

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TUBA OĞUR

ZİKA VİRÜS MODELİNİN CAPUTO ANLAMINDA
ATANGANA-BALEANU KESİRLİ TÜREV OPERATÖRÜ İLE ANALİZİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ

Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

AĞRI - 2023

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZİKA VİRÜS MODELİNİN CAPUTO ANLAMINDA ATANGANA-BALEANU KESİRLİ TÜREV OPERATÖRÜ İLE ANALİZİ

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

Jüri: Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Doç. Dr. İlknur KOCA

Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

Bu çalışmada Zika virüs matematiksel modeli Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türev operatörü uygulanarak genişletilmiştir. Daha sonra Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türev operatörü uygulanan bu modelin varlık-teklik çözümü yapılmıştır. Varlık çözümü Lipschitz koşulu ile gerçekleştirildikten sonra teklik çözümlerinin hangi durumlarda sağlandığı Picard'ın teklik teoremi yardımıyla incelenmiştir. Modelin kararlılık analizi Hyers-Ulam kararlılık teoremi ile yapılmıştır. Teorik çözümler tamamladıktan sonra Atangana ve Owolabi tarafından Caputo ve Atangana-Baleanu kesirli türev operatörleri için üretilmiş olan Adams-Bashforth şeması yöntemi ile sayısal çözümler yapılmış ve bu çözümler nümerik simülasyonlarla gösterilip karşılaştırılarak sonuçlar yazılmıştır.

2023, 72 sayfa Sayısı

Anahtar Kelimeler: Matematiksel Modelleme, Zika Virüsü, Varlık-teklik, Hyers-Ulam Kararlılığı.

ABSTRACT
MASTER'S THESIS
ANALYSIS OF THE ZIKA VIRUS MATHEMATICAL MODEL USING THE
CAPUTO MEANING OF THE ATANGANA-BALEANU FRACTIONAL
DERIVATIVE OPERATOR

Advisor of Thesis: Assoc. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

Jury: Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Assoc. Prof. Dr. İlknur KOCA

Assoc. Prof. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

In this study, Zika virus mathematical model has been extended by conducting Atangana-Baleanu fractional derivative with Caputo meaning. Subsequently, the model with the Caputo meaning of the Atangana-Baleanu fractional derivative operator has been subjected to existence-uniqueness solution analysis. After performing the existence solution analysis under the Lipschitz condition, the conditions under which uniqueness solutions are satisfied have been investigated using Picard's uniqueness theorem. The stability analysis of the model has been conducted using the Hyers-Ulam stability theorem. After completing the theoretical solutions, numerical solutions have been obtained using the Adams-Bashforth scheme method developed by Atangana and Owolabi for the Caputo and Atangana-Baleanu operators. These numerical solutions have been demonstrated and compared with numerical simulations, and the results have been presented.

2023, 72

Key Words: Mathematical Modeling, Zika Virus, Existence-uniqueness, Hyers-Ulam Stability.

TEŐEKKÖR

Yüksek lisans çalışmam boyunca beni yönlendiren ve çalışmamın her aşamasında bilgi ve tecrübesi ile yardımcı olan değerli danışman hocam Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU'ya en içten dileklerimle teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Eğitim hayatım boyunca beni destekleyen aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkür ederim.

Haziran 2023

Tuba OĞUR



İÇİNDEKİLER

ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	4
2.1. Kesirli Türev Operatörlerinde Kullanılan Temel Fonksiyon ve Dönüşümler ...	4
2.1.1. Gamma Fonksiyonu	4
2.1.2. Beta Fonksiyonu	4
2.1.3. Hata Fonksiyonu	5
2.1.4. Mittag-Leffler Fonksiyonu	6
2.1.5. Laplace Dönüşümü	6
2.2. Türev ve İntegral Operatörü	8
2.3. Bazı Kesirli Türev ve İntegral Operatörleri	9
3. MATERYAL VE YÖNTEM	13
3.1. Atangana-Baleanu Kesirli Türev ve İntegral Operatörü	13
3.2. Varlık ve Teklik Çözümü	16
3.2.1. Varlık Çözümü	16
3.2.2. Teklik Çözümü	17
3.3. Kararlılık Analizi ve Denge Noktası	20
3.4. Caputo Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli Türevinin İki Aşamalı Adams-Bashforth Şeması	22
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	28
4.1. Zika Modeli	28
4.2. Zika Virüs Modelinin Caputo Anlamındaki Atangana-Baleanu Kesirli Türev Operatörüne Genişletilmesi	29
4.3. Zika Modelinin Varlık-Teklik Çözümleri	30
4.4. Kararlılık Analizi	51

4.5. Nümerik Çözüm Yöntemi	55
4.5.1. Zika Modelinin Nümerik Çözümü	57
5. SONUÇ	67
KAYNAKLAR	68
ÖZGEÇMİŞ	71



ŞEKİLLER LİSTESİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
4.1 $\mathcal{X}_{\mathcal{H}}$ fonksiyonunun farklı ζ değerleri için simülasyonları	63
4.2 $\mathcal{Z}_{\mathcal{H}}$ fonksiyonunun farklı ζ değerleri için simülasyonları	63
4.3 $\mathcal{Y}_{\mathcal{H}}$ fonksiyonunun farklı ζ değerleri için simülasyonları	64
4.4 $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$ fonksiyonunun farklı ζ değerleri için simülasyonları	64
4.5 $\mathcal{Q}_{\mathcal{H}}$ fonksiyonunun farklı ζ değerleri için simülasyonları	65



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif Reel Sayılar
$\in$	: Elemanıdır
$m!$	: Faktöriyel ($n!=1.2.3...n$)
$\lim$	: Limit
$Re(z)$	: z Karmaşık Sayısının Reel Kısmı
$Re(y)$	: y Karmaşık Sayısının Reel Kısmı
$\sum$	: Toplam Sembolü
$\prod$	: Çarpım Sembolü
$\int$	: İntegral
$\mathfrak{L}$	: Laplace
$\Gamma(m)$	: Gama Fonksiyonu
$B(z, y)$	: Beta Fonksiyonu
$Er f(x)$	: Hata Fonksiyonu
$E_\beta(p)$	: Tek Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu
$E_{(\beta_1, \beta_2)}(p)$	: İki Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu
$\sinh$	: Sinüs Hiperbolik Fonksiyonu
$\cosh$	: Kosinüs Hiperbolik Fonksiyonu
$\frac{d^n f(y)}{dy^n}$	: n . Mertebeden Türev
${}^{RL}D_t^\zeta f(t)$	: Caputo Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli Türevi
${}_a^C D_t^\zeta f(t)$	: Caputo Kesirli Türevi
$D^{-\zeta} f(t)$	: Kesirli İntegral
${}_a^{CF} D_t^\zeta f(t)$	: Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi
$D_{0, \mu\alpha}^\zeta f(t)$	: Erdelyi-Kober Kesirli Türevi
${}^{ABR} D_t^\zeta f(t)$	: Riemann Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli Türevi
${}^{ABC} D_t^\zeta f(t)$	: Caputo Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli Türevi
${}^{CF} I^\zeta f(t)$	: Caputo-Fabrizio Kesirli İntegrali
${}_a^{AB} I_t^\zeta f(t)$	: Atangana-Baleanu Kesirli İntegrali

1. GİRİŞ

Türev, fiziksel olayların hangi hızda nasıl değiştiğini ve belli bir andaki değişim hızının bulunmasını sağlar. Türevin fiziksel olayların değişimini açıklamadaki eksikliklerinin fark edilmesi ile daha kapsamlı olan kesirli türeve ihtiyaç duyulmuştur.

Kesirli türev ilk olarak L'Hospital ve Leibnitz arasındaki bir mektuplaşmada karşımıza çıkmıştır. L'Hospital 1695'te Leibnitz'e yazdığı bu mektupta yaptığı bir çalışmada $\frac{d^n(x)}{dx^n}$ ifadesini kullanmıştır. Bu ifade $y(x)$ fonksiyonunun x 'e bağlı olarak n . dereceden türevidir. L'Hospital, Leibnitz'e kullandığı bu ifadede n 'nin tam sayı dışında bir değer alması ile ilgili bir soru sormuştur (Miller ve Ross, 1993). Bu mektuplaşmadan sonra 300 yıl boyunca birçok matematikçi bu alanda çalışmıştır (Miller ve Ross, 1993; Podlubny, 1999; Samko ve dig., 1993). 1729'da Euler Gamma fonksiyonunu tanımlayarak işleri daha kolay hale getirmiştir. Günümüzde kullanılan kesirli türev tanımlarına ışık tutan ilk uygulamayı 1823 yılında Abel yapmıştır. Birçok kesirli türev operatörü tanımlanmıştır ve tanımlanmaya devam etmektedir. Bu tanımlardan bazıları Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo, Hadamard, Miller-Ross ve Weyl'dir (Atangana ve Baleanu, 2016; Caputo, 1967; Miller ve Ross, 1993; Podlubny, 1999).

Literatürde en çok kullanılan tanımlar Caputo ve Riemann-Liouville'dir. Türev kavramına en yakın kesirli türev tanımı olarak Riemann-Liouville tanımı kullanılmaya başlanmıştır. Fakat türev ve Riemann-Liouville kesirli türevi arasında çok önemli bir fark vardır. Sabitin türevi sıfır iken Riemann-Liouville kesirli türevde sabitin türevi sıfır olamamaktadır. Bu problemi çözmek için Michele Caputo 1967 yılında (Caputo, 1967) kesirli türev tanımını yapmıştır. Bu tanım ile sabitin türevinin sıfır olma problemi ortadan kalkmıştır. Caputo kesirli türev tanımının ise yerellik ve teklik problemi vardır. Michele Caputo 2015 yılında Mauro Fabrizio ile (Caputo ve Fabrizio, 2015) kesirli türevini tanımlamıştır. Böylelikle teklik problemini çözmüşlerdir. Daha sonra Abdon Atangana ve Dumitru Baleanu birlikte (Atangana ve Baleanu, 2016) kesirli türevini tanımlayarak Caputo Fabrizio'daki yerellik problemini ortadan kaldırmışlardır.

Kesirli türev alanında çalışmalar hızla devam etmektedir ve gün geçtikçe yeni uygulama alanları bulmaktadır. Fizik, mühendislik bilimleri başta olmak üzere biyoloji, tıp, genetik, eczacılık, psikoloji vb. pek çok bilim dalında uygulamaları vardır. Tıp bilim dalında

salgın hastalıklar ile ilgili birçok uygulama yapılmıştır. Buna örnek olarak (Alkahtani ve dig., 2017; Dokuyucu ve Çelik, 2021; Dokuyucu ve dig., 2018; Koca, 2018b,a; Koca ve dig., 2020) çalışmaları incelenebilir.

Salgın hastalık, hastalığa etki eden bir enfeksiyonun duyarlı bir bireye doğrudan ya da dolaylı yollar ile teması sonucunda bireyde hastalığa sebep olması ve bu bireylerin de birçok bireye bulaştırmasıdır (Yurdakul, 2015). İnsanlık tarihi boyunca salgın hastalıklar ile mücadele edilmiştir. Salgın hastalıklar yalnızca hasta bireyleri değil hasta olmayan bireyleri de birçok yönden etkilemiştir (Parıldar, 2020). İnsanlık günümüze kadar birçok hastalık ile karşı karşıya gelmiştir. Bunlardan bazıları; veba, kolera, İspanyol gribi, tüberküloz, sıtma, AIDS ve covid-19'dur. Bu hastalıklar toplumu birçok yönden etkilemiştir. Örnek olarak Afrikadaki yoksulluğun ve ölümlerin en önemli etkenleri kolera, Ebola, tüberküloz ve AIDS'dir (Sherman, 2016).

İnsan hayatını etkileyen salgın hastalıklardan biri de Zika virüsüdür. Zika virüsü salgın hastalığına Aedes sivrisinekleri neden olur. Bu salgın hastalık 1947'de Uganda'da maymunlarda ortaya çıkmıştır. Daha sonra 1952'de Uganda ve Tanzanya'da insanlarda görülmüştür (Simpson, 1964). Bu salgın hastalık daha çok Asya, Afrika ve Pasifikte görülmektedir. 2013 yılında Fransız polinezyasında bir salgın meydana gelmiştir. Ardından 2015 yılında Brezilya'da büyük bir salgın olmuştur. Zika virüs hastalığı Aedes cinsinde enfekte olmuş dişi sivrisineklerin insanları ısırması ile ortaya çıkmıştır (Gao ve dig., 2016). Bu hastalık ülkeler için hâlâ endişe vericidir (Musso ve dig., 2014). Hastalığın tedavisi sadece dinlenme ve bazı ilaçlardır. Bunlar dışında herhangi bir tedavi mevcut değildir. Aynı zamanda zika virüsünden korunmak için bireyler enfekte olmuş Aedes sivrisineklerden kaçınmalıdırlar. Bu tür bulaşıcı hastalıkların matematiksel modellemeleri, hastalığın davranışını incelemek için kullanılmaktadır. Zika virüsü model örnekleri (Tesla ve dig., 2018; Din ve dig., 2016; Gao ve dig., 2016; Bonyah ve dig., 2014; Lee ve dig., 2016; Agosto ve dig., 2017; Bogoch ve dig., 2016; Khan ve dig., 2019; Suparit ve dig., 2018; Terefe ve dig., 2018)' dir.

Bu çalışmada Zika Aseptomatik taşıyıcı matematiksel modelinin Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türev ile analizi yapılmıştır. Çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde kesirli türevin tarihi ve Zika virüs modeli hakkında bilgiler verilmiştir. İkinci bölüm, yerel olmayan ve tekil olmayan çekirdekli Atangana-Baleanu kesirli türevi ile ilgili temel tanımları ve teoremleri sunulmuştur. Üçüncü bölüm tezi yazarken kullanılan tanım ve teoremlerden oluşur. Dördüncü bölümde matematiksel modelin varlığı ve tekliği, sabit nokta teoremi yardımıyla analiz edilmiştir. Daha sonra modelin kararlılığı Hyers-Ulam kararlılık teoremi ile incelenmiştir. Son olarak Adams-Bashforth sayısal yaklaşımı

Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli diferansiyeline entegre edilerek modelin sayısal çözümleri gerçekleştirilmiştir. Simülasyonlar da yapılarak model ayrıntılı olarak incelenmiştir. Beşinci bölümde ise sonuç kısmı yer almaktadır.



2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Kesirli Türev Operatörlerinde Kullanılan Temel Fonksiyon ve Dönüşümler

Bu bölümde kesirli mertebeden türev operatörlerinden bahsetmeden önce bu hesaplamalarda önemli olan temel fonksiyon ve operatörlere yer verilir.

2.1.1. Gamma Fonksiyonu

Gamma fonksiyonu; kesirli mertebeden türev analizinde kullanılan önemli fonksiyonlardanır (Altın, 2011). $\Gamma(m)$ ile sembolize edilir. Gamma fonksiyonu $m \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$$\Gamma(m) = \int_0^{\infty} t^{m-1} e^{-t} dt \quad m \in \mathbb{R},$$

şeklinde tanımlanır.

Gamma Fonksiyonunun Bazı Özellikleri:

$\Gamma(m)$ fonksiyonu $m > 0$ tanımlıdır.

$\Gamma(m)$ fonksiyonu $m > 0$ değeri için süreklidir.

Gamma fonksiyonu için verilen integralde, sonlu pozitif reel sayılar kümesinde ki $[a, b]$ ' de düzgün yakınsak olduğu zaman Gamma fonksiyonunun türevi elde edilebilir.

$$\Gamma(m) = (m-1)!$$

$$\Gamma(m+1) = m! = m(m-1)! = m\Gamma(m)$$

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

eşitlikleri sağlar (Podlubny, 1998).

2.1.2. Beta Fonksiyonu

Euler integralinin ilk türü, Beta fonksiyonudur. Beta fonksiyonu $z > 0, y > 0$ olmak üzere,

$$B(z, y) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{y-1} dt, \quad \text{Re}(z) > 0, \text{Re}(y) > 0$$

biçimindedir.

Beta Fonksiyonunun Bazı Özellikleri:

$$B(z) = \frac{\Gamma(z)^2}{\Gamma(2z)},$$

$$B(z, y) = B(y, z),$$

$$B(z, y) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(y)}{\Gamma(z+y)},$$

$$B(z, y) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+y}} dt, \quad \text{Re}(z) > 0, \text{Re}(y) > 0,$$

$$B\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$$

2.1.3. Hata Fonksiyonu

Hata fonksiyonu özel fonksiyondur. Olasılık, istatistik ve kısmi differansiyel denklem içinde sigmoid ve temel olmayan bir fonksiyondur. Hata fonksiyonuna Gauss hata fonksiyonu da denir.

Tanım 2.1

$$\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (2.1)$$

hata fonksiyonudur.

Hata Fonksiyonunun Bazı Özellikleri:

$$1 \quad \text{Erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt = 1 - \text{Erf}(x)$$

$$2 \quad \text{Erf}(0) = 0$$

$$3 \quad \text{Erf}(\infty) = 1$$

$$4 \quad \text{Erf}(-x) = -\text{Erf}(x)$$

$$5 \quad \text{Erf}(iz) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt$$

2.1.4. Mittag-Leffler Fonksiyonu

Mittag-Leffler fonksiyon tanımı 1903 yılında İsveçli bir matematikçi tarafından yapılmıştır (Yang., 2011). Mittag-Leffler fonksiyonları kesirli diferansiyel denklem çözümlerinde kullanılan önemli bir fonksiyondur. Bu fonksiyon e^x üstel fonksiyonun bir genellemesidir.

Mittag-Leffler Fonksiyonunun Bir Parametrelili Genelleştirilmiş Şekli:

$$E_{\beta}(p) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{p^t}{\Gamma(\beta t + 1)}, \quad \beta > 0,$$

olarak ifade edilir.

