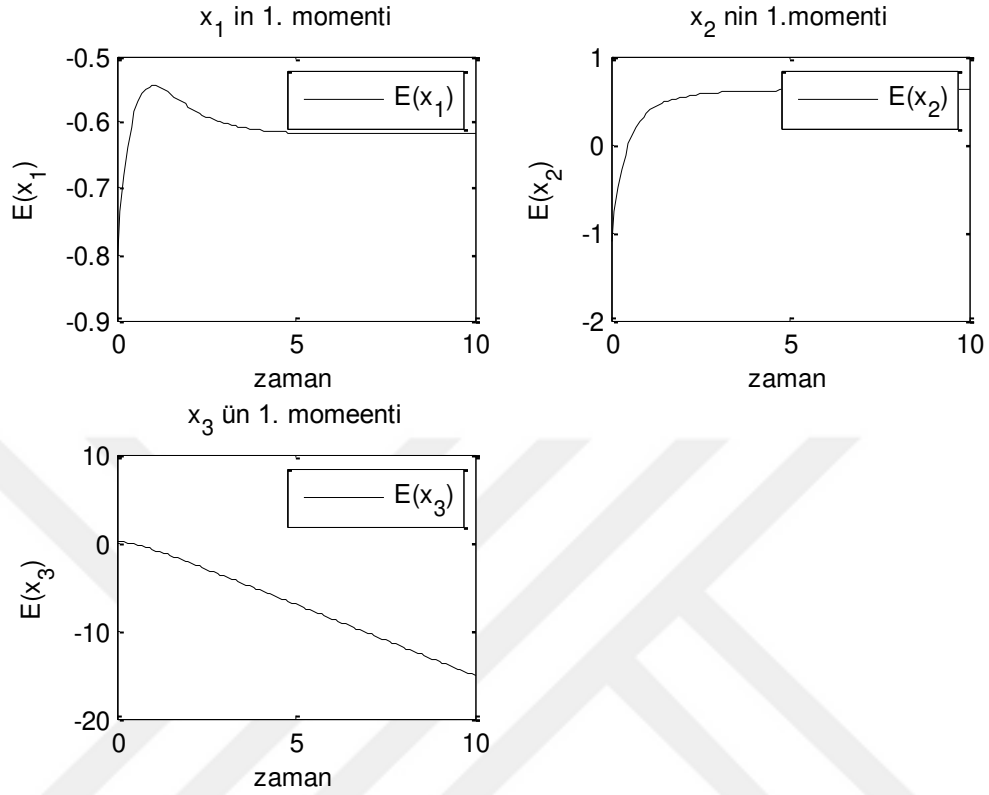
Değişken	(Maksimum değer, Zaman)	(Minimum değer, zaman)
$x_1(t)$	$(-0.435834,1)$	$(-0.7,0)$
$x_2(t)$	$(0.607667,1)$	$(-1.1,0)$
$x_3(t)$	$(0.1,0)$	$(-15.2895,10)$

$x_1(t)$ bileşeni $t = 0$ anında -0.8 minimum değerini alırken, $t = 1$ anında -0.535834 maksimum değerini alır.

$x_2(t)$ bileşeni $t = 0$ anında -1.1 minimum değerini alırken, $t = 0$ anında 0.607667 maksimum değerini alır.

$x_3(t)$ bileşeni $t = 10$ anında -15.2895 minimum değerini alırken, $t = 0$ anında 0.1 maksimum değerini alır.

Beklenen Değerler:(94) sisteminin bileşenlerinin beklenen değerleri aşağıda şekil 2.23. de gösterilmiştir. Beklenen değerlerin uç değerleri tablo 2.15. te gösterilmiştir.