Özel olarak $\beta = 1$ ve $\beta = 2$ durumunda

$$E_1(p) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{p^t}{\Gamma(t + 1)} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{p^t}{t!} = e^p \quad (2.2)$$

ve

$$E_2(p) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{p^t}{\Gamma(2t + 1)} = \cosh(\sqrt{p}) \quad (2.3)$$

dir.

Bu fonksiyonu ilk olarak Agarwal ve Humbert iki parametrelili fonksiyona genelleştirmiştir (Agarwal, 1953). İki parametrelili Mittag-Leffler kesirli dereceden diferansiyel denklem hesaplamalarında kolaylık sağlamaktadır.

İki Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu :

$$E_{(\beta_1, \beta_2)}(p) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{p^t}{\Gamma(\beta_1 t + \beta_2)}, \quad \beta_1 > 0, \beta_2 > 0,$$

şeklinde ifade edilir. $\beta_1 = 1, \beta_2 = 1, 2$ değerleri olsun,

$$E_{(1,1)}(p) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{p^t}{\Gamma(t + 1)} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{p^t}{t!} = e^p,$$
$$E_{(1,2)}(p) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{p^t}{\Gamma(t + 2)} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{p^t}{(t + 1)!} = \frac{1}{p} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{p^{(t+1)}}{(t + 1)!} = \frac{e^p - 1}{p},$$

olarak yazılır (Hristov, 2015a; Kilbas ve dig., 2006).

2.1.5. Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşümü fizik, matematik, mühendislik gibi birçok alanda kullanılan bir dönüşümdür. Bu dönüşüm kullanılarak diferansiyel denklemlerin cebirsel denklemler haline

getirilmesini sağlar böylece çözümlerini kolaylaştırır.

$\mathcal{F}(t)$, $t \geq 0$ olmak üzere t reel değişkenine bağımlı bir fonksiyon olsun ($t < 0$ için $\mathcal{F}(t) = 0$ alınabilir); $s > 0$ reel veya kompleks bir parametre olmak üzere e^{-st} çekirdeği ile $\mathcal{F}(t)$ 'nin Laplace dönüşümü,

$$\mathcal{F}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.4)$$

şeklindedir.

(2.4) yakınsak bir integral ise $\mathcal{F}(t)$ fonksiyonun Laplace dönüşümünün varlığını gösterir.

Ters Laplace dönüşümünü göstermek için $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{F}(s)$ ifadesi kullanılır (Atici ve dig., 2011).

Ters Laplace dönüşümü,

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{F}(s); t\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{-st} \mathcal{F}(s) ds,$$

$c = \text{Re}(s) > c_0$. Burada c_0 Laplace integralinin yakınsak olduğu bölgenin sağ yarısında yer alır.

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

$f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri var olsun,

- $\mathcal{L}\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{g(t)\}$, c_1 ve c_2 sabit sayılar,
- $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \mathcal{F}(s - a)$, ($s > a$),
- $\mathcal{F}(s)$ ve $G(s)$ sırasıyla $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri ise

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{F}(s)G(s)$$

- $f(t)$ fonksiyonunun n 'inci dereceden türevinin Laplace dönüşümü ise

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\} = s^n \mathcal{F}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(t)|_{t=0}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

- $G(t) = \int_0^t f(u) du$ olmak üzere,

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{\mathcal{L}\{\mathcal{F}(t)\} + G(0^+)}{s}$$

dir.

Caputo ve RL Anlamında Atangana Baleanu Kesirli Türevlerinin Laplace Dönüşümleri:

$$\mathcal{L}\left\{{}_t^{ABC}D_0^\zeta(f(t))(s)\right\} = \frac{B(\zeta)}{1-\zeta} \frac{s^\zeta \mathcal{L}\{f(t)\}(s) - s^{\zeta-1} f(0)}{s^\zeta + \frac{\zeta}{1-\zeta}}$$

$$\mathcal{L} \left\{ {}^{ABR}_t D_0^\zeta (f(t))(s) \right\} = \frac{B(\zeta)}{1-\zeta} \frac{s^\zeta \mathcal{L}\{f(t)\}(s)}{s^\zeta + \frac{\zeta}{1-\zeta}}$$

dir.

2.2. Türev ve İntegral Operatörü

Sürekli bir fonksiyon olan $y = g(z)$ 'nin birinci mertebeden klasik türevi,

$$g'(z) = \frac{dg}{dz} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z) - g(z-h)}{h} \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır. $y = g(z)$ 'nin ikinci mertebeden klasik türevi,

$$\begin{aligned} g''(z) &= \frac{d^2g}{dz^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(z) - g'(z-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{g(z) - g(z-h)}{h} - \frac{g(z-h) - g(z-2h)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z) - 2g(z-h) + g(z-2h)}{h^2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

şeklinde gösterilir. Böylece üçüncü mertebeden türev ise

$$g'''(z) = \frac{d^3g}{dz^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z) - 3g(z-h) + 3g(z-2h) - g(z-3h)}{h^3} \quad (2.7)$$

şeklinde elde edilir. Genelleştirilirse

$$g^n(z) = \frac{d^n g}{dz^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} g(z-rh) \quad (2.8)$$

olarak ifade edilir.

Ardışık türevlerden $g(z)$ 'nin genel türev formülü elde edilir. Burada

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} \quad (2.9)$$

n ve r sabitlerinin genel binom gösterimidir. $p \in \mathbb{Z}$ için (2.5)-(2.8) eşitliklerinden,

$$g_h^{(\zeta)}(z) = \frac{1}{h^\zeta} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\zeta}{r} g(z-rh) \quad (2.10)$$

eşitliğine ulaşılır.

$\zeta \in \mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, (2.10) denkleminde $\binom{\zeta}{\zeta}$ 'dan sonraki tüm terimler 0 (sıfır) bulunacağından $\zeta \leq n$ için

$$\lim_{h \rightarrow 0} g_h^{(\zeta)}(z) = g^{(\zeta)}(z) = \frac{d^\zeta g}{dz^\zeta} \quad (2.11)$$

ifade edilebilir. ζ negatif değerlerde kolaylık sağlaması için

$$\begin{bmatrix} \zeta \\ r \end{bmatrix} = \frac{\zeta(\zeta+1)\dots(\zeta+r-1)}{r!} \quad (2.12)$$

kullanılırsa

$$\begin{bmatrix} -\zeta \\ r \end{bmatrix} = \frac{-\zeta(-\zeta+1)\dots(-\zeta+r-1)}{r!} = (-1)^r \begin{bmatrix} \zeta \\ r \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

(2.10) denkleminde ζ ifadesine, $-\zeta$ getirilirse

$$g_h^{(-\zeta)}(z) = \frac{1}{h^{-\zeta}} \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} \zeta \\ r \end{bmatrix} g(z-rh) \quad (2.14)$$

ulaşılır. $\zeta \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere eğer n sabitse, $h \rightarrow 0$ için, $g_h^{(-\zeta)}(z)$ limit 0'a yakınsar. Bu yakınsamanın sıfır olmaması için $n \rightarrow \infty$ kabul edildiği düşünülürse $h = \frac{z-a}{n}$ ifade edilebilir. Burada değeri a sabit ve $g_h^{(-\zeta)}(z)$ sınır değeri sonlu veya sonsuz düşünülürse

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=z-a}} g_h^{(-\zeta)}(z) = {}_a D_t^{(-\zeta)}(z)$$

ifade edilebilir. a ve t sınır olmakla beraber ${}_a D_t^{(-\zeta)}(z)$ ifadesi, z fonksiyonunun integralini ifade eder (Podlubny, 1999).

2.3. Bazı Kesirli Türev ve İntegral Operatörleri

Kesirli türev ve integral operatör örneklerinden önce bu operatörlerde kullandığımız bazı uzay tanımları ve kesirli türev ve operatör tanımları verilecektir.

Tanım 2.2 $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$ olsun o halde $f \in L_1(c, d)$ uzayı

$$\|f\| = \int_c^d |f(x)| dx < \infty$$

normu ile verilen fonksiyonlar uzayıdır (Samko ve dig., 1993).

Tanım 2.3 (c, d) olmak üzere Sobolev uzayı

$$H^1(c, d) = \{u|u \text{ mutlak sürekli, } u' \in L^2(C, D)\}$$

şeklinde tanımlanır (Atangana ve Koca, 2016).

Tanım 2.4 (Kesirli Mertebeden Adi Diferansiyel Denklem)

Bir veya daha fazla bağımlı değişkenin , bir değişkene göre kesirli mertebeden türevlerinin bulunduğu denklemlerdir (Benghorbal, 2004). En genel olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$${}_{\alpha_n}D^{\zeta_n}y(t) + {}_{\alpha_{n-1}}D^{\zeta_{n-1}}y(t) + \dots + {}_{\alpha_1}D^{\zeta_1}y(t) + {}_{\alpha_0}D^{\zeta_0}y(t) = f(t)$$

Tanım 2.5 (Kesirli Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklem)

Bir veya daha fazla bağımlı değişkenin, birden fazla değişkene göre kesirli mertebeden türevlerinin bulunduğu denklemlerdir (Podlubny, 1999).

L. Euler (1730):

$$\frac{d^b x^c}{dx^b} = c(c-1) \dots (c-b+1)x^{c-b}, \quad (2.15)$$

eşitliği ile Gamma fonksiyonunun özelliğini kullanarak

$$\Gamma(c+1) = c(c-1) \dots (c-b+1)\Gamma(c-b+1)$$

olmak üzere,

$$\frac{d^b x^c}{dx^b} = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c-b+1)} x^{c-b} \quad (2.16)$$

şeklinde tanımlar.

N. Henriks Abel (1823-1826):

Herhangi α değeri için

$$\int_0^x \frac{k'(\mu)d_\mu}{(x-\mu)^\alpha} = \varphi(x),$$

eşitliği kullanılarak

$$k(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d^{-\alpha} \varphi(x)}{dx^{-\alpha}} \quad (2.17)$$

şeklinde tanımlar.

J. B. Joseph Fourier (1820-1822):

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(ty - tz) dt,$$

eşitliği ile

$$\frac{d^n f(y)}{dy^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(ty - tz + n\frac{\pi}{2}) dt \quad (2.18)$$

ifadesini elde eder.

J. Liouville (1832-1855):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n e^{a_n x}$$

seri açılımını kullanarak,

$$\frac{d^v f(x)}{dx^v} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^v e^{a_n x} \quad (2.19)$$

şeklinde tanımlar.

Riemann-Liouville:

$$(n-1) \leq \zeta \leq n$$

şartı ile,

$${}^{RL}_\zeta D_t^\zeta f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\zeta)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_\zeta^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\zeta-n+1}}, \quad (2.20)$$

şeklinde tanımlar.

G. F. B. Riemann (1847-1876):

$$D^{-\zeta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\zeta)} \int_c^x (x-t)^{\zeta-1} f(t) dt + \psi(t), \quad (2.21)$$

şeklinde tanımlamıştır.

Grünwald-Letnikov:

$${}_a D_t^\zeta f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\zeta} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h}\right]} (-1)^j \binom{\zeta}{j} f(t-jh) \quad (2.22)$$

şeklinde tanımlamıştır.

Erdelyi-Kober:

$$I_{0,\mu,\mu+\alpha}^\zeta f(t) = \frac{\mu t^{-\mu(\zeta+\alpha)}}{\Gamma(\zeta)} \int_0^t \frac{x^{\mu\alpha+\mu-1} f(x) dx}{(t^\mu - x^\mu)^{1-\zeta}}, \quad 0 \leq \zeta < t \leq \infty,$$

olmak üzere Erdelyi-Kober kesirli türevi,

$$D_{0,\mu,\alpha}^\zeta f(t) = t^{\mu n} \left(\frac{1}{\mu t^{\mu-1}} D \right) t^{\mu(n+\alpha)} I_{0,\mu,\mu+\alpha}^\zeta (f(t)) \quad (2.23)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Hadamard:

Hadamard kesirli türev operatörü,

$$D_0^\zeta (f(t)) = \frac{1}{\Gamma(n-\zeta)} \left(t \frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t \left(\log \frac{t}{x}\right)^{n-\zeta-1} \frac{f(x)}{x} dx, \quad a < t < b \quad (2.24)$$

şeklinde dir.

M. Caputo (1967):

$${}_a^C D_t^\zeta f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\zeta)} \int_a^t \frac{f^n(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\zeta+1-n}}, \quad n-1 \leq \zeta < n \quad (2.25)$$

M. Caputo and M. Fabrizio (2015):

$\zeta \in [0, 1]$, $g \in H^1(c, d)$, $d > c$ olduğuna göre,

$${}_a D_t^\zeta g(t) = \frac{B(\zeta)}{(1-\zeta)} \int_a^t g'(\zeta) \exp\left[\frac{-\zeta(t-\tau)}{1-\zeta}\right] d\tau \quad (2.26)$$

şeklinde ifade edilir. Normalleştirme fonksiyonu olarak $B(\zeta)$ kullanılmıştır yani $B(0) = B(1) = 1$ dir. CF kesirli integral operatörü de,

$${}^{CF} I^\zeta f(t) = \frac{2(1-\zeta)}{(2-\zeta)B(\zeta)} u(t) + \frac{2\zeta}{(2-\zeta)B(\zeta)} \int_0^t u(s) ds, \quad t \geq 0, \quad 0 < \zeta < 1 \quad (2.27)$$

şeklinde gösterilir.

J. Losada and J. J. Nieto (2015):

$0 < \zeta < 1$ olmak üzere, ζ . mertebeden Caputo-Fabrizio kesirli türevi,

$${}^{CF} D_*^\zeta f(t) = \frac{1}{1-\zeta} \int_0^t f'(s) \exp\left[\frac{-\zeta}{1-\zeta}(t-s)\right] ds \quad t \geq 0 \quad (2.28)$$

ile tanımlanmıştır.

A. Atangana and D. Baleanu (2015):

$\zeta \in [0, 1]$, $f \in H^1(a, b)$, $b > a$ olmak üzere,

$${}^{ABR} {}_a D_t^\zeta f(t) = \frac{B(\zeta)}{1-\zeta} \left(\frac{d}{dt}\right) \int_0^t f(\tau) E_\zeta\left[\frac{-\zeta(t-\tau)^\zeta}{1-\zeta}\right] d\tau \quad (2.29)$$

şeklinde tanımlar. Burada $B(\zeta)$ normalleştirme fonksiyonu olup, $B(0) = B(1) = 1$ dir.

Abdon Atangana, Dumitru Baleanu (2015): Bu türevde $\zeta \in [0, 1]$ ve $f \in H^1(a, b)$ 'de $b > a$ şartıyla:

$${}^{ABC} {}_a D^\zeta f(t) = \frac{B(\zeta)}{(1-\zeta)} \int_a^t f'(\tau) E_\zeta\left[\frac{-\zeta(t-\tau)^\zeta}{1-\zeta}\right] d\tau \quad (2.30)$$

yukarıdaki denklemde olduğu gibi tanımlanmıştır. Söz konusu denklemde $B(\zeta)$ normalleştirme fonksiyonu olmak üzere, buradaki $\zeta = 0$ ve $\zeta = 1$ değerleri için normalleştirme fonksiyonunun değeri sıfır olmaktadır.

A. Atangana, D. Baleanu (2015):

$0 < \zeta < 1$ olmak üzere,

$${}^{AB} {}_\zeta I_t^\zeta f(t) = \frac{(1-\zeta)}{B(\zeta)} f(t) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_\zeta^t u(y)(t-y)^{\zeta-1} dy \quad (2.31)$$

ile tanımlanır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Atangana-Baleanu Kesirli Türev ve İntegral Operatörü

Kesirli türev operatörlerinde oluşan eksiklikler yeni çekirdekler ile giderilmeye çalışılmaktadır. (Caputo, 1967) kesirli türev operatöründe bulunan singülerlik problemini ortadan kaldırmak için çekirdeği üstel olarak değiştirerek (Caputo ve Fabrizio, 2015) kesirli türev tanımını yapmışlardır. Bunun akabinde (Losada ve Nieto, 2015) bu tanımın kesirli integral tanımını yapmışlardır. (Caputo ve Fabrizio, 2015) tanımında ise yerellik problemi olduğundan bu problemi ortadan kaldırmak için Atangana ve Baleanu ise üstel fonksiyon olan çekirdek yerine en uygun çekirdeği bulmak için; Mittag-Leffler fonksiyonunun kesirli adi diferansiyel denkleminde yola çıktılar. Aşağıda bulunan denklem Mittag-Leffler fonksiyonunun kesirli adi diferansiyel denklemdir (Hristov, 2015a,b; Kilbas ve dig., 2006).

$$\frac{d^\zeta z}{dx^\zeta} = az, \quad 0 < \zeta < 1 \quad (3.1)$$

Mittag-Leffler fonksiyonu yerel olmayan bir yapıya sahiptir. Mittag-Leffler fonksiyonunun genelleştirilmiş hali,

$$E_\zeta(-l^\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-l)^\zeta k}{\Gamma(\zeta k + 1)} \quad (3.2)$$

$\exp(-a(l-z))$ 'nin l noktasındaki Taylor serisi,

$$\exp(-a(l-z)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a(l-z))^k}{k!} \quad (3.3)$$

$a = \frac{\zeta}{1-\zeta}$ seçilip (3.3) denklemini Caputo-Fabrizio türev operatörü ile değiştirilirse,

$$D_t^\zeta(\kappa(l)) = \frac{B(\zeta)}{(1-\zeta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\zeta)^k}{k!} \int_b^l \frac{df(z)}{dz} (l-z)^k dz \quad (3.4)$$

elde edilir. Aşağıdaki ifadede denklem (3.4)'de $l!$ yerine $\Gamma(\zeta k + 1)$ ve $(l-z)^k$ yerine $(l-z)^{\zeta k}$ yazılırsa yerellik problemi ortadan kalkar ve

$$D_t^\zeta(\kappa(l)) = \frac{B(\zeta)}{(1-\zeta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\zeta)^k}{\Gamma(\zeta k + 1)} \int_b^l \frac{df(z)}{dz} (l-z)^{\zeta k} dz \quad (3.5)$$

elde edilir.

Tanım 3.1 $\kappa \in H^1(a, b), b > a, \zeta \in [0, 1]$ olmak üzere, Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türev tanımı aşağıdaki şekildedir:

$${}_b^{ABC}D_l^\zeta(\kappa(l)) = \frac{B(\zeta)}{1-\zeta} \int_b^l \kappa'(x) E_\zeta \left[-\zeta \frac{(l-x)^\zeta}{1-\zeta} \right] dx \quad (3.6)$$

Buradaki $B(\zeta)$ Caputo-Fabrizio ile aynı özelliktedir. Bulunan bu tanım gerçek dünya problemlerini tartışmak için faydalı olacaktır. Fiziksel problemlerin başlangıç koşulu ile çözmek için Laplace transformunu kullanırken çözümlerde kolaylık sağlamaktadır. Fakat $\zeta = 0$ olduğunda ilk fonksiyonu kaybedilir. Bu sorundan kurtulmak için aşağıdaki tanım oluşturulmuştur.

Tanım 3.2 $H^1(a, b), b > a, [0, 1]$ içindeki ζ 'de κ olsun, o halde Riemann anlamında Atangana-Baleanu kesirli türev tanımı,

$${}_b^{ABR}D_l^\zeta(\kappa(l)) = \frac{B(\zeta)}{1-\zeta} \frac{d}{dl} \int_b^l \kappa(x) E_\zeta \left[-\zeta \frac{(l-x)^\zeta}{1-\zeta} \right] dx \quad (3.7)$$

şeklinde dir.

(3.6) ve (3.7) denklemleri yerel olmayan bir çekirdeğe sahiptir. κ fonksiyonu sabitse türevi sıfırdır (Atangana ve Baleanu, 2016). Böylece (3.6) denkleminde fonksiyon sabit olursa türevi sıfır olur. (3.6) ve (3.7) arasındaki ilişkiye bakılırsa sırasıyla verilen türevlerin Laplace ilişkisi incelendiğinde aşağıdaki eşitlikler,

$$L[{}_0^{ABR}D_l^\zeta \kappa(l)](s) = \frac{B(\zeta)}{1-\zeta} \frac{s^\zeta L\{\kappa(l)\}(s)}{s^\zeta + \frac{\zeta}{1-\zeta}} \quad (3.8)$$

ve

$$L[{}_0^{ABC}D_l^\zeta \kappa(l)](s) = \frac{B(\zeta)}{1-\zeta} \frac{s^\zeta L\{\kappa(l)\}(s) - s^{\zeta-1} \kappa(0)}{s^\zeta + \frac{\zeta}{1-\zeta}} \quad (3.9)$$

olarak bulunur (Atangana ve Baleanu, 2016). Böylece aşağıdaki teorem yazılmıştır (Atangana ve Baleanu, 2016).

Teorem 3.1 $\kappa \in H^1(a, b), b > a, \zeta \in [0, 1]$ olmak üzere aşağıdaki denklem,

$${}_0^{ABC}D_l^\zeta(\kappa(l)) = {}_0^{ABR}D_l^\zeta(\kappa(l)) + H(l) \quad (3.10)$$

bulunur.

İspat Tanım (3.10) ve her iki tarafa uygulanan Laplace dönüşümleri kullanılarak

$$L[{}_0^{ABC}D_l^\zeta \kappa(l)](s) = \frac{B(\zeta)}{1-\zeta} \frac{s^\zeta \mathcal{L}\{\kappa(l)\}(s)}{s^\zeta + \frac{\zeta}{1-\zeta}} - \frac{s^{\zeta-1} \kappa(0)}{s^\zeta + \frac{\zeta}{1-\zeta}} \frac{B(\zeta)}{1-\zeta} \quad (3.11)$$

bulunur. (3.8) denkleminde,

$$L[{}_0^{ABC}D_l^\zeta \kappa(l)](s) = L[{}_0^{ABR}D_l^\zeta \kappa(l)](s) - \frac{s^{\zeta-1}\kappa(0)}{s^\zeta + \frac{\zeta}{1-\zeta}} \frac{B(\zeta)}{1-\zeta} \quad (3.12)$$

olur. Böylece bu ifadenin her iki tarafına da ters Laplace dönüşümü yapılırsa

$${}_0^{ABC}D_l^\zeta \kappa(l) = {}_0^{ABR}D_l^\zeta \kappa(l) - \frac{B(\zeta)}{1-\zeta} \kappa(0) E_\zeta\left(-\frac{\zeta}{1-\zeta} l^\zeta\right) \quad (3.13)$$

elde edilir böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2 F , $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli bir fonksiyon olsun,

$$\|{}_0^{ABC}D_l^\zeta \kappa(l)\| < \frac{B(\zeta)}{1-\zeta} K, \quad \|\phi(l)\| = \max_{a \leq l \leq b} |\phi(l)| \quad (3.14)$$

eşitsizliği bulunur (Atangana ve Baleanu, 2016).

İspat

$$\begin{aligned} \|{}_0^{ABC}D_l^\zeta \kappa(l)\| &= \left\| \frac{B(\zeta)}{1-\zeta} \frac{d}{dl} \int_0^l \kappa(x) E_\zeta\left[-\zeta \frac{(l-x)^\zeta}{1-\zeta}\right] dx \right\| \\ &< \frac{B(\zeta)}{1-\zeta} \left\| \frac{d}{dl} \int_0^l \kappa(x) dx \right\| \\ &= \frac{B(\zeta)}{1-\zeta} \|\kappa(x)\| \end{aligned}$$

böylece $K = \|\kappa(x)\|$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.3 Riemann anlamında Atangana-Baleanu ve Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevleri Lipschitz şartını sağlar ve κ ve ϕ fonksiyonları için

$$\|{}_0^{ABR}D_l^\zeta \kappa(l) - {}_0^{ABR}D_l^\zeta \phi(l)\| \leq H \|\kappa(l) - \phi(l)\| \quad (3.15)$$

$$\|{}_0^{ABC}D_l^\zeta \kappa(l) - {}_0^{ABC}D_l^\zeta \phi(l)\| \leq H \|\kappa(l) - \phi(l)\| \quad (3.16)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. (3.15) ve (3.16) eşitsizliklerinin ispatı benzer olacağından (3.15) eşitsizliğinin ispatı incelenebilir.

İspat

$$\begin{aligned} &\|{}_0^{ABR}D_l^\zeta \kappa(l) - {}_0^{ABR}D_l^\zeta \phi(l)\| = \\ &\left\| \frac{B(\zeta)}{1-\zeta} \frac{d}{dl} \int_0^l \kappa(x) E_\zeta\left[-\zeta \frac{(l-x)^\zeta}{1-\zeta}\right] dx - \frac{B(\zeta)}{1-\zeta} \frac{d}{dl} \int_0^l \phi(x) E_\zeta\left[-\zeta \frac{(l-x)^\zeta}{1-\zeta}\right] dx \right\| \end{aligned}$$

olarak ifade edilir. Birinci mertebeden türevin Lipschitz koşulu kullanılarak pozitif bir sabit bulunabilir,

$$\begin{aligned} \left\| {}_0^{ABR}D_l^\zeta \kappa(l) - {}_0^{ABR}D_l^\zeta \phi(l) \right\| &\leq \frac{B(\zeta)\theta_1}{1-\zeta} E_\zeta \left[-\zeta \frac{l^\zeta}{1-\zeta} \right] \\ &\times \left\| \int_0^l \kappa(x)dx - \int_0^l \phi(x)dx \right\| \end{aligned} \quad (3.17)$$

ardından

$$\begin{aligned} \left\| {}_0^{ABR}D_l^\zeta \kappa(l) - {}_0^{ABR}D_l^\zeta \phi(l) \right\| &\leq \frac{B(\zeta)\theta_1}{1-\zeta} E_\zeta \left[-\zeta \frac{l^\zeta}{1-\zeta} \right] \\ &\times \left\| \kappa(x) - \phi(x) \right\| l \\ &\leq H \left\| \kappa(x) - \phi(x) \right\| \end{aligned} \quad (3.18)$$

elde edilir. Böylece Lipshitz koşulunu sağladığı görülür. Lipshitz koşulunu sağlayan Riemann anlamında Atangana-Baleanu kesirli diferansiyel denkleminde κ , n (n doğal sayı) kez türevlenebilir olsun ve $\kappa^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$ şartıyla

$${}_0^{ABC}D_l^\zeta \left(\frac{d^n \kappa(l)}{dl^n} \right) = \frac{d^n}{dl^n} ({}_0^{ABR}D_l^\zeta \kappa(l)) \quad (3.19)$$

bulunur. Buradan aşağıda bulunan eşitliğin ispatı yapılabilir.

$${}_0^{ABC}D_l^\zeta (\kappa(l)) = u(l) \quad (3.20)$$

Böylece (3.20)'deki çözümü elde edilir. Bu çözüm,

$$\kappa(l) = \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} u(l) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^l u(z)(l-z)^{\zeta-1} dz.$$

olur.

Tanım 3.3 Yerel olmayan yeni kesirli diferansiyel denklemin integral operatörü,

$${}_a^{AB}I_l^\zeta (\kappa(l)) = \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} u(l) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_a^l \kappa(z)(l-z)^{\zeta-1} dz.$$

olarak ifade edilebilir. Burada $\zeta = 0$ değeri verildiğinde, başlangıç fonksiyonu bulunur ve $\zeta = 1$ değeri verilirse standart integral elde edilir (Atangana ve Baleanu, 2016).

3.2. Varlık ve Teklik Çözümü

Başlangıç koşulu ile verilen diferansiyel denklemlerin çözümlerinin var ve tek olması gerekir. Bu diferansiyel denklemlerin önce varlığına daha sonra tekliğine bakılır.

3.2.1. Varlık Çözümü

Tanım 3.4

$$z'' = h(k, z) \quad z(k_0) = z_0$$

başlangıç şartı olmak üzere, g fonksiyonu $I \times R$ 'de tanımlı ve sürekli bir fonksiyon aynı zamanda $I \subset R$ olan açık bir aralıktır. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon I 'da tanımlı ise çözümü vardır ve $\alpha(k)$ bu başlangıç değer probleminin çözümüdür.

- $k \in I$ için $\alpha'(k)$ vardır,
- $\alpha(t_0) = z_0, t_0 \in I$
- $k \in I$ için $(k, \alpha(k)) \in I \times R$
- $k \in I$ için $\alpha'(k) = h(k, \alpha(k))$

Tanım 3.5 Her $(k, c_1), (k, c_2) \in R(a, b)$ için

$$|h(k, c_1) - h(k, c_2)| \leq K|c_1 - c_2|$$

eşitsizliği sağlayan bir pozitif K sabiti var ise bu fonksiyon $R(a, b)$ bölgesinde Lipschitz koşulunu sağlar. Bulunan bu sabite de Lipschitz sabiti denir.

3.2.2. Teklik Çözümü

Başlangıç değer probleminin yalnız bir çözümü var olduğunu göstermek için çözümün tekliğine bakılır. Başlangıç değer probleminin belli aralıkta tekliğini göstermek için Picard-Lindelöf teoremi kullanılabilir.

Teorem 3.4 $g(k, v)$ ve $\frac{\beta(g)}{\beta(v)}$ fonksiyonları, $R(a, b) = \{(k, v) : |k - t_0| \leq a, |v - v_0| \leq b\}$ kapalı ve sınırlı aralığında aynı zamanda k ve v 'ye göre sürekli ve Lipschitz katsayısı koşulunu sağlar. Bu durumda (1)-(2) koşulları altında başlangıç değer probleminin $|g(k, v)| \leq M$ ve $\phi = \min(a, \frac{b}{M})$ olmak üzere $|k - k_0| \leq \phi$ aralığında tanımlı yalnız bir $v(k)$ çözümü vardır.

1. $k \in I$ koşulu ile $\alpha'(k)$ vardır.
2. $\alpha(k_0) = v_0, k_0 \in I$.

Teorem 3.5 (Picard-Lindelöf teoremi) Başlangıç değer probleminde $B \subset \mathbb{R}^2$ ve g fonksiyonu $B \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı olması koşuluyla bir B alanı ve $\frac{dy}{dx} = g(c, b)$ ve $g(c_0) = b_0$ koşullarıyla g fonksiyonu vardır. Eğer g fonksiyonu B alanında sürekli bir fonksiyon ve $g(c, b)$ ve g Lipschitz koşulu ile aynı zamanda B alanında sürekli olması koşuluyla $\epsilon > 0$ sabit sayısı için B alanında yalnız bir tane çözüm vardır.

İspat $(c_0, b_0) \in B$ olsun, B alanında herhangi bir (c_0, b_0) noktaları ve $a > 0, b > 0$ sabit noktalar olsun.

$D = \{(c, b) : |c - c_0| \leq a, |b - b_0| \leq b\} \subset B$ koşuluyla dikdörtgensel bir alan olsun.

$M = \max_{(c,b) \in R} g(c, b)$ ve $h = \min(a, \frac{b}{M})$ koşuluyla, $|c - c_0| \leq h$ aralığında başlangıç değer problemi yalnız bir çözüme sahiptir. Böylece $a < \frac{b}{M}$ olduğunda $h = a$ olur. Böylece $R_1 = R$ bulunur. $\frac{b}{M} < a$ olduğunda $h = \frac{b}{M}$ bulunur aynı zamanda $R_1 \subset R$ olur.

$R = \{(c, b) : |c - c_0| \leq a, |b - b_0| \leq b\}$

$R_1 = \{(c, b) : |c - c_0| \leq h, |b - b_0| \leq b\}$

R ve R_1 şeklinde tanımlansın. Böylece teoremin ispatı ardışık yaklaşımlarla yapılabilir. O halde,

$|c - c_0| < h$ aralığında $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \Upsilon_3 \dots$ fonksiyonları yazılsın,

$$\begin{aligned}\Upsilon_1 &= b_0 + \int_{c_0}^c g(t, b_0) dt \\ \Upsilon_2 &= b_0 + \int_{c_0}^c g(t, \Upsilon_1(t)) dt \\ \Upsilon_3 &= b_0 + \int_{c_0}^c g(t, \Upsilon_2(t)) dt \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ \Upsilon_n &= b_0 + \int_{c_0}^c g(t, \Upsilon_{n-1}(t)) dt\end{aligned}\tag{3.21}$$

İlk olarak $[c_0, c_0 + h]$ aralığında başlangıç değer probleminin varlığı ispatlanır. Benzer şekilde $[c_0 - h, c_0]$ aralığında da varlığı ispatlanır. İspat dört adımda gösterilebilir.

$\Upsilon_{n-1}(c)$ fonksiyonu $[c_0, c_0 + h]$ aralığında türevli olsun ve $c \in [c_0, c_0 + h]$ için $|\Upsilon_{n-1}(c) - b_0| \leq b$ olsun. O halde $(c, \Upsilon_{n-1}(c)) \in R_1$ olur. $(c, \Upsilon_{n-1}(c))$ 'da tanımlı ve sürekli olan $g(c, \Upsilon_{n-1}(c))$ fonksiyonu vardır. O zaman $[c_0, c_0 + h]$ aralığında $|b(c, \Upsilon_{n-1}(c))| \leq M$ bulunur. $\Upsilon_n(c) = b_0 + \int_{c_0}^c f(t, \Upsilon_{n-1}(c)) dt$ olursa,

1. Υ_n bir fonksiyondur, $[c_0, c_0 + h]$ aralığında sürekli ve türevi mevcuttur ,

$$\begin{aligned}
|\Upsilon_n(\mathfrak{c}) - \mathfrak{b}_o| &= \left| \int_{\mathfrak{c}_o}^{\mathfrak{c}} g(t, \Upsilon_{n-1}(\mathfrak{c})) dt \right| \\
&\leq \int_{\mathfrak{c}_o}^{\mathfrak{c}} g(t, \Upsilon_{n-1}(\mathfrak{c})) dt \\
&\leq \int_{\mathfrak{c}_o}^{\mathfrak{c}} M dt = M(\mathfrak{c} - \mathfrak{c}_o) \quad h = \min(a, \frac{b}{M}) \\
&\leq Mh \leq b
\end{aligned}$$

$(\mathfrak{c}, \Upsilon_n(\mathfrak{c}))$ R_1 aralığındaki bir noktadır ve bu nedenle $[(\mathfrak{c}, \Upsilon_n(\mathfrak{c})), [\mathfrak{c}_o, \mathfrak{c}_o + h]]$ kapalı aralığında tanımlı ve sürekli bir fonksiyondur. $n = 1$ kabul ederek, o zaman $\Upsilon_1(\mathfrak{c}) = \mathfrak{b}_o + \int_{\mathfrak{c}_o}^{\mathfrak{c}} \lfloor(t, \mathfrak{b}_o) dt$ bulunur. Böylece Υ_1 fonksiyonu $[\mathfrak{c}_o, \mathfrak{c}_o + h]$ kapalı aralığında tanımlı ve sürekli olan bir fonksiyondur. Aynı zamanda,

$$\begin{aligned}
|\Upsilon_1(\mathfrak{c}) - \mathfrak{b}_o| &\leq \int_{\mathfrak{c}_o}^{\mathfrak{c}} |g(t, \mathfrak{b}_o)| dt \\
&\leq M(\mathfrak{c} - \mathfrak{c}_o) \leq Mh \leq b
\end{aligned}$$

dır.

O halde $n = 1$ iken $(\mathfrak{c}, \Upsilon_1(\mathfrak{c}))$ noktası R_1 'de tanımlı bir nokta ve $g(\Upsilon_1(\mathfrak{c})), [\mathfrak{c}_o, \mathfrak{c}_o + h]$ aralığında sürekli bir fonksiyondur ve aynı zamanda $[\mathfrak{c}_o, \mathfrak{c}_o + h]$ aralığında denklemin çözümüdür.