Şekil 2.23. Rastgele modelin beklenen değerleri

Tablo 2.15. Beklenen değerlerin uç değerleri

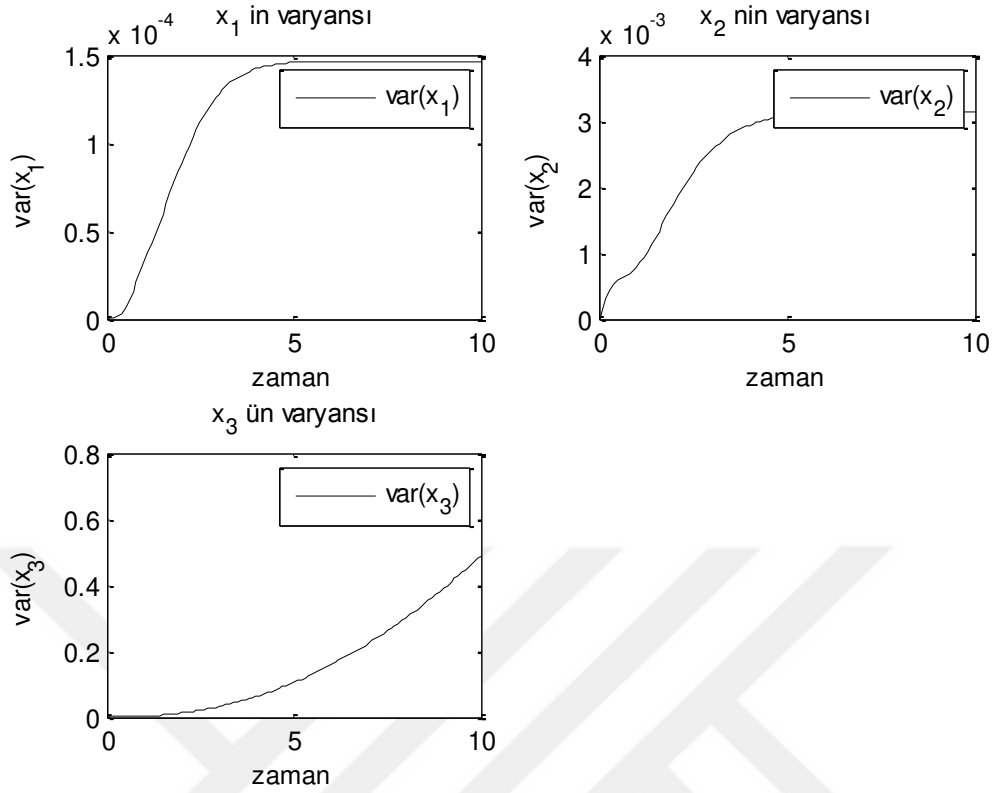
Değişken	(Maximum değer, zaman)	(Minimum değer, zaman)
$E(x_1(t))$	$(-0.535834,1)$	$(-0.8,0)$
$E(x_2(t))$	$(0.607667,1)$	$(-1.1,0)$
$E(x_3(t))$	$(0.1,0)$	$(-15.2895,10)$

$x_1(t)$ bileşeninin beklenen değeri $t = 0$ anında -0.8 minimum değerini alırken, $t = 1$ anında -0.535834 maksimum değerini alır.

$x_2(t)$ bileşeninin beklenen değeri $t = 0$ anında -1.1 minimum değerini alırken, $t = 1$ anında 0.607667 maksimum değerini alır.

$x_3(t)$ bileşeninin beklenen değeri $t = 0$ anında -15.2895 minimum değerini alırken, $t = 10$ anında 0.1 maksimum değerini alır.

Varyanslar:(94) sisteminin bileşenlerinin varyansları şekil 2.24. te gösterilmiştir. Varyansların uç değerleri tablo 2.16. da gösterilmiştir.



Şekil 2.24. Rastgele modelin varyansları

Tablo 2.16. Varyansların uç değerleri

Değişken	(Maksimum değer, zaman)	(Minimum değer, zaman)
$Var(x_1(t))$	(0.000141923,6.3)	$(1.28368e - 028,0)$
$Var(x_2(t))$	(0.00306553,10)	$(7.50662e - 029,0)$
$Var(x_3(t))$	(0.501089,10)	$(2.00574e - 030,0)$

$x_1(t)$ bileşeninin varyansı $t = 0$ anında $1.28368 e - 0.28$ minimum değerini alırken, $t = 6.3$ anında 0.000141923 maksimum değerini alır.