Aynı yöntemle verilen denklemde tanımlanan Υ_n fonksiyonu, tümevarım yöntemi ile $[\mathfrak{c}_o, \mathfrak{c}_o + h]$ kapalı aralığındaki özellikleri gösterir. Bu durumda Υ fonksiyonu $[\mathfrak{c}_o, \mathfrak{c}_o + h]$ kapalı aralığında vardır ve denklemin çözümüdür. Böylece teorem ispatlanmış olur.

2. $(\mathfrak{c}_o, \mathfrak{c}_o + h)$ aralığında $\{\Upsilon_n\}$ çözümü tektir ve aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$[\mathfrak{c}_o, \mathfrak{c}_o + h] \text{ aralığında } |\Upsilon_n(\mathfrak{c}) - \Upsilon_{n-1}(\mathfrak{c})| \leq \frac{M(\alpha h)^n}{\alpha n!}, \text{dır.}$$

$\mathfrak{c} \in (\mathfrak{c}_o, \mathfrak{c}_o + h)$ aralığında $|\Upsilon_{n-1}(\mathfrak{c}) - \Upsilon_{n-2}(\mathfrak{c})| \leq \frac{M\alpha^{n-2}}{(n-1)!}(\mathfrak{c} - \mathfrak{c}_o)^{n-1}$ olduğu kabul edilirse,

$$\begin{aligned}
|\Upsilon_n(\mathfrak{c}) - \Upsilon_{n-1}(\mathfrak{c})| &= \left| \int_{\mathfrak{c}_o}^{\mathfrak{c}} (\lfloor(t, \Upsilon_{n-1}(t)) - \lfloor(t, \Upsilon_{n-2}(t))) dt \right| \\
&\leq \int_{\mathfrak{c}_o}^{\mathfrak{c}} \left| \lfloor(t, \Upsilon_{n-1}(t)) - \lfloor(t, \Upsilon_{n-2}(t)) \right| dt
\end{aligned}$$

İspatın birinci bölümünden $\mathfrak{c} \in (\mathfrak{c}_o, \mathfrak{c}_o + h)$ aralığında $|\Upsilon_n(\mathfrak{c}) - \mathfrak{b}_o| \leq b$ olur. Bu nedenle $(\mathfrak{c}, \Upsilon_{n-1}(\mathfrak{c}))$ ve $(\mathfrak{c}, \Upsilon_{n-2}(\mathfrak{c}))$ noktaları $\mathfrak{c} \in (\mathfrak{c}_o, \mathfrak{c}_o + h)$ aralığında R_1 ' de iki nokta olduğu söylenebilir. Lipschitz katsayısı teoreminden $|\Upsilon_n(\mathfrak{c}) - \Upsilon_{n-1}(\mathfrak{c})| \leq \alpha \int_{\mathfrak{c}_o}^{\mathfrak{c}} |\Upsilon_{n-1}(t) -$

$\Upsilon_{n-2}(t)|dt$ olur.

$$\begin{aligned}
|\Upsilon_n(\mathbf{c}) - \Upsilon_{n-1}(\mathbf{c})| &\leq \alpha \int_{\mathbf{c}_0}^{\mathbf{c}} |\Upsilon_{n-1}(t) - \Upsilon_{n-2}(t)| dt \\
&\leq \alpha \int_{\mathbf{c}_0}^{\mathbf{c}} \frac{M\alpha^{n-2}}{(n-1)!} (t - \mathbf{c}_0)^{n-1} dt \\
&\leq \frac{M\alpha^{n-1}}{(n-1)!} \left[\frac{(t - \mathbf{c}_0)^n}{n} \right]_{\mathbf{c}_0}^{\mathbf{c}} = \frac{M\alpha^{n-1}}{n!} (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0)^n = \frac{M}{\alpha} \frac{\alpha^n}{n!} h^n \\
&\leq \frac{M}{\alpha} \frac{(\alpha h)^n}{n!} \quad \left(|x - \mathbf{c}_0| \leq h \right)
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir.. Böylece ispat tamamlanır. O halde çözüm tektir denir.

3. $n \rightarrow \infty$ Υ_n sürekli fonksiyonu $[\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_0 + h]$ aralığında eşit aralıklarla Υ fonksiyonunu yakınsar.
4. Υ fonksiyonunun limiti $[\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_0 + h]$ aralığında başlangıç değer problemine karşılık gelir.

3.3. Kararlılık Analizi ve Denge Noktası

$\zeta \in (0, 1]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
D^\zeta z_1(t) &= g_1(z_1, z_2, \dots, z_k), \\
D^\zeta z_2(t) &= g_2(z_1, z_2, \dots, z_k), \\
&\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots \\
D^\zeta z_k(t) &= g_k(z_1, z_2, \dots, z_k),
\end{aligned} \tag{3.22}$$

sistemi

$$z_1(0) = z_{01}, z_2(0) = z_{02}, \dots, z_k(0) = z_{0k},$$

başlangıç koşulları göz önünde bulundurulursa (3.22) denklem sisteminin denge noktaları,

$$D^\zeta z_i(t) = 0 \implies g_i(z_1^*, z_2^*, \dots, z_k^*) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

şartlarını sağlayan $z_1^*, z_2^*, \dots, z_k^*$ noktalardır.

Bu denge noktalarının asimptotik kararlılığını elde edebilmek için,

$$z_i(t) = z_i^* + \aleph_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, k$$

olduğunu kabul edersek $z(t)$ (3.22) de verilen Başlangıç Değer Probleminin çözümü olduğu için

$$D^\zeta(z_i^* + \aleph_i) = g_i(z_1^* + \aleph_1, z_2^* + \aleph_2, \dots, z_k^* + \aleph_k), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

böylece

$$D^\zeta \aleph_i(t) = g_i(z_1^* + \aleph_1, z_2^* + \aleph_2, \dots, z_k^* + \aleph_k), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

ifade edilebilir.* Denge noktasını ifade etmek için

$$\begin{aligned} g_i(z_1^* + \aleph_1, z_2^* + \aleph_2, \dots, z_k^* + \aleph_k) &\simeq g_i(z_1^*, z_2^*, \dots, z_k^*) \\ &+ \left. \frac{\partial g_i}{\partial z_1} \right| * \aleph_1 + \left. \frac{\partial g_i}{\partial z_2} \right| * \aleph_2 \\ &+ \dots + \left. \frac{\partial g_i}{\partial z_k} \right| * \aleph_k \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (3.23)$$

ve $g_i(z_1^*, z_2^*, \dots, z_k^*) = 0$ olduğu için

$$g_i(z_1^* + \aleph_1, z_2^* + \aleph_2, \dots, z_k^* + \aleph_k) \simeq \left. \frac{\partial g_i}{\partial z_1} \right| * \aleph_1 + \left. \frac{\partial g_i}{\partial z_2} \right| * \aleph_2 + \dots + \left. \frac{\partial g_i}{\partial z_k} \right| * \aleph_k \quad (3.24)$$

elde edilir.(3.23) ve(3.24) den

$$D^\zeta(\aleph_i(t)) \simeq \left. \frac{\partial g_i}{\partial z_1} \right| * \aleph_1 + \left. \frac{\partial g_i}{\partial z_2} \right| * \aleph_2 + \dots + \left. \frac{\partial g_i}{\partial z_k} \right| * \aleph_k \quad (3.25)$$

elde edilir.

$$\aleph = [\aleph_1, \aleph_2, \dots, \aleph_k]^T \quad (3.26)$$

ve

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}, a_{i,j} = \left. \frac{\partial g_i}{\partial z_j} \right| * \quad i, j = 1, 2, \dots, k,$$

olmak üzere,

$$D^\zeta \aleph = A \aleph \quad (3.27)$$

$\aleph_i(0) = z_i(0) - z_i^*$, $i = 1, 2, \dots, k$ elde edilir. B matrisi A matrisinin öz vektörlerinden oluşmuştur ve A matrisinin öz değerleri $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ olmak üzere,

$$C = \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \zeta_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \zeta_k \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

$$C = B^{-1}AB \quad (3.29)$$

(3.29), (3.27) denkleminde yazılırsa

$$D^\zeta \varrho = B^{-1}CB\varrho \quad (3.30)$$

bulunur. Burada $\varrho = B^{-1}\aleph$ ve $\varrho = [\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_k]$ dir. (3.30) denklem sisteminin Mittag-Leffler fonksiyonları yardımı ile çözümü,

$$\varrho_i = \sum_0^\infty \frac{(\zeta_i)^n t^{n\zeta}}{\Gamma(n\zeta + 1)\varrho_i(0)} = E_\zeta(\zeta_i t^\zeta)\varrho_i(0) \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (3.31)$$

şeklinde ifade edilir(Podlubny, 1999).

Matignon (Matignon, 1996)'un elde ettiği sonuçlar kullanıldığında

$$|\arg(\zeta_i)| > \frac{\zeta\pi}{2}, \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (3.32)$$

olduğu için $\varrho(t)$ azalan olur. Öyleyse $\aleph_i(t)$ de azalandır.

Sonuç olarak $|\arg(\zeta_i)| > \frac{\zeta\pi}{2}$ bütün $\zeta_i, i = 1, 2, \dots, k$ öz değerlerini sağlarsa denge noktaları asimptotik kararlıdır (Yaprakdal, 2019).

3.4. Caputo Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli Türevinin İki Aşamalı Adams-Bashforth Şeması

Bu bölümde Adams-Bashforth şeması (Bashforth ve Adams, 1883), Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türev operatörü için verilecektir. Aşağıda Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli diferansiyel denklemi olan,

$${}_0^{ABC}D_t^\zeta y(t) = g^*(t, y(t)) \quad (3.33)$$

eşitliği analizin temel teoremi dikkate alınarak ele alınırsa

$$\begin{aligned} y(t) - y(0) &= \frac{1 - \zeta}{ABC(\zeta)} g^*(t, y(t)) \\ &+ \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t - \nu)^{\zeta-1} g^*(\nu, y(\nu)) d\nu, \end{aligned} \quad (3.34)$$

elde edilir. O zaman t_{n+1} için

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) - y(0) &= \frac{1 - \zeta}{ABC(\zeta)} g^*(t_n, y(t_n)) \\ &+ \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \nu)^{\zeta-1} g^*(\nu, y(\nu)) d\nu, \end{aligned} \quad (3.35)$$

ve t_n için

$$\begin{aligned} y(t_n) - y(0) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} g^*(t_{n-1}, y(t_{n-1})) \\ &+ \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_n} (t_n - v)^{\zeta-1} g^*(v, y(v)) dv, \end{aligned} \quad (3.36)$$

elde edilir. t_{n+1} ve t_n denklemlerinin farkları alınır,

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) - y(t_n) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} \{g^*(t_n, y(t_n)) - g^*(t_{n-1}, y(t_{n-1}))\} \\ &+ \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - v)^{\zeta-1} g^*(v, y(v)) dv \\ &- \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_n} (t_n - v)^{\zeta-1} g^*(v, y(v)) dv \end{aligned} \quad (3.37)$$

ve böylece,

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} \{g^*(t_n, y(t_n)) - g^*(t_{n-1}, y(t_{n-1}))\} + A_{\zeta,1} - A_{\zeta,2} \quad (3.38)$$

elde edilir. Bu genelliği kaybetmeden,

$$A_{\zeta,1} = \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - v)^{\zeta-1} g^*(v, y(v)) dv \quad (3.39)$$

ve

$$A_{\zeta,2} = \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_n} (t_n - v)^{\zeta-1} g^*(v, y(v)) dv \quad (3.40)$$

Lagrange interpolasyon polinomu ile

$$g^*(v, y(v)) = \frac{v - v_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} g^*(v_n, y(v_n)) + \frac{v - v_n}{v_{n-1} - v_n} g^*(v_{n-1}, y(v_{n-1})) \quad (3.41)$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned} A_{\zeta,1} &= \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - v)^{\zeta-1} \\ &\times \left\{ \frac{v - v_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} g^*(v_n, y(v_n)) - \frac{v - v_n}{v_{n-1} - v_n} g^*(v_{n-1}, y(v_{n-1})) \right\} dv \\ &= \frac{\zeta g^*(t_n, y(t_n))}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)h} \left\{ \frac{2ht_{n+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{n+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} \right\} - \frac{\zeta g^*(t_{n-1}, y(t_{n-1}))}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)h} \\ &\times \left\{ \frac{ht_{n+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{n+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} \right\} \end{aligned} \quad (3.42)$$

olur.

$$A_{\zeta,2} = \frac{\zeta g^*(t_n, y(t_n))}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)h} \left\{ \frac{ht_n^\zeta}{\zeta} - \frac{t_n^{\zeta+1}}{\zeta+1} \right\} - \frac{g^*(t_{n-1}, y(t_{n-1}))}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)h} t_n^{\zeta+1}, \quad (3.43)$$

olur. Burada t_{n-1}, t_n, t_{n+1} eşit aralıklardır.

$$t_n - t_{n-1} = h$$

$$t_{n+1} - t_n = h$$

alınır. Böylece,

$$\begin{aligned}
y(t_{n+1}) - y(t_n) = & \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} \{g^*(t_n, y(t_n)) - g^*(t_{n-1}, y(t_{n-1}))\} \\
& + \frac{\zeta g^*(t_n, y(t_n))}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)h} \left\{ \frac{2ht_{n+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{n+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} \right\} \\
& - \frac{\zeta g^*(t_{n-1}, y(t_{n-1}))}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)h} \left\{ \frac{ht_{n+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{n+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} \right\} \\
& - \frac{\zeta g^*(t_n, y(t_n))}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)h} \left\{ \frac{ht_n^\zeta}{\zeta} - \frac{t_n^{\zeta+1}}{\zeta+1} \right\} \\
& + \frac{g^*(t_{n-1}, y(t_{n-1}))}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)h} t_n^{\zeta+1}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}
y(t_{n+1}) = & y(t_n) + g^*(t_n, y(t_n)) \left\{ \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)h} \left[\frac{2ht_{n+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{n+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{ht_n^\zeta}{\zeta} + \frac{t_n^{\zeta+1}}{\zeta+1} \right] \right\} + g^*(t_{n-1}, y(t_{n-1})) \left\{ \frac{\zeta-1}{ABC(\zeta)} - \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)h} \right. \\
& \left. \times \left[\frac{ht_{n+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{n+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} + t_n^{\zeta+1} \right] \right\} + R_\zeta
\end{aligned} \tag{3.45}$$

bulunur. Yukarıdaki denkleme Caputo anlamında olan Atangana-Baleanu fraksiyonel türevi için iki aşamalı Adams-Bashforth şeması denir. Yakınsama ve kararlılık sonuçları verilirse aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 3.6 (Yakınsama Sonucu) *Verilen denklem $y(t)$ 'nin bir çözümü olsun,*

$${}_0^{ABC}D_t^\zeta y(t) = g^*(t, y(t))$$

g^ sürekli ve sınırlı olmak üzere $y(t)$ 'nin sayısal çözümü,*

$$\begin{aligned}
y(t_{n+1}) = & y(t_n) + g^*(t_n, y(t_n)) \left\{ \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)h} \left[\frac{2ht_{n+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{n+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{ht_n^\zeta}{\zeta} + \frac{t_n^{\zeta+1}}{\zeta+1} \right] \right\} + g^*(t_{n-1}, y(t_{n-1})) \left\{ \frac{\zeta-1}{ABC(\zeta)} - \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)h} \right. \\
& \left. \times \left[\frac{ht_{n+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{n+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} + t_n^{\zeta+1} \right] \right\} + R_\zeta
\end{aligned} \tag{3.46}$$

olarak ifade edilir. Burada $\|R_\zeta\|_\infty < M$ 'dir.

İspat

$$\begin{aligned}
y(t_{n+1}) - y(t_n) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} \{g^*(t_n, y(t_n)) - g^*(t_{n-1}, y(t_{n-1}))\} + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \\
&\quad \times \left[\int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - v)^{\zeta-1} g^*(v, y(v)) dv - \int_0^{t_n} (t_n - v)^{\zeta-1} g^*(v, y(v)) dv \right] \\
&= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} (f_n - f_{n-1}) + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \left\{ \left[\int_0^{t_{n+1}} \frac{v - v_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} g^*(v_n, y(v_n)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{v - v_n}{v_{n-1} - v_n} g^*(v_{n-1}, y(v_{n-1})) + \frac{g^{*n+1}(t)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (t - t_i) \right] (t_{n+1} - v)^{\zeta-1} dv \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{t_n} \left[\frac{v - v_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} g^*(v_n, y(v_n)) + \frac{v - v_n}{v_{n-1} - v_n} g^*(v_{n-1}, y(v_{n-1})) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{g^{*n}(t)}{(n)!} \prod_{i=0}^{n-1} (t - t_i) \right] (t_n - v)^{\zeta-1} dv \right\} \\
&= L(t, \zeta, n) + \int_0^{t_{n+1}} \frac{g^{*n+1}(t)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (t - t_i) (t_{n+1} - v)^{\zeta-1} dv \\
&\quad - \int_0^{t_n} \frac{g^{*n}(t)}{(n)!} \prod_{i=0}^n (t - t_i) (t_n - v)^{\zeta-1} dv
\end{aligned}$$

dır. Böylece aşağıdaki denklem ifade edilebilir.

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = L(t, \zeta, n) + R_\zeta(t) \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned}
L(t, \zeta, n) &= g^*(t_n, y_n) \left\{ \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)h} \left[\frac{2ht_{n+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{n+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{ht_n^\zeta}{\zeta} - \frac{t_n^{\zeta+1}}{\zeta+1} \right] \right\} + g^*(t_{n-1}, y_{n-1}) \times \left\{ \frac{\zeta-1}{ABC(\zeta)} + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)h} \right. \\
&\quad \left. \times \left[\frac{ht_{n+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{n+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} + t_n^{\zeta+1} \right] \right\} + R_\zeta,
\end{aligned}$$

ve

$$R_\zeta(t) = \int_0^{t_{n+1}} \frac{g^{*n+1}(t)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (t - t_i) (t_{n+1} - v)^{\zeta-1} dv - \int_0^{t_n} \frac{g^{*n}(t)}{(n)!} \prod_{i=0}^{n-1} (t - t_i) (t_n - v)^{\zeta-1} dv$$

Bunu gösterirsek,

$$\begin{aligned}
\|R_\zeta(t)\|_\infty &= \left\| \int_0^{t_{n+1}} \frac{g^{*n+1}(t)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (t-t_i)(t_{n+1}-v)^{\zeta-1} dv \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{t_n} \frac{g^{*n}(t)}{(n)!} \prod_{i=0}^{n-1} (t-t_i)(t_n-v)^{\zeta-1} dv \right\|_\infty \\
&< \left\| \int_0^{t_{n+1}} \frac{g^{*n+1}(t)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (t-t_i)(t_{n+1}-v)^{\zeta-1} dv \right\|_\infty \\
&\quad + \left\| \int_0^{t_n} \frac{g^{*n}(t)}{(n)!} \prod_{i=0}^{n-1} (t-t_i)(t_n-v)^{\zeta-1} dv \right\|_\infty \\
&< \max_{t \in [0, t_{n+1}]} \frac{|g^{*n+1}(t)|}{(n+1)!} \left\| \prod_{i=0}^n (t-t_i) \right\|_\infty \frac{t_{n+1}^\zeta}{\zeta} \\
&\quad + \max_{t \in [0, t_{n+1}]} \frac{|g^{*n}(t)|}{(n)!} \left\| \prod_{i=0}^{n-1} (t-t_i) \right\|_\infty \frac{t_n^\zeta}{\zeta} \\
&< \sup_{t \in [0, t_{n+1}]} \left\{ \max_{t \in [0, t_{n+1}]} \frac{|g^{*n+1}(t)|}{(n+1)!}, \max_{t \in [0, t_{n+1}]} \frac{|g^{*n}(t)|}{(n)!} \right\} \\
&\quad \times \left(n! \frac{h^{n+1}}{4\zeta} t_{n+1}^\zeta + (n-1)! \frac{h^n}{4\zeta} t_n^\zeta \right)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

olur.

Teorem 3.7 (Kararlılık Şartı) *bir g^* fonksiyonu Lipschitz koşunu sağlıyor ise ve Adams-Bashforth yöntemini Caputo anlamında Atanga-Baleanu kesirli türev operatörüne uygulandığında*

$$\|g^*(t_n, y(t_n)) - g^*(t_{n-1}, y(t_{n-1}))\|_\infty \longrightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

sağlanıyorsa sistem kararlıdır.

İspat

$$\begin{aligned}
\|y(t_{n+1}) - y(t_n)\|_\infty &= \left\| \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} \{g^*(t_n, y(t_n)) - g^*(t_{n-1}, y(t_{n-1}))\} + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \right. \\
&\quad \times \left[\int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1}-v)^{\zeta-1} g^*(v, y(v)) dv - \int_0^{t_n} (t_n-v)^{\zeta-1} g^*(v, y(v)) dv \right] \Big\|_\infty \\
&< \left\| \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} \{g^*(t_n, y(t_n)) - g^*(t_{n-1}, y(t_{n-1}))\} \right\|_\infty + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \\
&\quad \times \left\| \left[\int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1}-v)^{\zeta-1} g^*(v, y(v)) dv - \int_0^{t_n} (t_n-v)^{\zeta-1} g^*(v, y(v)) dv \right] \right\|_\infty \\
&< \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} \|\{g^*(t_n, y(t_n)) - g^*(t_{n-1}, y(t_{n-1}))\}\|_\infty \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \left\| \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1}-v)^{\zeta-1} g^*(v, y(v)) dv \right\|_\infty \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \left\| \int_0^{t_n} (t_n-v)^{\zeta-1} g^*(v, y(v)) dv \right\|_\infty
\end{aligned} \tag{3.49}$$

böylece,

$$\begin{aligned}
\|y(t_{n+1}) - y(t_n)\|_\infty &< \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} \|\{g^*(t_n, y(t_n)) - g^*(t_{n-1}, y(t_{n-1}))\}\|_\infty \\
&+ \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \left\| \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - v)^{\zeta-1} \sum_{i=0}^n \prod_{0 \leq i \leq n} \frac{t - t_i}{(-1)^i h} g^*(v_i, y(v_i)) dv \right\|_\infty \\
&+ \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \left\| \int_0^{t_n} (t_n - v)^{\zeta-1} \sum_{i=0}^{n-1} \prod_{0 \leq i \leq n-1} g^*(v_i, y(v_i)) dv \right\|_\infty \\
&< \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} \|\{g^*(t_n, y(t_n)) - g^*(t_{n-1}, y(t_{n-1}))\}\|_\infty + \|P_n^\zeta(t)\|_\infty + \|R_n^\zeta(t)\|_\infty
\end{aligned} \tag{3.50}$$

burada

$$\|P_n^\zeta(t)\|_\infty \leq \sum_{i=0}^n \frac{\|g^*(t_i, y(t_i))\|_\infty}{h} \frac{t_{n+1}^\zeta}{\zeta} \frac{n!h^n}{4}$$

ve

$$\|R_n^\zeta(t)\|_\infty \leq \sum_{i=0}^n \frac{\|g^*(t_i, y(t_i))\|_\infty}{h} \frac{t_n^\zeta}{\zeta} \frac{(n-1)!h^{n-1}}{4}$$

tür. Böylece,

$$\begin{aligned}
\|y(t_{n+1}) - y(t_n)\|_\infty &< \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} \|\{g^*(t_n, y(t_n)) - g^*(t_{n-1}, y(t_{n-1}))\}\|_\infty \\
&+ \sum_{i=0}^n \frac{\|g^*(t_i, y(t_i))\|_\infty}{4\zeta} t_{n+1}^\zeta h^{n-1} n! \\
&+ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\|g^*(t_{i-1}, y(t_{i-1}))\|_\infty}{4\zeta} t_n^\zeta h^{n-3} (n-1)! \\
&< \frac{Mn!h^n}{4\zeta} \left\{ \frac{t_{n+1}^\zeta (n+1)}{h} + \frac{t_n^\zeta}{h^2} \right\} \\
&+ \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} \|\{g^*(t_n, y(t_n)) - g^*(t_{n-1}, y(t_{n-1}))\}\|_\infty
\end{aligned} \tag{3.51}$$

şeklinde ifade edilir. Böylece $n \rightarrow \infty$ ise $M = \max_{t \in [0, t_{n+1}]} |g^*(t, y(t))|$ ve $\|\{g^*(t_n, y_n) - g^*(t_{n-1}, y_{n-1})\}\|_\infty \rightarrow 0$ aynı zamanda $h \rightarrow \infty$ olursa $\frac{Mn!h^n}{4\zeta} \rightarrow 0$ elde edilir. Böylece teorem ispat edilmiş olur (Atangana ve Owolabi, 2018).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Salgın hastalıklar tarih boyunca insan hayatını olumsuz yönde etkilemiştir. Salgın bir hastalık olan Zika virüsü enfeksiyonu, Aedes dişi sivrisinekleri tarafından insanlara bulaşır. İnsanlar arasında ise cinsel yolla veya anneden bebeğe geçiş ile mümkündür. Bu hastalık özellikle hamile kadınlar için risk taşımaktadır. Hamilelik sırasında virüs bebeğin gelişimini etkileyebilir ve mikrosefali gibi anomalilere neden olabilir. Zika virüs enfeksiyonu daha çok Afrika, Asya, Pasifik Adaları ve Amerika Kıtasında salgınlara neden olmuştur. Bunun sebebi bu bölgelerde Aedes sivri sineklerinin yoğun görülmesidir. Salgın hastalıkların matematiksel modelleri bu hastalıkları keşfetmek ve yayılımını kontrol altına alınması için önerilerde bulunulmasını sağlar.

Bu tezde amseptomatik taşıyıcı Zika virüs matematiksel modelinin analizi yapılmıştır. Zika virüs matematiksel modeli Caputo anlamında Atangana Baleanu kesirli türev operatörüne genişletilmiş daha sonra varlık-teklik çözümleri, kararlılık analizi ve nümerik simülasyonları elde edilmiştir.

4.1. Zika Modeli

Zika virüs modeli (Khan ve dig., 2019) aşağıda verilmiştir,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{X}_H(t)}{dt} &= \Lambda_H - \beta_H \mathcal{X}_H(t)(\mathcal{Z}_V(t) + \rho \mathcal{Z}_H(t)) - \mu_H \mathcal{X}_H(t) \\ \frac{d\mathcal{Y}_H(t)}{dt} &= \beta_H \mathcal{X}_H(t)(\mathcal{Z}_V(t) + \rho \mathcal{Z}_H(t)) - (\mu_H + \chi_H) \mathcal{Y}_H(t) \\ \frac{d\mathcal{Z}_H(t)}{dt} &= \chi_H \varphi \mathcal{Y}_H(t) - (\mu_H + \gamma + \eta) \mathcal{Z}_H(t) \\ \frac{d\mathcal{T}_H(t)}{dt} &= \gamma \mathcal{Z}_H(t) - \mu_H \mathcal{T}_H(t) \\ \frac{d\mathcal{Q}_H(t)}{dt} &= \chi_H (1 - \varphi) \mathcal{Y}_H(t) - \mu_H \mathcal{Q}_H(t) \\ \frac{d\mathcal{X}_V(t)}{dt} &= \Lambda_V - \beta_V \mathcal{X}_V(t) \mathcal{Z}_H(t) - \mu_V \mathcal{X}_V(t) \\ \frac{d\mathcal{Y}_V(t)}{dt} &= \beta_V \mathcal{X}_V(t) \mathcal{Z}_H(t) - (\mu_V + \delta_V) \mathcal{Y}_V(t) \\ \frac{d\mathcal{Z}_V(t)}{dt} &= \delta_V \mathcal{Y}_V(t) - \mu_V \mathcal{Z}_V(t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

Verilen (4.1) denklem sisteminde ,

$N_H(t)$, t zamanında toplam birey popülasyonunu belirtir.

$N_V(t)$, t zamanında toplam sivrisinek popülasyonunu belirtir.

Sekiz adi diferansiyel denklemden oluşan Zika virüs modelinde, $\mathcal{X}_H(t)$ t zamanında duyarlı birey sayısını, $\mathcal{Z}_H(t)$ t zamanında enfekte birey sayısını, $\mathcal{Y}_H(t)$ t zamanında maruz kalan birey sayısını, $\mathcal{T}_H(t)$ t zamanında iyileşen birey sayısını, $\mathcal{Q}_H(t)$ t zamanında taşıyıcı birey sayısını gösterir. Böylece $N_H(t) = \mathcal{X}_H(t) + \mathcal{Y}_H(t) + \mathcal{Z}_H(t) + \mathcal{T}_H(t) + \mathcal{Q}_H(t)$ şeklinde ifade edilir. $\mathcal{X}_V(t)$ t zamanında duyarlı sivrisinek sayısını, $\mathcal{Y}_V(t)$ t zamanında maruz kalan sivrisinek sayısını, $\mathcal{Z}_V(t)$ t zamanında enfekte sivrisinek sayısını gösterir. Böylece $N_V(t) = \mathcal{X}_V(t) + \mathcal{Y}_V(t) + \mathcal{Z}_V(t)$ şeklinde ifade edilir.

Ayrıca bu modelde, μ_H katsayısı bireylerde doğal ölüm oranını, μ_V katsayısı sivrisineklerde doğal ölüm oranını, Λ_H katsayısı bireylerin büyüme oranını, Λ_V katsayısı zika sivrisineklerinin işe alım oranını, β_H katsayısı duyarlı bireyler ve enfekte sivrisinekler arasındaki temas oranını, β_V katsayısı enfekte bireyler ve duyarlı sivrisinekler arasındaki temas oranını, ρ kat sayısı enfeksiyonu daha fazla oluşturan duyarlı ve enfekte bireyler arasındaki temas oranını, η kat sayısı enfekte olmuş bireyler için tedavi oranını, χ_H kat sayısı $\mathcal{Y}_H$ 'den $\mathcal{Q}_H$ 'ye ya da $\mathcal{Z}_H$ 'ye geçiş oranını ve $\varphi \in (0, 1)$, γ kat sayısı enfekte olmuş bireyler için iyileşme oranını, δ_V kat sayısı maruz kalan vektörün enfekte olan vektöre ilerleme oranını ifade etmektedir(Khan ve diğ., 2019).

Bundan sonra sırasıyla (4.1) denklem sistemiyle verilen Zika virüsünün matematiksel modeli Caputo anlamında Atangana -Baleanu kesirli türev operatörüne genişletilecek, Picard-Lindelöf teoremi ile varlık ve teklik çözümü ispat edilecek, Hyres-Ulam kararlılığı incelenerek Adams-Bashforth metodunun kesirli türev operatörlerine uyarlanmış halini kullanarak genişletilmiş matematiksel model için nümerik çözümler hesaplanacak ve son olarak simülasyonlar elde edilecek ve elde edilen sonuçlar analiz edilecektir.

4.2. Zika Virüs Modelinin Caputo Anlamındaki Atangana-Baleanu Kesirli Türev Operatörüne Genişletilmesi

(4.1) denklem sistemin ABC kesirli türev operatörüne genişletilmiş hali,

$$\begin{aligned}
{}_t^{ABC}D_0^\zeta \mathcal{X}_H(t) &= \Lambda_H - \beta_H \mathcal{X}_H(t)(\mathcal{Z}_V(t) + \rho \mathcal{Z}_H(t)) - \mu_H \mathcal{X}_H(t) \\
{}_t^{ABC}D_0^\zeta \mathcal{Y}_H(t) &= \beta_H \mathcal{X}_H(t)(\mathcal{Z}_V(t) + \rho \mathcal{Z}_H(t)) - (\mu_H + \chi_H) \mathcal{Y}_H(t) \\
{}_t^{ABC}D_0^\zeta \mathcal{Z}_H(t) &= \chi_H \varphi \mathcal{Y}_H(t) - (\mu_H + \gamma + \eta) \mathcal{Z}_H(t) \\
{}_t^{ABC}D_0^\zeta \mathcal{T}_H(t) &= \gamma \mathcal{Z}_H(t) - \mu_H \mathcal{T}_H(t) \\
{}_t^{ABC}D_0^\zeta \mathcal{Q}_H(t) &= \chi_H(1 - \varphi) \mathcal{Y}_H(t) - \mu_H \mathcal{Q}_H(t) \\
{}_t^{ABC}D_0^\zeta \mathcal{X}_V(t) &= \Lambda_V - \beta_V \mathcal{X}_V(t) \mathcal{Z}_H(t) - \mu_V \mathcal{X}_V(t) \\
{}_t^{ABC}D_0^\zeta \mathcal{Y}_V(t) &= \beta_V \mathcal{X}_V(t) \mathcal{Z}_H(t) - (\mu_V + \delta_V) \mathcal{Y}_V(t) \\
{}_t^{ABC}D_0^\zeta \mathcal{Z}_V(t) &= \delta_V \mathcal{Y}_V(t) - \mu_V \mathcal{Z}_V(t)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

şeklinde elde edilir.

(4.2) denklem sisteminin başlangıç koşulları, $\mathcal{X}_H(0) = c_0, \mathcal{Y}_H(0) = c_1, \mathcal{Z}_H(0) = c_2, \mathcal{T}_H(0) = c_3, \mathcal{Q}_H(0) = c_4, \mathcal{X}_V(0) = c_5, \mathcal{Y}_V(0) = c_6, \mathcal{Z}_V(0) = c_7$ olsun. Araştırmaya konu olan bu çalışmada $N_H = \mathcal{X}_H + \mathcal{Y}_H + \mathcal{Z}_H + \mathcal{T}_H + \mathcal{Q}_H$ ve $N_V = \mathcal{X}_V + \mathcal{Y}_V + \mathcal{Z}_V$ sabittir. Bannach uzayında $F : R \rightarrow R$ şeklinde tanımlı ve sürekli F fonksiyonu T normu ile $\|\mathcal{X}_H\| = \sup\{|\mathcal{X}_H(t)| : t \in T\}, \|\mathcal{Y}_H\| = \sup\{|\mathcal{Y}_H(t)| : t \in T\}, \|\mathcal{Z}_H\| = \sup\{|\mathcal{Z}_H(t)| : t \in T\}, \|\mathcal{T}_H\| = \sup\{|\mathcal{T}_H(t)| : t \in T\}, \|\mathcal{Q}_H\| = \sup\{|\mathcal{Q}_H(t)| : t \in T\}, \|\mathcal{X}_V\| = \sup\{|\mathcal{X}_V(t)| : t \in T\}, \|\mathcal{Y}_V\| = \sup\{|\mathcal{Y}_V(t)| : t \in T\}, \|\mathcal{Z}_V\| = \sup\{|\mathcal{Z}_V(t)| : t \in T\}$ olmak üzere $\|(\mathcal{X}_H, \mathcal{Y}_H, \mathcal{Z}_H, \mathcal{T}_H, \mathcal{Q}_H)\| = \|\mathcal{X}_H(t)\| + \|\mathcal{Y}_H(t)\| + \|\mathcal{Z}_H(t)\| + \|\mathcal{T}_H(t)\| + \|\mathcal{Q}_H(t)\|$ ve $\|(\mathcal{X}_V, \mathcal{Y}_V, \mathcal{Z}_V)\| = \|\mathcal{X}_V(t)\| + \|\mathcal{Y}_V(t)\| + \|\mathcal{Z}_V(t)\|$ şeklinde gösterilir. Özellikle R de tanımlanmış ve $F = C(T) \times C(T) \times C(T)$ Banach uzayında sürekli bir fonksiyon olmak üzere T supremum norma eşittir.