$x_2(t)$ bileşeninin varyansı $t = 0$ anında $7.50662e - 029$ minimum değerini alırken, $t = 10$ anında 0.00306553 maksimum değerini alır.

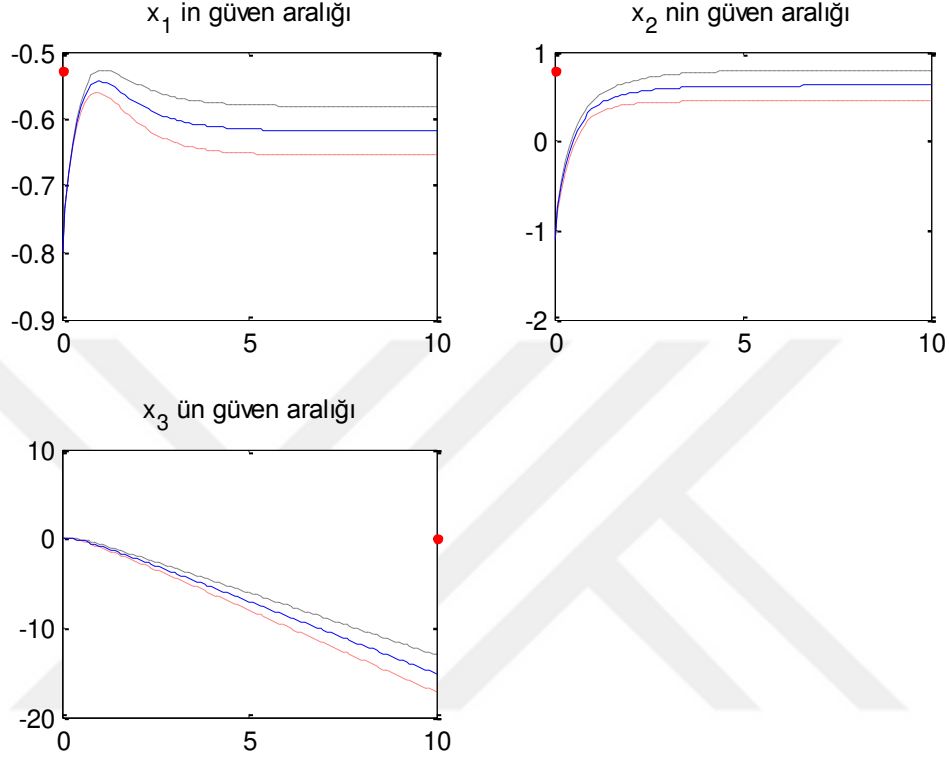
$x_3(t)$ bileşeni $t = 0$ anında $2.0075 e$ minimum değerini alırken, $t = 10$ anında 0.501089 maksimum değerini alır.

Güven aralıkları :(94) sisteminin bileşenlerinin güven aralıkları şekil 2.25. gösterilmiştir. Güven aralıklarının uç değerleri tablo 2.17. de gösterilmiştir.

%99 güven aralıkları aşağıdaki formdarastgele değişkenlerin ortalama değerleri için verilmiştir:

$$[E(X(t)) - K\sigma(X(t)), E(X(t)) + K\sigma(X(t))]$$

burada $K = 3$ tür. Alternatif olarak, $K = 2$ ya da $K = 1$ daha düşük güven aralığı için kullanılabilir. Grafiklerdeki kırmızı çizgiler aralıkların en üstteki sonucunu temsil ederken mavi çizgiler en alttaki sonucu temsil eder.



Şekil 2.25. Rastgele modelin güven aralıkları

Tablo 2.17. Güven aralıklarının uç değerleri

Değişken	(Maksimum değer, zaman)	(Minimum değer, zaman)
$CI(x_1(t))$	$(-0.527035, 1.1)$	$(-0.8, 0)$
$CI(x_2(t))$	$(0.792919, 10)$	$(-1.1, 0)$
$CI(x_3(t))$	$(0.106628, 0.1)$	$(-13.1846, 10)$

$x_1(t)$ bileşeninin güven aralığı $t = 0$ anında -0.8 minimum değerini alırken, $t = 1.1$ anında -0.527035 maksimum değerini alır.

$x_2(t)$ bileşeninin güven aralığı $t = 0$ anında -1.1 minimum değerini alırken, $t = 10$ anında 0.792919 maksimum değerini alır.

$x_3(t)$ bileşeninin güven aralığı $t = 10$ anında -13.1846 minimum değerini alırken, $t = 0.1$ anında 0.106628 maksimum değerini alır.

3. BULGULAR

Bu çalışmada literatürde iki ve üç boyutlu deterministik diferansiyel denklem sistemlerinin x_d (gevşemiş lif uzunluğu) parametresi sıfıra eşit ve sıfırdan farklı olduğu durumlarda dallanma (kararlılık) analizi yapılmıştır. Daha sonra sistemdeki parametrelerin gerçek değerleriyle çözümler elde edilip sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Yine iki boyutlu modele gecikme terimi ilave edilerek farklı durumlar için de kararlılık analizi yapılmıştır. Yani bir olayın öncesi için gecikme parametresi hesaplanarak yorumlar yapılmıştır.

Rastgele Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (RDDY) ve Beta dağılım özellikleri verilmiştir. Zeeman sistemine bu yöntem uygulanarak bir parametresi Beta dağılımına sahip, başlangıç şartları ise normal dağılıma sahip sistemin beklenen değer ve varyansı hesaplanmıştır. Bu hesaplamalar gerekli simülasyonlarla desteklenerek bilgi verilmiştir. Benzer şekilde sistemin sadece başlangıç şartlarının rastgele olduğu sistem için de aynı işlemler yapılmıştır. Ayrıca elde edilen çözümlerin yakınsaklık aralığını genişletmek için Laplace-Padé tekniği kullanılmıştır.

Kalp atış modeline Wiener süreç (beyaz gürültü) eklenerek oluşturulan stokastik model Euler-Maruyama, Milstein yöntemleriyle çözülüp simülasyon ve grafikler oluşturularak yorumlar yapılmıştır. Buna ilaveten iki yöntem karşılaştırılmıştır.

İki ve üç boyutlu Zeeman modeline rastgele etki terimleri ilave edilerek rastgele sistem oluşturulmuştur. Bu sistemlerin beklenen değeri, momenti, varyansı ve güven aralıkları hesaplanmıştır. Bu hesaplamalar simülasyonlarla ve tablolarla gösterilmiştir.

4. İRDELEME

Çalışmanın tamamında elde edilen sonuçlar literatürde var olan çalışmalara uygundur ve hazırda yapılmakta olan deterministik modellerin rastgele davranışlarının daha kolay bir şekilde incelenmesi üzerine bir yöntem ortaya koymaktadır. Bu yöntem, denklemlere Wiener süreç ekleyerek stokastik diferansiyel denklem oluşturma tekniğine benzer şekilde parametrelere beyaz gürültü terimiyle aynı görevde olan rastgele etki terimleri ekleyerek rastgele diferansiyel denklem oluşturma ilkesine dayanmaktadır. Bu yöntem kaynaklarda çoğunlukla stokastik süreçler kullanılarak yapılan analizlerin daha hızlı ve daha basit bir şekilde yapılabilmesine olanak sağlamaktadır. Kaynaklarda rastgele diferansiyel denklemlerle ilgili Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ilk defa Zeeman Kalp Atış Modeline uygulanmıştır. İlk defa rastgele denklemlere uygulanan Laplace-Pade yaklaşımı ile rastgele denklem sistemlerinde rastgele Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile elde edilen sonuçlar iyileştirilmiştir.