4.3. Zika Modelinin Varlık-Teklik Çözümleri

Bu bölümde (4.2) sisteminin varlığı sabit nokta teoremi yardımıyla incelenecektir. Bu modelin varlığını incelemek için (4.2) sistemi başlangıç değerleri ile Atangana-Baleanu

integral operatörü yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{\mathcal{H}}(t) &= \mathcal{X}_{\mathcal{H}}(0) + {}_t^{ABC} I_0^{\zeta} \{ \Lambda_H - \beta_H \mathcal{X}_{\mathcal{H}}(t) (\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(t) + \rho \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t)) - \mu_H \mathcal{X}_{\mathcal{H}}(t) \}, \\
\mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t) &= \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(0) + {}_t^{ABC} I_0^{\zeta} \{ \beta_H \mathcal{X}_{\mathcal{H}}(t) (\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(t) + \rho \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t)) - (\mu_H + \chi_H) \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t) \}, \\
\mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) &= \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(0) + {}_t^{ABC} I_0^{\zeta} \{ \chi_H \varphi \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t) - (\mu_H + \gamma + \eta) \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) \}, \\
\mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t) &= \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(0) + {}_t^{ABC} I_0^{\zeta} \{ \gamma \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) - \mu_H \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t) \}, \\
\mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(t) &= \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(0) + {}_t^{ABC} I_0^{\zeta} \{ \chi_H (1 - \varphi) \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t) - \mu_H \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(t) \}, \\
\mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t) &= \mathcal{X}_{\mathcal{V}}(0) + {}_t^{ABC} I_0^{\zeta} \{ \Lambda_V - \beta_V \mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t) \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) - \mu_V \mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t) \}, \\
\mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(t) &= \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(0) + {}_t^{ABC} I_0^{\zeta} \{ \beta_V \mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t) \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) - (\mu_V + \delta_V) \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(t) \}, \\
\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(t) &= \mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(0) + {}_t^{ABC} I_0^{\zeta} \{ \delta_V \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(t) - \mu_V \mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(t) \},
\end{aligned} \tag{4.3}$$

şeklinde gösterilir. Elde edilen yeni (4.3) sistemi Atangana-Baleanu integral operatörü ile düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{H}}(0) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \{ \Lambda_H - \beta_H \mathcal{X}_{\mathcal{H}}(t) (\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(t) + \rho \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t)) - \mu_H \mathcal{X}_{\mathcal{H}}(t) \} \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \{ \Lambda_H - \beta_H \mathcal{X}_{\mathcal{H}}(v) (\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(v) + \rho \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(v)) \\
&\quad - \mu_H \mathcal{X}_{\mathcal{H}}(v) \} dv \\
\mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(0) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \{ \beta_H \mathcal{X}_{\mathcal{H}}(t) (\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(t) + \rho \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t)) - (\mu_H + \chi_H) \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t) \} \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \{ \beta_H \mathcal{X}_{\mathcal{H}}(v) (\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(v) + \rho \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(v)) \\
&\quad - (\mu_H + \chi_H) \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(v) \} dv \\
\mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(0) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \{ \chi_H \varphi \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t) - (\mu_H + \gamma + \eta) \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) \} \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \{ \chi_H \varphi \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(v) - (\mu_H + \gamma + \eta) \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(v) \} dv \\
\mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(0) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \{ \gamma \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) - \mu_H \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t) \} \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \{ \gamma \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(v) - \mu_H \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(v) \} dv
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(0) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \{ \chi_H(1-\varphi) \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t) - \mu_H \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(t) \} \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \{ \chi_H(1-\varphi) \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(v) - \mu_H \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(v) \} dv \\
\mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{V}}(0) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \{ \Lambda_V - \beta_V \mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t) \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) - \mu_V \mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t) \} \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \{ \Lambda_V - \beta_V \mathcal{X}_{\mathcal{V}}(v) \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(v) - \mu_V \mathcal{X}_{\mathcal{V}}(v) \} dv \\
\mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(0) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \{ \beta_V \mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t) \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) - (\mu_V + \delta_V) \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(t) \} \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \{ \beta_V \mathcal{X}_{\mathcal{V}}(v) \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(v) - (\mu_V + \delta_V) \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(v) \} dv \\
\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(0) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \{ \delta_V \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(t) - \mu_V \mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(t) \} \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \{ \delta_V \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(v) - \mu_V \mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(v) \} dv
\end{aligned}$$

denklemlerine ulaşılır. İşlemlerin daha anlaşılır olması için çekirdekler aşağıdaki gibi alınırsa,

$$\begin{aligned}
G_1(t, \mathcal{X}_{\mathcal{H}}(t)) &= \Lambda_H - \beta_H \mathcal{X}_{\mathcal{H}}(t) (\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(t) + \rho \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t)) - \mu_H \mathcal{X}_{\mathcal{H}}(t) \\
G_2(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t)) &= \beta_H \mathcal{X}_{\mathcal{H}}(t) (\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(t) + \rho \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t)) - (\mu_H + \chi_H) \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t) \\
G_3(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t)) &= \chi_H \varphi \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t) - (\mu_H + \gamma + \eta) \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) \\
G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t)) &= \gamma \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) - \mu_H \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t) \\
G_5(t, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(t)) &= \chi_H(1-\varphi) \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t) - \mu_H \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(t) \\
G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t)) &= \Lambda_V - \beta_V \mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t) \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) - \mu_V \mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t) \\
G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(t)) &= \beta_V \mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t) \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) - (\mu_V + \delta_V) \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(t) \\
G_8(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(t)) &= \delta_V \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(t) - \mu_V \mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(t)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

yazılabilir. Modelin Lipschitz şartını sağladığını ve her bir denklemin sırasıyla Lipschitz katsayılarının,

$$\begin{aligned}
K_1 &= \beta_H \psi_8 + \beta_H \rho \psi_3 \\
K_2 &= \mu_H + \chi_H \\
K_3 &= \mu_H + \gamma + \eta \\
K_4 &= \mu_H \\
K_5 &= \mu_H \\
K_6 &= \beta_V \psi_3 + \mu_V \\
K_7 &= \mu_V + \delta_V \\
K_8 &= \mu_V
\end{aligned} \tag{4.6}$$

şeklinde olduğunu göstermek için $\mathcal{X}_{\mathcal{H}1}(t), \mathcal{X}_{\mathcal{H}2}(t), \mathcal{Y}_{\mathcal{H}1}(t), \mathcal{Y}_{\mathcal{H}2}(t), \mathcal{Z}_{\mathcal{H}1}(t), \mathcal{Z}_{\mathcal{H}2}(t),$
 $\mathcal{T}_{\mathcal{H}1}(t), \mathcal{T}_{\mathcal{H}2}(t), \mathcal{Q}_{\mathcal{H}1}(t), \mathcal{Q}_{\mathcal{H}2}(t), \mathcal{X}_{\mathcal{V}1}(t), \mathcal{X}_{\mathcal{V}2}(t), \mathcal{Y}_{\mathcal{V}1}(t), \mathcal{Y}_{\mathcal{V}2}(t), \mathcal{Z}_{\mathcal{V}1}(t), \mathcal{Z}_{\mathcal{V}2}(t) \in L[0, 1],$
 H 'de sürekli olmak üzere $\|\mathcal{X}_{\mathcal{H}}(t)\| \leq \psi_1, \|\mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t)\| \leq \psi_2, \|\mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t)\| \leq \psi_3, \|\mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t)\| \leq \psi_4,$
 $\|\mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(t)\| \leq \psi_5, \|\mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t)\| \leq \psi_6, \|\mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(t)\| \leq \psi_7, \|\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(t)\| \leq \psi_8$ olsun.

Teorem 4.1 (4.6) sistemindeki $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8$ çekirdeklerinin Lipchitz katsayıları $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7, K_8$ olmak üzere katsayılar aşağıdaki görüldüğü gibi pozitif ve birden küçükse Lipschitz koşulunu sağlar.

$$\begin{aligned}
0 &\leq \beta_H \psi_8 + \beta_H \rho \psi_3 < 1 \\
0 &\leq \mu_H + \chi_H < 1 \\
0 &\leq \mu_H + \gamma + \eta < 1 \\
0 &\leq \mu_H < 1 \\
0 &\leq \mu_H < 1 \\
0 &\leq \beta_V \psi_3 + \mu_V < 1 \\
0 &\leq \mu_V + \delta_V < 1 \\
0 &\leq \mu_V < 1
\end{aligned} \tag{4.7}$$

İspat Öncelikle G_1 çekirdeğinin varlığı incelensin. $\mathcal{X}_{\mathcal{H}1}(t)$ ve $\mathcal{X}_{\mathcal{H}2}(t)$ iki fonksiyondur.

$$\begin{aligned}
\|G_1(t, \mathcal{X}_{\mathcal{H}1}(t)) - G_1(t, \mathcal{X}_{\mathcal{H}2}(t))\| &= \|\Lambda_H - \beta_H \mathcal{X}_{\mathcal{H}1}(t)(\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(t) + \rho \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t)) - \mu_H \mathcal{X}_{\mathcal{H}2}(t) \\
&\quad - \Lambda_H + \beta_H \mathcal{S}_{\mathcal{H}2}(t)(\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(t) + \rho \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t)) + \mu_H \mathcal{X}_{\mathcal{H}2}(t)\| \\
&= \|\beta_H(\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(t) + \rho \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t))\{\mathcal{X}_{\mathcal{H}1}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{H}2}(t)\}\|
\end{aligned} \tag{4.8}$$

olur. (4.8) denkleminde üçgen eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\|G_1(t, \mathcal{X}_{\mathcal{H}1}(t)) - G_1(t, \mathcal{X}_{\mathcal{H}2}(t))\| &\leq \|\beta_H(\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(t) + \rho \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t))\| \|\mathcal{X}_{\mathcal{H}1}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{H}2}(t)\| \\
&\leq \{\beta_H \|\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(t)\| + \beta_H \rho \|\mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t)\|\} \|\mathcal{X}_{\mathcal{H}1}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{H}2}(t)\| \\
&\leq \{\beta_H \psi_8 + \beta_H \rho \psi_3\} \|\mathcal{X}_{\mathcal{H}1}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{H}2}(t)\| \\
&\leq K_1 \|\mathcal{X}_{\mathcal{H}1}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{H}2}(t)\|
\end{aligned} \tag{4.9}$$

eşitliğine ulaşılır. Yani G_1 çekirdeği büzülmeye sahiptir. O halde Lipschitz koşulunu sağlar.

İkinci çekirdek olan G_2 çekirdeğinin varlığı incelensin. $\mathcal{Y}_{\mathcal{H}1}(t)$ ve $\mathcal{Y}_{\mathcal{H}2}(t)$ iki fonksiyondur.

$$\begin{aligned}
\|G_2(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}1}(t)) - G_2(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}2}(t))\| &= \|\beta_H \mathcal{X}_H(t)(\mathcal{Z}_V(t) + \rho \mathcal{Z}_H(t)) - (\mu_H + \chi_H) \mathcal{Y}_{\mathcal{H}1}(t) \\
&\quad - \beta_H \mathcal{X}_H(t)(\mathcal{Z}_V(t) + \rho \mathcal{Z}_H(t)) + (\mu_H + \chi_H) \mathcal{Y}_{\mathcal{H}2}(t)\| \\
&= \|\mu_H + \chi_H\| \|\mathcal{Y}_{\mathcal{H}1}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{H}2}(t)\|
\end{aligned} \tag{4.10}$$

olur. (4.10) denkleminin üçgen eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\|G_2(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}1}(t)) - G_2(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}2}(t))\| &\leq \|\mu_H + \chi_H\| \|\mathcal{Y}_{\mathcal{H}1}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{H}2}(t)\| \\
&\leq \{\mu_H + \chi_H\} \|\mathcal{Y}_{\mathcal{H}1}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{H}2}(t)\| \\
&\leq K_2 \|\mathcal{Y}_{\mathcal{H}1}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{H}2}(t)\|
\end{aligned} \tag{4.11}$$

eşitliğine ulaşılır. Yani G_2 çekirdeği büzülmeye sahiptir. O halde Lipschitz koşulunu sağlar.

Üçüncü çekirdek olan G_3 çekirdeğinin varlığı incelensin. $\mathcal{Z}_{\mathcal{H}1}(t)$ ve $\mathcal{Z}_{\mathcal{H}2}(t)$ iki fonksiyondur,

$$\begin{aligned}
\|G_3(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}1}(t)) - G_3(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}2}(t))\| &= \|\chi_H \varphi \mathcal{Y}_H(t) - (\mu_H + \gamma + \eta) \mathcal{Z}_{\mathcal{H}1}(t) \\
&\quad - \chi_H \varphi \mathcal{Y}_H(t) + (\mu_H + \gamma + \eta) \mathcal{Z}_{\mathcal{H}2}(t)\| \\
&= \|\mu_H + \gamma + \eta\| \|\mathcal{Z}_{\mathcal{H}1}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{H}2}(t)\|
\end{aligned} \tag{4.12}$$

olur. (4.12) denkleminin üçgen eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\|G_3(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}1}(t)) - G_3(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}2}(t))\| &\leq \|\mu_H + \gamma + \eta\| \|\mathcal{Z}_{\mathcal{H}1}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{H}2}(t)\| \\
&\leq \{\mu_H + \gamma + \eta\} \|\mathcal{Z}_{\mathcal{H}1}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{H}2}(t)\| \\
&\leq K_3 \|\mathcal{Z}_{\mathcal{H}1}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{H}2}(t)\|
\end{aligned} \tag{4.13}$$

eşitliğine ulaşılır. Yani G_3 çekirdeği büzülmeye sahiptir. O halde Lipschitz koşulunu sağlar.

Dördüncü çekirdek olan G_4 çekirdeğinin varlığını incelensin. $\mathcal{T}_{\mathcal{H}1}(t)$ ve $\mathcal{T}_{\mathcal{H}2}(t)$ iki fonksiyondur,

$$\begin{aligned}
\|G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}1}(t)) - G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}2}(t))\| &= \|\gamma \mathcal{Z}_H(t) - \mu_H \mathcal{T}_{\mathcal{H}1}(t) - \gamma \mathcal{Z}_H(t) + \mu_H \mathcal{T}_{\mathcal{H}2}(t)\| \\
&= \|\mu_H\| \|\mathcal{T}_{\mathcal{H}1}(t) - \mathcal{T}_{\mathcal{H}2}(t)\|
\end{aligned} \tag{4.14}$$

olur. (4.14) denkleminin üçgen eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\|G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}1}(t)) - G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}2}(t))\| &\leq \|\mu_H\| \|\mathcal{T}_{\mathcal{H}1}(t) - \mathcal{T}_{\mathcal{H}2}(t)\| \\
&\leq \mu_H \|\mathcal{T}_{\mathcal{H}1}(t) - \mathcal{T}_{\mathcal{H}2}(t)\| \\
&= K_4 \|\mathcal{T}_{\mathcal{H}1}(t) - \mathcal{T}_{\mathcal{H}2}(t)\|
\end{aligned} \tag{4.15}$$

eşitliğine ulaşılır. Yani G_4 çekirdeği büzülmeye sahiptir. O halde Lipschitz koşulunu sağlar.

Beşinci çekirdek olan G_5 çekirdeğinin varlığı incelenir. $\mathcal{Q}_{\mathcal{H}1}$ ve $\mathcal{Q}_{\mathcal{H}2}$ iki fonksiyondur.

$$\begin{aligned} \|G_5(t, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}1}(t)) - G_5(t, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}2}(t))\| &= \|\chi_H(1 - \varphi)\mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t) - \mu_H \mathcal{Q}_{\mathcal{H}1}(t) \\ &\quad - \chi_H(1 - \varphi)\mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t) + \mu_H \mathcal{Q}_{\mathcal{H}2}(t)\| \\ &= \|\mu_H\{\mathcal{Q}_{\mathcal{H}1}(t) - \mathcal{Q}_{\mathcal{H}2}(t)\}\| \end{aligned} \quad (4.16)$$

olur. (4.16) denkleminde üçgen eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \|G_5(t, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}1}(t)) - G_5(t, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}2}(t))\| &\leq \|\mu_H\| \|\mathcal{Q}_{\mathcal{H}1}(t) - \mathcal{Q}_{\mathcal{H}2}(t)\| \\ &\leq \mu_H \|\mathcal{Q}_{\mathcal{H}1}(t) - \mathcal{Q}_{\mathcal{H}2}(t)\| \\ &\leq K_5 \|\mathcal{Q}_{\mathcal{H}1}(t) - \mathcal{Q}_{\mathcal{H}2}(t)\| \end{aligned} \quad (4.17)$$

eşitliğine ulaşılır. Yani G_5 çekirdeği büzülmeye sahiptir. O halde Lipschitz koşulunu sağlar.

Altıncı çekirdek olan G_6 çekirdeğinin varlığı incelenir. $\mathcal{X}_{\mathcal{V}1}(t)$ ve $\mathcal{X}_{\mathcal{V}2}(t)$ iki fonksiyondur.

$$\begin{aligned} \|G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}1}(t)) - G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}2}(t))\| &= \|\Lambda_V - \beta_V \mathcal{X}_{\mathcal{V}1}(t) \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) - \mu_V \mathcal{X}_{\mathcal{V}1}(t) \\ &\quad - \Lambda_V - \beta_V \mathcal{X}_{\mathcal{V}2}(t) \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) + \mu_V \mathcal{X}_{\mathcal{V}2}(t)\| \\ &= \|\beta_V \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) \{\mathcal{X}_{\mathcal{V}1}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{V}2}(t)\} \\ &\quad - \mu_V \{\mathcal{X}_{\mathcal{V}1}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{V}2}(t)\}\| \end{aligned} \quad (4.18)$$

olur. (4.18) denkleminde üçgen eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \|G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}1}(t)) - G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}2}(t))\| &\leq \|\beta_V \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t)\| \|\mathcal{X}_{\mathcal{V}1}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{V}2}(t)\| \\ &\quad + \|\mu_V\| \|\mathcal{X}_{\mathcal{V}1}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{V}2}(t)\| \\ &\leq \beta_V \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) \|\mathcal{X}_{\mathcal{V}1}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{V}2}(t)\| \\ &\quad + \mu_V \|\mathcal{X}_{\mathcal{V}1}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{V}2}(t)\| \\ &\leq \{\beta_V \psi_3 + \mu_V\} \|\mathcal{X}_{\mathcal{V}1}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{V}2}(t)\| \\ &\leq K_6 \|\mathcal{X}_{\mathcal{V}1}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{V}2}(t)\| \end{aligned} \quad (4.19)$$

eşitliğine ulaşılır. Yani G_6 çekirdeği büzülmeye sahiptir. O halde Lipschitz koşulunu sağlar.

Yedinci çekirdek olan G_7 çekirdeğinin varlığı incelensin. $\mathcal{Y}_{\mathcal{V}_1}(t)$ ve $\mathcal{Y}_{\mathcal{V}_2}(t)$ iki fonksiyondur.

$$\begin{aligned} \|G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}_1}(t)) - G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}_2}(t))\| &= \|\beta_V \mathcal{X}_V(t) \mathcal{Z}_H(t) - (\mu_V + \delta_V) \mathcal{Y}_{\mathcal{V}_1}(t) \\ &\quad - \beta_V \mathcal{X}_V(t) \mathcal{Z}_H(t) + (\mu_V + \delta_V) \mathcal{Y}_{\mathcal{V}_2}(t)\| \\ &= \|(\mu_V + \delta_V) \{\mathcal{Y}_{\mathcal{V}_1}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{V}_2}(t)\}\| \end{aligned} \quad (4.20)$$

olur. (4.20) denkleminde üçgen eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \|G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}_1}(t)) - G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}_2}(t))\| &\leq \|(\mu_V + \delta_V)\| \|\mathcal{Y}_{\mathcal{V}_1}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{V}_2}(t)\| \\ &\leq \{\mu_V + \delta_V\} \|\mathcal{Y}_{\mathcal{V}_1}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{V}_2}(t)\| \\ &\leq K_7 \|\mathcal{Y}_{\mathcal{V}_1}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{V}_2}(t)\| \end{aligned} \quad (4.21)$$

eşitliğine ulaşılır. Yani G_7 çekirdeği büzülmeye sahiptir. O halde Lipschitz koşulunu sağlar.

Sekizinci çekirdek olan G_8 çekirdeğinin varlığı incelensin. $\mathcal{Z}_{\mathcal{V}_1}(t)$ ve $\mathcal{Z}_{\mathcal{V}_2}$ iki fonksiyondur.

$$\begin{aligned} \|G_8(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}_1}(t)) - G_8(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}_2}(t))\| &= \|\delta_V \mathcal{Y}_V(t) - \mu_V \mathcal{Z}_{\mathcal{V}_1}(t) - \delta_V \mathcal{Y}_V(t) + \mu_V \mathcal{Z}_{\mathcal{V}_2}(t)\| \\ &= \|-\mu_V \{\mathcal{Z}_{\mathcal{V}_1}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{V}_2}(t)\}\| \end{aligned} \quad (4.22)$$

olur. (4.22) denkleminde üçgen eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \|G_8(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}_1}(t)) - G_8(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}_2}(t))\| &\leq \|-\mu_V\| \|\mathcal{Z}_{\mathcal{V}_1}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{V}_2}(t)\| \\ &\leq \mu_V \|\mathcal{Z}_{\mathcal{V}_1}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{V}_2}(t)\| \\ &\leq K_8 \|\mathcal{Z}_{\mathcal{V}_1}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{V}_2}(t)\| \end{aligned} \quad (4.23)$$

eşitliğine ulaşılır. Yani G_8 çekirdeği büzülmeye sahiptir. O halde Lipschitz koşulunu sağlar. Her bir denklemin pozitif ve birden küçük Lipschitz katsayısının var olduğu bulunmuştur. Teoremdeki katsayılarla ulaşılmış ve teorem ispatlanmıştır .

Atangana-Baleanu integral operatörü ile düzenlenen (4.4) denklem sisteminde başlangıç değerleri sıfır kabul edilsin,

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{\mathcal{H}}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} G_1(t, \mathcal{X}_{\mathcal{H}}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} G_1(v, \mathcal{X}_{\mathcal{H}}(v)) dv \\
\mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} G_2(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} G_2(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(v)) dv \\
\mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} G_3(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} G_3(v, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(v)) dv \\
\mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} G_4(v, \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(v)) dv \\
\mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} G_5(t, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} G_5(v, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(v)) dv \\
\mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} G_6(v, \mathcal{X}_{\mathcal{V}}(v)) dv \\
\mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} G_7(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(v)) dv \\
\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} G_8(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} G_8(v, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(v)) dv
\end{aligned} \tag{4.24}$$

olur. Tümevarım yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{\mathcal{H}m}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} G_1(t, \mathcal{X}_{\mathcal{H}(m-1)}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} G_1(v, \mathcal{X}_{\mathcal{H}(m-1)}(v)) dv \\
\mathcal{Y}_{\mathcal{H}m}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} G_2(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}(m-1)}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} G_2(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}(m-1)}(v)) dv \\
\mathcal{Z}_{\mathcal{H}m}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} G_3(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}(m-1)}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} G_3(v, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}(m-1)}(v)) dv \\
\mathcal{T}_{\mathcal{H}m}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}(m-1)}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} G_4(v, \mathcal{T}_{\mathcal{H}(m-1)}(v)) dv \\
\mathcal{Q}_{\mathcal{H}m}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} G_5(t, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}(m-1)}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} G_5(v, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}(m-1)}(v)) dv \\
\mathcal{X}_{\mathcal{V}m}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}(m-1)}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} G_6(v, \mathcal{X}_{\mathcal{V}(m-1)}(v)) dv \\
\mathcal{Y}_{\mathcal{V}m}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}(m-1)}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} G_7(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}(m-1)}(v)) dv \\
\mathcal{Z}_{\mathcal{V}m}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} G_8(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}(m-1)}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} G_8(v, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}(m-1)}(v)) dv
\end{aligned} \tag{4.25}$$

olur. (4.25) denklem grubunun ardışık terimlerinin farkları alınırsa,

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{\mathcal{H}(m+1)}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{H}m}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} (G_1(t, \mathcal{X}_{\mathcal{H}m}) - G_1(t, \mathcal{X}_{\mathcal{H}(m-1)})) \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_1(t, \mathcal{X}_{\mathcal{H}m}) - G_1(t, \mathcal{X}_{\mathcal{H}(m-1)})) dv \\
\mathcal{Y}_{\mathcal{H}(m+1)}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{H}m}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} (G_2(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}m}) - G_2(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}(m-1)})) \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_2(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}m}) - G_2(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}(m-1)})) dv \\
\mathcal{Z}_{\mathcal{H}(m+1)}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{H}m}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} (G_3(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}m}) - G_3(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}(m-1)})) \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_3(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}m}) - G_3(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}(m-1)})) dv \\
\mathcal{T}_{\mathcal{H}(m+1)}(t) - \mathcal{T}_{\mathcal{H}m}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} (G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}m}) - G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}(m-1)})) \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}m}) - G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}(m-1)})) dv \\
\mathcal{Q}_{\mathcal{H}(m+1)}(t) - \mathcal{Q}_{\mathcal{H}m}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} (G_5(t, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}m}) - G_5(t, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}(m-1)})) \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_5(t, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}m}) - G_5(t, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}(m-1)})) dv \\
\mathcal{X}_{\mathcal{V}(m+1)}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{V}m}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} (G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}m}) - G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}(m-1)})) \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}m}) - G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}(m-1)})) dv \\
\mathcal{Y}_{\mathcal{V}(m+1)}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{V}m}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} (G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}m}) - G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}(m-1)})) \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}m}) - G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}(m-1)})) dv \\
\mathcal{Z}_{\mathcal{V}(m+1)}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{V}m}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} (G_8(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}m}) - G_8(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}(m-1)})) \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_8(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}m}) - G_8(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}(m-1)})) dv
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Ardışık terimlerin farkları alındığında (4.26) denklem sistemi elde edilir. Bu sistemdeki denklemlerin her birinin normu alınsın.

$\mathcal{X}_{\mathcal{H}(m+1)}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{H}m}(t)$ denkleminin normu alınsın,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{X}_{\mathcal{H}(m+1)}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{H}m}(t)\| &= \left\| \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} (G_1(t, \mathcal{X}_{\mathcal{H}m}) - G_1(t, \mathcal{X}_{\mathcal{H}(m-1)})) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_1(t, \mathcal{X}_{\mathcal{H}m}) - G_1(t, \mathcal{X}_{\mathcal{H}(m-1)})) dv \right\| \\
&\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \|G_1(t, \mathcal{X}_{\mathcal{H}m}) - G_1(t, \mathcal{X}_{\mathcal{H}(m-1)})\| \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \left\| \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_1(t, \mathcal{X}_{\mathcal{H}m}) - G_1(t, \mathcal{X}_{\mathcal{H}(m-1)})) dv \right\|
\end{aligned} \tag{4.27}$$

ifade edilebilir. G_1 çekirdeği Lipschitz şartını sağladığı için

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{X}_{\mathcal{H}(m+1)}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{H}m}(t)\| &\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_1 \|\mathcal{X}_{\mathcal{H}m} - \mathcal{X}_{\mathcal{H}(m-1)}\| \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_1 \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \|\mathcal{X}_{\mathcal{H}m} - \mathcal{X}_{\mathcal{H}(m-1)}\| dv
\end{aligned} \tag{4.28}$$

denkleminde ulaşılır.

$\mathcal{Y}_{\mathcal{H}(m+1)}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{H}m}(t)$ denkleminin normu alınsın,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{Y}_{\mathcal{H}(m+1)}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{H}m}(t)\| &= \left\| \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} (G_2(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}m}) - G_2(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}(m-1)})) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_2(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}m}) - G_2(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}(m-1)})) dv \right\| \\
&\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \|G_2(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}m}) - G_2(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}(m-1)})\| \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \left\| \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_2(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}m}) - G_2(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}(m-1)})) dv \right\|
\end{aligned} \tag{4.29}$$

ifade edilebilir. G_2 çekirdeği Lipschitz koşulunu sağladığı için

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{Y}_{\mathcal{H}(m+1)}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{H}m}(t)\| &\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_2 \|\mathcal{Y}_{\mathcal{H}m} - \mathcal{Y}_{\mathcal{H}(m-1)}\| \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_2 \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \|\mathcal{Y}_{\mathcal{H}m} - \mathcal{Y}_{\mathcal{H}(m-1)}\| dv
\end{aligned} \tag{4.30}$$

denkleminde ulaşılır.

$\mathcal{Z}_{\mathcal{H}(m+1)}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{H}m}(t)$ denkleminin normu alınsın,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{Z}_{\mathcal{H}(m+1)}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{H}m}(t)\| &= \left\| \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} (G_3(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}m}) - G_3(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}(m-1)})) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_3(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}m}) - G_3(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}(m-1)})) dv \right\| \\
&\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \|G_3(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}m}) - G_3(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}(m-1)})\| \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \left\| \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_3(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}m}) - G_3(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}(m-1)})) dv \right\|
\end{aligned} \tag{4.31}$$

ifade edilebilir. G_3 çekirdeği Lipschitz koşulunu sağladığı için

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Z}_{\mathcal{H}(m+1)}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{H}m}(t)\| &\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_3 \|\mathcal{Z}_{\mathcal{H}m} - \mathcal{Z}_{\mathcal{H}(m-1)}\| \\ &+ \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_3 \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \|\mathcal{Z}_{\mathcal{H}m} - \mathcal{Z}_{\mathcal{H}(m-1)}\| dv \end{aligned} \quad (4.32)$$

denkleminde ulaşılır.

$\mathcal{T}_{\mathcal{H}(m+1)}(t) - \mathcal{T}_{\mathcal{H}m}(t)$ denkleminin normu alınsın,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_{\mathcal{H}(m+1)}(t) - \mathcal{T}_{\mathcal{H}m}(t)\| &= \left\| \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} (G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}m}) - G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}(m-1)})) \right. \\ &+ \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}m}) - G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}(m-1)})) dv \left. \right\| \\ &\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \|G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}m}) - G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}(m-1)})\| \\ &+ \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \left\| \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}m}) - G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}(m-1)})) dv \right\| \end{aligned} \quad (4.33)$$

ifade edilebilir. G_4 çekirdeği Lipschitz koşulunu sağladığı için

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_{\mathcal{H}(m+1)}(t) - \mathcal{T}_{\mathcal{H}m}(t)\| &\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_4 \|\mathcal{T}_{\mathcal{H}m} - \mathcal{T}_{\mathcal{H}(m-1)}\| \\ &+ \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_4 \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \|\mathcal{T}_{\mathcal{H}m} - \mathcal{T}_{\mathcal{H}(m-1)}\| dv \end{aligned} \quad (4.34)$$

denkleminde ulaşılır.

$\mathcal{Q}_{\mathcal{H}(m+1)}(t) - \mathcal{Q}_{\mathcal{H}m}(t)$ denkleminin normu alınsın,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Q}_{\mathcal{H}(m+1)}(t) - \mathcal{Q}_{\mathcal{H}m}(t)\| &= \left\| \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} (G_5(t, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}m}) - G_5(t, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}(m-1)})) \right. \\ &+ \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_5(t, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}m}) - G_5(t, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}(m-1)})) dv \left. \right\| \\ &\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \|G_5(t, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}m}) - G_5(t, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}(m-1)})\| \\ &+ \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \left\| \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_5(t, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}m}) - G_5(t, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}(m-1)})) dv \right\| \end{aligned} \quad (4.35)$$

ifade edilebilir. G_5 çekirdeği Lipschitz koşulunu sağladığı için

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Q}_{\mathcal{H}(m+1)}(t) - \mathcal{Q}_{\mathcal{H}m}(t)\| &\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_5 \|\mathcal{Q}_{\mathcal{H}m} - \mathcal{Q}_{\mathcal{H}(m-1)}\| \\ &+ \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_5 \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \|\mathcal{Q}_{\mathcal{H}m} - \mathcal{Q}_{\mathcal{H}(m-1)}\| dv \end{aligned} \quad (4.36)$$

denkleminde ulaşılır.

$\mathcal{X}_{\mathcal{V}(m+1)}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{V}m}(t)$ denkleminin normu alınsın,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{X}_{\mathcal{V}(m+1)}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{V}m}(t)\| &= \left\| \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} (G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}m}) - G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}(m-1)})) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}m}) - G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}(m-1)})) dv \right\| \\
&\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \|G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}m}) - G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}(m-1)})\| \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \left\| \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}m}) - G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}(m-1)})) dv \right\|
\end{aligned} \tag{4.37}$$

ifade edilebilir. G_6 çekirdeği Lipschitz koşulunu sağladığı için

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{X}_{\mathcal{V}(m+1)}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{V}m}(t)\| &\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_6 \|\mathcal{X}_{\mathcal{V}m} - \mathcal{X}_{\mathcal{V}(m-1)}\| \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_6 \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \|\mathcal{X}_{\mathcal{V}m} - \mathcal{X}_{\mathcal{V}(m-1)}\| dv
\end{aligned} \tag{4.38}$$

denkleme ulaşılır.

$\mathcal{Y}_{\mathcal{V}(m+1)}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{V}m}(t)$ denkleminin normu alınsın,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{Y}_{\mathcal{V}(m+1)}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{V}m}(t)\| &= \left\| \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} (G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}m}) - G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}(m-1)})) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}m}) - G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}(m-1)})) dv \right\| \\
&\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \|G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}m}) - G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}(m-1)})\| \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \left\| \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}m}) - G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}(m-1)})) dv \right\|
\end{aligned} \tag{4.39}$$

ifade edilebilir. G_7 çekirdeği Lipschitz koşulunu sağladığı için

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{Y}_{\mathcal{V}(m+1)}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{V}m}(t)\| &\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_7 \|\mathcal{Y}_{\mathcal{V}m} - \mathcal{Y}_{\mathcal{V}(m-1)}\| \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_7 \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \|\mathcal{Y}_{\mathcal{V}m} - \mathcal{Y}_{\mathcal{V}(m-1)}\| dv
\end{aligned} \tag{4.40}$$

denkleme ulaşılır.

$\mathcal{Z}_{\mathcal{V}(m+1)}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{V}m}(t)$ denkleminin normu alınsın,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{Z}_{\mathcal{V}(m+1)}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{V}m}(t)\| &= \left\| \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} (G_8(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}m}) - G_8(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}(m-1)})) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_8(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}m}) - G_8(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}(m-1)})) dv \right\| \\
&\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \|G_8(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}m}) - G_8(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}(m-1)})\| \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \left\| \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_8(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}m}) - G_8(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}(m-1)})) dv \right\|
\end{aligned} \tag{4.41}$$

ifade edilebilir. G_8 çekirdeği Lipschitz koşulunu sağladığı için

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Z}_{\mathcal{V}(m+1)}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{V}m}(t)\| &\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_8 \|\mathcal{Z}_{\mathcal{V}m} - \mathcal{Z}_{\mathcal{V}(m-1)}\| \\ &+ \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_8 \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \|\mathcal{Z}_{\mathcal{V}m} - \mathcal{Z}_{\mathcal{V}(m-1)}\| dv \end{aligned} \quad (4.42)$$

denkleme ulaşılır.