Kararlılık analizi, gecikme (delay), rastgele etki, rastgele Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ve Modifiye rastgele Diferansiyel Yöntemi Zeeman modeline ilk defa uygulanmıştır.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada iki ve üç boyutlu Zeeman kalp atış modelinin rastgele etkiler altındaki davranışı incelenmiştir. Çözüm grafikleri incelendiğinde değişkenlerin rastgele davranışının, deterministik davranışlarına göre bir miktar saptığı görülmektedir. Rastgele ve deterministik sonuçlar karşılaştırıldığında, elde edilen sonuçları arasında anlamlı farkların ortaya çıktığı görülür. Bu türden dinamik sistemlerin rastgele davranışlarını incelemek için rastgele ve stokastik modeller oluşturulmuştur. İki ve üç boyutlu Zeeman kalp atış modelinin başlangıç koşulları veya parametreler rastgele seçilerek, stokastik etkili modeller elde edilmiştir.

Bu modelde iki ve üç boyutlu Zeeman kalp atış modellerine Wiener süreci eklenerek stokastik diferansiyel denklem sistemi elde edilmiştir. Söz konusu sistemlerin sayısal çözümleri için Euler-Maruyama ve Milstein yöntemleri kullanılmıştır ve sonuçlar grafiklerle gösterilmiştir. Stokastik modellerin çözüm grafikleri incelendiğinde, oluşan dalgalanmalardan rastgele etkilerin şiddetini ölçmek mümkündür.

6. ÖNERİLER

Zeeman kalp atış modellerine bazı parametreler ilave edilerek daha gerçekçi modeller geliştirilebilir.

Üç boyutlu Zeeman kalp atış modeli için fractional (kesirli) türev ve gecikme terimleri eklenerek elde edilen model için çeşitli analizler yapılabilir.

Farklı dağılımlar kullanarak oluşturulan rastgele modeller için de yukarıda yaptığımız analizlere benzer analizler yapılabilir.

Stokastik kesirli modeller oluşturularak da çeşitli analizler yapılabilir.



7. KAYNAKLAR

- Acartürk, E., 2005. Pratik Elektrokardiyografi, Kare Yayınları, İstanbul.
- Bekiryazici, Z., Kesemen, T., Merdan, M., 2017. Stochastic and Random Models of Malaria Disease with Vertical Transmission. New Trends in Mathematical Sciences, 5, 269-277.
- Bekiryazici, Z., Merdan, M., Kesemen, T., Khaniyev, T., 2016a. Mathematical Modeling of Biochemical Reactions under random effects, Turk. J. Math. Comput. Sci. 5, 8–18.
- Bekiryazici, Z., Merdan, M., Kesemen, T., Khaniyev, T., 2016a. Mathematical Modeling of Biochemical Reactions under random effects, Turk. J. Math. Comput. Sci, 5, 8–18.
- Bekiryazici, Z., Merdan, M., Kesemen, T., Najmuldeen, M., 2016b. Mathematical Modeling of Dengue Disease under Random Effects. Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 4, 2, 58-70.
- Bekiryazici, Z., Merdan, M., Kesemen, T., Najmuldeen, M., 2016b. Mathematical Modeling of Dengue Disease under Random Effects. Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 4, 2, 8-70.
- Bekiryazici, Z., 2017. Bazı kompartmanlı modellerin rastgele etki altında incelenmesi, Trabzon.
- Beltrami, E., 1987. Mathematics for Dynamic Modeling, Academic Pres Inc, pp.3,4,1, 75-100, Boston.
- Braunwald, E., Zipes, D.P., Libby, P., Bonow, R., 2001. Heart Disease: a Textbook of Cardiovascular Medicine, W.B. Saunders Company.
- Calbo, G., Cortés, J.-C., J'odar, L., and Villafuerte, L., 2011. Solving the random Legendre differential equation: mean square power series solution and its statistical functions, Comput. Math. Appl, 2782–2792.
- Conover, B.M., (Çeviri, Küçük hüseyin, C.), 2008. Elektrokardiyografi Cep Rehberi, Nobel Tıp Kitabevleri, İstanbul.
- Cyganowski, S., Kloeden, P., Ombach, J., 2001. From Elementary Probability to Stochastic Differential Equations with MAPLE. Springer, Berlin.
- Dinçer, U., 1997. Elektrokardiyografi, Alfa Basın Yayın Dağıtım, İstanbul.

- E.C. Zeeman., 1974. Primary and Secondary Waves in Development Biology. In Lectures on Mathematics in the Life Sciences, Vol. 7, pp. 69-161. Amer. Math. Soc., Providence.
- Gantmacher, F.R., 1959. The theory of matrices, Chelsae Publishing, Volume-1, New York.
- Gökdoğan, A., Merdan, M., Yildirim, A., 2012. The Modified Algorithm for the Differential Transform Method to Solution of Genesio Systems, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 17, 1, 45-51.
- Hale, J.K., and Lunel, S.M.V., 1993. Introduction to functional differential equations, Springer Verlag, 447 p., New York.
- Hubbard, J.H., & West, B.H., 1991. H.Differential equations: A dynamical systems approach, Springer-Verlag, New York.
- Jafarnia-Dabanloo, N., McLernon, D.C., Zhang, H., Ayatollahi, A., Johari-Majd, V., 2007. A modified Zeeman model for producing HRV signals and its application to ECG signal generation. Journal of Theoretical Biology, 244, 180-189.
- Jafarnia-Dabanloo, N., McLernon, D.C., Zhang, H., Ayatollahi, A., Johari-Majd, V., 2007. A modified Zeeman model for producing HRV signals and its application to ECG signal generation. Journal of Theoretical Biology, 244, 180-189.
- Khan, M.G., (Çeviri, İlerigelen,B.), 2007. Hızlı EKG yorumu, İstanbul Medikal Yayıncılık, İstanbul.
- Khudair, A. R., Haddad,S. A. M., Khalaf, S.L., 2016. Mean Square Solutions of Second-Order Random Differential Equations by Using the Differential Transformation Method, Open Journal of Applied Sciences, 6, 287-297.
- Kloeden, P.E., Platen, E., 1992. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Springer, Berlin.
- Kolmanovskii, V. and Myshkis, A., 1999. Introduction to the theory and applications of functional differential equations, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Krasovskii, N.N., 1959. Stability of motion Stanford Univeser. Press, 186 p., California.
- Lahrouz, A., Omari, L., Settati, A., Belmaâti, A., 2015. Comparison of deterministic and stochastic SIRS epidemic model with saturating incidence and immigration. Arabian Journal of Mathematics, 4, 2, 101-116.
- Malik, M., Camm, A.J. (Eds.), 1995. Heart rate variability, Futura Publishing Company. Armonk, NY.

- McSharry, P. E., Clifford, G., Tarassenko, L., Smith, L. A., 2002. Method for generating an artificial RR tachogram of a typical healthy human over 24-hours, *IEEE*, 225-228.
- Merdan, M., Bekiryazici, Z., Kesemen, T., Khaniyev, T., 2017. Comparison of stochastic and random models for bacterial resistance. *Advances in Difference Equations*, 1, 133.
- Merdan, M., Bekiryazici, Z., Kesemen, T., Khaniyev, T., 2017. Comparison of stochastic and random models for bacterial resistance. *Advances in Difference Equations*, 133.
- Merdan, M., Khaniyev, T., 2008 On the behavior of solutions under the influence of stochastic effect of avian-human influenza epidemic model. *Int. J. Biotechnol.*
- Merdan, M., Khaniyev, T., 2008. On the behavior of solutions under the influence of stochastic effect of avian-human influenza epidemic model. *Int. J. Biotechnol. Biochem.* 4, 1, 75-100.
- Pang L., Zhao Z., Liu S., Zhang X., 2015. A mathematical model approach for tobacco control in China. *Applied Mathematics and Computation*. 2015; 259: 497-509.
- Pang L., Zhao Z., Liu S., Zhang X., 2015. A mathematical model approach for tobacco control in China. *Applied Mathematics and Computation*, 259, 497-509.
- Richard, J.L., Marx, M.L., 1986. *An Introduction To Mathematical Statistics and Its Applications*, Prentice-Hall International.
- Soong, T.T., 1973. *Random Differential Equations in Science and Engineering*, Academic Press, New York.
- Stewart, I., Woodcock, A. E., 1981. On Zeeman's equations for the nerve impulse. *Bulletin of mathematical biology*, 43, 3, 279-325.
- Stewart, I., Woodcock, A. E., 1981. On Zeeman's equations for the nerve impulse, *Bulletin of mathematical biology*, 43, 3, 279-325.
- Suckley, R., Biktashev, V.N., 2003. Comparison of asymptotics of heart and nerve excitability, *Phys. Rev. E* 68.
- Thanom, W., Loh, R.N.K., 2011. Nonlinear Control of Heartbeat Models, *Systemics, Cybernetics and Informatics*, 9, 1, 21-27.
- Thanom, W., Loh, R.N.K., 2012. Observer-Based Nonlinear Feedback Controls for Heartbeat ECG Tracking Systems. *Intelligent Control and Automation*, 3, 251-561.
- Tu Pierre, N.V., 1994. *Dynamical Systems-an Introduction with Applications in Economics and Biology*, 2e, Springer, Berlin.

- Villafuerte, L., and Cortés, J.-C., 2013. Solving Random Differential Equations by Means of Differential Transform Methods, Advances in Dynamical Systems and Applications, 413–425.
- Villafuerte, L., Braumann, C.A., Cortés, J.-C., Jódar L., 2010. Random differential operational calculus: Theory and applications, Computers and Mathematics with Applications, 59,115-125.
- Waddington, C.H. (Ed.), Towards a Theoretical Biology, vol. 4, Edinburgh University Press.
- Zeeman, E.C., (1977). Catastrophe Theory, Addison-Wesley, Reading, MA.
- Zeeman, E.C., 1972a. Differential Equations for the Heartbeat and Nerve Impulse. Mathematics Institute, University of Warwick, Coventry, UK.
- Zeeman, E.C., 1972b. Differential equations for the heartbeat and nerve impulse. In: Waddington, C.H. (Ed.), Towards a Theoretical Biology, vol. 4, Edinburgh University Press.
- Zeeman, E.C., 1972a. Differential Equations for the Heartbeat and Nerve Impulse. Mathematics Institute, University of Warwick, Coventry, UK.
- Zhou, J.K., 1986. Differential Transformation and its Applications for Electrical Circuits, Huazhong University Press, Wuhan, China.
- Zverkin, A.M., 1959. Dependence of the stability of solutions of differential equations with delay on the choice of the initial instant. Vestnik Moskov Univ. Ser. Mat. Meh. Astr.Fiz. Him. 5; 15-20.

ÖZGEÇMİŞ

Pınar ORAL 1992 yılında Gümüşhane’de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Torul Aktaş İlkokulu’nda 2006 yılında tamamladı, lise öğrenimini ise 2010 yılında Gümüşhane Lisesi’nde tamamladı. 2010 yılında girdiği Cumhuriyet Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2015 yılında mezun oldu. 2016-2017 Eğitim Öğretim Yılında Gümüşhane Turkuaz Koleji’nde Matematik Öğretmeni, 2017-2018 Eğitim Öğretim Yılı’nda Gümüşhane Özel Bahçeşehir Koleji’nde Matematik Öğretmeni olarak çalıştı. (halen devam etmekte)

2015 yılında Gümüşhane Üniversitesi Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında yüksek lisansa başladı.