Teorem 4.2 *Zika virüs modeli denklem sisteminin, ABC kesirli türev tanımı ile oluşturulan (4.2) denklemleri aşağıda verilen koşullar altında kesin çözümlere sahiptir.*

$$\begin{aligned} \Xi_1 &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_1 + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_1 t_0 \leq 1 \\ \Xi_2 &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_2 + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_2 t_0 \leq 1 \\ \Xi_3 &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_3 + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_3 t_0 \leq 1 \\ \Xi_4 &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_4 + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_4 t_0 \leq 1 \\ \Xi_5 &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_5 + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_5 t_0 \leq 1 \\ \Xi_6 &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_6 + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_6 t_0 \leq 1 \\ \Xi_7 &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_7 + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_7 t_0 \leq 1 \\ \Xi_8 &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_8 + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_8 t_0 \leq 1 \end{aligned} \quad (4.43)$$

İspat Aşağıdaki eşitlikler tanımlansın,

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\mathcal{H}(m+1)} - \mathcal{X}_{\mathcal{H}}(t) &= \mathfrak{R}_{1n}(t) \\ \mathcal{Y}_{\mathcal{H}(m+1)} - \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t) &= \mathfrak{R}_{2n}(t) \\ \mathcal{Z}_{\mathcal{H}(m+1)} - \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) &= \mathfrak{R}_{3n}(t) \\ \mathcal{T}_{\mathcal{H}(m+1)} - \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t) &= \mathfrak{R}_{4n}(t) \\ \mathcal{Q}_{\mathcal{H}(m+1)} - \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(t) &= \mathfrak{R}_{5n}(t) \\ \mathcal{X}_{\mathcal{V}(m+1)} - \mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t) &= \mathfrak{R}_{6n}(t) \\ \mathcal{Y}_{\mathcal{V}(m+1)} - \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(t) &= \mathfrak{R}_{7n}(t) \\ \mathcal{Z}_{\mathcal{V}(m+1)} - \mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(t) &= \mathfrak{R}_{8n}(t) \end{aligned} \quad (4.44)$$

$\Re_{1n}(t)$ için

$$\begin{aligned}
\|\Re_{1n}(t)\| &= \left\| \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} (G_1(t, \mathcal{X}_{\mathcal{H}(m-1)}) - G_1(t, \mathcal{X}_{\mathcal{H}})) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_1(v, \mathcal{X}_{\mathcal{H}(m-1)}) - G_1(v, \mathcal{X}_{\mathcal{H}})) dv \right\| \\
&\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \|G_1(t, \mathcal{X}_{\mathcal{H}(m-1)}) - G_1(t, \mathcal{X}_{\mathcal{H}})\| \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \|G_1(v, \mathcal{X}_{\mathcal{H}(m-1)}) - G_1(v, \mathcal{X}_{\mathcal{H}})\| dv \\
&\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_1 \|\mathcal{X}_{\mathcal{H}(m-1)} - \mathcal{X}_{\mathcal{H}}\| + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_1 \|\mathcal{X}_{\mathcal{H}(m-1)} - \mathcal{X}_{\mathcal{H}}\| t
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Elde edilen işlemler tekrar edilirse aşağıdaki denklem,

$$\|\Re_{1n}(t)\| \leq \left(\frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} t \right)^m K_1^n \tag{4.46}$$

ifade edilir.

(4.46) denkleminde $t = t_0$ alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\|\Re_{1n}(t)\| \leq \left(\frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} t_0 \right)^m K_1^n \tag{4.47}$$

Elde ettiğimiz denklem $m \rightarrow \infty$ giderken limiti alındığında $\|\Re_{1n}(t)\| \rightarrow 0$ olur.

$$\begin{aligned}
\|\Re_{2n}(t)\| &= \left\| \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} (G_2(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}(m-1)}) - G_2(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}})) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_2(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}(m-1)}) - G_2(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}})) dv \right\| \\
&\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \|G_2(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}(m-1)}) - G_2(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}})\| \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \|G_2(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}(m-1)}) - G_2(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}})\| dv \\
&\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_2 \|\mathcal{Y}_{\mathcal{H}(m-1)} - \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}\| + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_2 \|\mathcal{Y}_{\mathcal{H}(m-1)} - \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}\| t
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Elde edilen işlemler tekrar edilirse aşağıdaki denklem,

$$\|\Re_{2n}(t)\| \leq \left(\frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} t \right)^m K_2^n \tag{4.49}$$

ifade edilir.

(4.49) denkleminde $t = t_0$ alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\|\Re_{2n}(t)\| \leq \left(\frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} t_0 \right)^m K_2^n \tag{4.50}$$

Elde ettiğimiz denklemin limiti alınırsa $m \rightarrow \infty$ giderken $\|\mathfrak{R}_{2n}(t)\| \rightarrow 0$ olur.

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{R}_{3n}(t)\| &= \left\| \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} (G_3(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}(m-1)}) - G_3(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}})) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_3(v, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}(m-1)}) - G_3(v, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}})) dv \right\| \\
&\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \|G_3(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}(m-1)}) - G_3(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}})\| \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \|G_3(v, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}(m-1)}) - G_3(v, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}})\| dv \\
&\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_3 \|\mathcal{Z}_{\mathcal{H}(m-1)} - \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}\| + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_3 \|\mathcal{Z}_{\mathcal{H}(m-1)} - \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}\| t
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Elde edilen işlemler tekrar edilirse aşağıdaki denklem,

$$\|\mathfrak{R}_{3n}(t)\| \leq \left(\frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} t \right)^m K_3^n \tag{4.52}$$

ifade edilir.

(4.52) denkleminde $t = t_0$ alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\|\mathfrak{R}_{3n}(t)\| \leq \left(\frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} t_0 \right)^m K_3^n \tag{4.53}$$

Elde ettiğimiz denklemin $m \rightarrow \infty$ giderken limiti alınırsa $\|\mathfrak{R}_{3n}(t)\| \rightarrow 0$ olur.

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{R}_{4n}(t)\| &= \left\| \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} (G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}(m-1)}) - G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}})) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_4(v, \mathcal{T}_{\mathcal{H}(m-1)}) - G_4(v, \mathcal{T}_{\mathcal{H}})) dv \right\| \\
&\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \|G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}(m-1)}) - G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}})\| \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \|G_4(v, \mathcal{T}_{\mathcal{H}(m-1)}) - G_4(v, \mathcal{T}_{\mathcal{H}})\| dv \\
&\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_4 \|\mathcal{T}_{\mathcal{H}(m-1)} - \mathcal{T}_{\mathcal{H}}\| + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_4 \|\mathcal{T}_{\mathcal{H}(m-1)} - \mathcal{T}_{\mathcal{H}}\| t
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Elde edilen işlemler tekrar edilirse aşağıdaki denklem

$$\|\mathfrak{R}_{4n}(t)\| \leq \left(\frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} t \right)^m K_4^n \tag{4.55}$$

ifade edilir .

(4.55) denkleminde $t = t_0$ alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\|\mathfrak{R}_{4n}(t)\| \leq \left(\frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} t_0 \right)^m K_4^n \tag{4.56}$$

Elde ettiğimiz denklemin limiti alınırsa $m \rightarrow \infty$ giderken $\|\mathfrak{R}_{4n}(t)\| \rightarrow 0$ olur.

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{R}_{5n}(t)\| &= \left\| \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} (G_5(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}(m-1)}) - G_5(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}})) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_5(v, \mathcal{T}_{\mathcal{H}(m-1)}) - G_5(v, \mathcal{T}_{\mathcal{H}})) dv \right\| \\
&\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \|G_5(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}(m-1)}) - G_5(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}})\| \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \|G_5(v, \mathcal{T}_{\mathcal{H}(m-1)}) - G_5(v, \mathcal{T}_{\mathcal{H}})\| dv \\
&\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_5 \|\mathcal{T}_{\mathcal{H}(m-1)} - \mathcal{T}_{\mathcal{H}}\| + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_5 \|\mathcal{T}_{\mathcal{H}(m-1)} - \mathcal{T}_{\mathcal{H}}\| t
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Elde edilen işlemler tekrar edilirse aşağıdaki denklem,

$$\|\mathfrak{R}_{5n}(t)\| \leq \left(\frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} t \right)^m K_5^n \tag{4.58}$$

ifade edilir.

(4.58) denkleminde $t = t_0$ alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\|\mathfrak{R}_{5n}(t)\| \leq \left(\frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} t_0 \right)^m K_5^n \tag{4.59}$$

Elde ettiğimiz denklemin $m \rightarrow \infty$ giderken limiti alınırsa $\|\mathfrak{R}_{5n}(t)\| \rightarrow 0$ olur.

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{R}_{6n}(t)\| &= \left\| \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} (G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}(m-1)}) - G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}})) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_6(v, \mathcal{X}_{\mathcal{V}(m-1)}) - G_6(v, \mathcal{X}_{\mathcal{V}})) dv \right\| \\
&\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \|G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}(m-1)}) - G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}})\| \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \|G_6(v, \mathcal{X}_{\mathcal{V}(m-1)}) - G_6(v, \mathcal{X}_{\mathcal{V}})\| dv \\
&\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_6 \|\mathcal{X}_{\mathcal{V}(m-1)} - \mathcal{X}_{\mathcal{V}}\| + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_6 \|\mathcal{X}_{\mathcal{V}(m-1)} - \mathcal{X}_{\mathcal{V}}\| t
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Elde edilen işlemler tekrar edilirse aşağıdaki denklem,

$$\|\mathfrak{R}_{6n}(t)\| \leq \left(\frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} t \right)^m K_6^n \tag{4.61}$$

ifade edilir.

(4.61) denkleminde $t = t_0$ alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\|\mathfrak{R}_{6n}(t)\| \leq \left(\frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} t_0 \right)^m K_6^n \tag{4.62}$$

Elde ettiğimiz denklemin limiti alınırsa $m \rightarrow \infty$ giderken $\|\mathfrak{R}_{6n}(t)\| \rightarrow 0$ olur.

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{R}_{7n}(t)\| &= \left\| \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} (G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}(m-1)}) - G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}})) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_7(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}(m-1)}) - G_7(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}})) dv \right\| \\
&\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \|G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}(m-1)}) - G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}})\| \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \|G_7(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}(m-1)}) - G_7(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}})\| dv \\
&\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_7 \|\mathcal{Y}_{\mathcal{V}(m-1)} - \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}\| + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_7 \|\mathcal{Y}_{\mathcal{V}(m-1)} - \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}\| t
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Elde edilen işlemler tekrar edilirse aşağıdaki denklem,

$$\|\mathfrak{R}_{7n}(t)\| \leq \left(\frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} t \right)^m K_7^n \tag{4.64}$$

ifade edilir.

(4.64) denkleminde $t = t_0$ alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\|\mathfrak{R}_{7n}(t)\| \leq \left(\frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} t_0 \right)^m K_7^n \tag{4.65}$$

Elde ettiğimiz denklemin $m \rightarrow \infty$ giderken limiti alınırsa $\|\mathfrak{R}_{7n}(t)\| \rightarrow 0$ olur.

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{R}_{8n}(t)\| &= \left\| \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} (G_8(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}(m-1)}) - G_8(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}})) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_8(v, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}(m-1)}) - G_8(v, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}})) dv \right\| \\
&\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \|G_8(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}(m-1)}) - G_8(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}})\| \\
&\quad + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \|G_8(v, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}(m-1)}) - G_8(v, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}})\| dv \\
&\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_8 \|\mathcal{Z}_{\mathcal{V}(m-1)} - \mathcal{Z}_{\mathcal{V}}\| + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_8 \|\mathcal{Z}_{\mathcal{V}(m-1)} - \mathcal{Z}_{\mathcal{V}}\| t
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Elde edilen işlemler tekrar edilirse aşağıdaki denklem,

$$\|\mathfrak{R}_{8n}(t)\| \leq \left(\frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} t \right)^m K_8^n \tag{4.67}$$

ifade edilir.

(4.67) denkleminde $t = t_0$ alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\|\mathfrak{R}_{8n}(t)\| \leq \left(\frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} t_0 \right)^m K_8^n \tag{4.68}$$

Elde ettiğimiz denklemin $m \rightarrow \infty$ giderken limiti alınırsa $\|\mathfrak{R}_{8n}(t)\| \rightarrow 0$ olur. Böylelikle (4.2)'nin varlığı ispat edilmiş olur.

Şimdi sıra (4.2) denklem sisteminin tekliği ispatlanmasında, $\mathcal{X}_{\mathcal{H}1}(t)$, $\mathcal{Y}_{\mathcal{H}1}(t)$, $\mathcal{Z}_{\mathcal{H}1}(t)$, $\mathcal{T}_{\mathcal{H}1}(t)$, $\mathcal{Q}_{\mathcal{H}1}(t)$, $\mathcal{X}_{\mathcal{V}1}(t)$, $\mathcal{Y}_{\mathcal{V}1}(t)$, $\mathcal{Z}_{\mathcal{V}1}(t)$ 4.2'nin başka bir çözüm sistemi olsun,

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{H}1}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}(G_1(t, \mathcal{X}_{\mathcal{H}}) - G_1(t, \mathcal{X}_{\mathcal{H}1})) \\ &+ \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)}(G_1(v, \mathcal{X}_{\mathcal{H}}) - G_1(v, \mathcal{X}_{\mathcal{H}1}))dv\end{aligned}\quad (4.69)$$

olmak üzere bu fark denkleminin normu alınsın,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{X}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{H}1}(t)\| &\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}\|G_1(t, \mathcal{X}_{\mathcal{H}}) - G_1(t, \mathcal{X}_{\mathcal{H}1})\| \\ &+ \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)}\|G_1(v, \mathcal{X}_{\mathcal{H}}) - G_1(v, \mathcal{X}_{\mathcal{H}1})\|dv\end{aligned}\quad (4.70)$$

bulunur. Çekirdeğin Lipschitz katsayısı kullanılırsa,

$$\|\mathcal{X}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{H}1}(t)\| \leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}K_1\|\mathcal{X}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{H}1}\| + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)}K_1\|\mathcal{X}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{H}1}\|t \quad (4.71)$$

yazılabilir. Eşitsizlik düzenlenirse,

$$\|\mathcal{X}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{H}1}(t)\| \left(1 - \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}K_1 - \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)}K_1t \right) \leq 0 \quad (4.72)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{H}1}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}(G_2(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}) - G_2(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}1})) \\ &+ \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)}(G_2(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}) - G_2(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}1}))dv\end{aligned}\quad (4.73)$$

olmak üzere bu fark denkleminin normu alınsın,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{H}1}(t)\| &\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}\|G_2(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}) - G_2(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}1})\| \\ &+ \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)}\|G_2(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}) - G_2(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}1})\|dv\end{aligned}\quad (4.74)$$

bulunur. Çekirdeğin Lipschitz katsayısı kullanılırsa,

$$\|\mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{H}1}(t)\| \leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}K_2\|\mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{H}1}\| + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)}K_2\|\mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{H}1}\|t \quad (4.75)$$

yazılabilir. Eşitsizlik düzenlenirse,

$$\|\mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{H}1}(t)\| \left(1 - \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}K_2 - \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)}K_2t \right) \leq 0 \quad (4.76)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{H}1}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}(G_3(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}) - G_3(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}1})) \\ &+ \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)}(G_3(v, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}) - G_3(v, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}1}))dv\end{aligned}\quad (4.77)$$

olmak üzere bu fark denkleminin normu alınsın,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{H}1}(t)\| &\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \|G_3(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}) - G_3(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}1})\| \\ &+ \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \|G_3(v, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}) - G_3(v, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}1})\| dv \end{aligned} \quad (4.78)$$

bulunur. Çekirdeğin Lipschitz katsayısı kullanılırsa,

$$\|\mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{H}1}(t)\| \leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_3 \|\mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{H}1}\| + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_3 \|\mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{H}1}\| t \quad (4.79)$$

yazılabilir. Eşitsizlik düzenlenirse,

$$\|\mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{H}1}(t)\| \left(1 - \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_3 - \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_3 t \right) \leq 0 \quad (4.80)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{T}_{\mathcal{H}1}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} (G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}}) - G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}1})) \\ &+ \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_4(v, \mathcal{T}_{\mathcal{H}}) - G_4(v, \mathcal{T}_{\mathcal{H}1})) dv \end{aligned} \quad (4.81)$$

olmak üzere bu fark denkleminin normu alınsın,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{T}_{\mathcal{H}1}(t)\| &\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \|G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}}) - G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}1})\| \\ &+ \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \|G_4(v, \mathcal{T}_{\mathcal{H}}) - G_4(v, \mathcal{T}_{\mathcal{H}1})\| dv \end{aligned} \quad (4.82)$$

bulunur. Çekirdeğin Lipschitz katsayısı kullanılırsa,

$$\|\mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{T}_{\mathcal{H}1}(t)\| \leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_4 \|\mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{T}_{\mathcal{H}1}\| + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_4 \|\mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{T}_{\mathcal{H}1}\| t \quad (4.83)$$

yazılabilir. Eşitsizlik düzenlenirse,

$$\|\mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{T}_{\mathcal{H}1}(t)\| \left(1 - \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_4 - \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_4 t \right) \leq 0 \quad (4.84)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Q}_{\mathcal{H}1}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} (G_5(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}}) - G_5(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}1})) \\ &+ \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_5(v, \mathcal{T}_{\mathcal{H}}) - G_5(v, \mathcal{T}_{\mathcal{H}1})) dv \end{aligned} \quad (4.85)$$

olmak üzere bu fark denkleminin normu alınsın,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{T}_{\mathcal{H}1}(t)\| &\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \|G_5(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}}) - G_5(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}1})\| \\ &+ \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \|G_5(v, \mathcal{T}_{\mathcal{H}}) - G_5(v, \mathcal{T}_{\mathcal{H}1})\| dv \end{aligned} \quad (4.86)$$

bulunur. Çekirdeğin Lipschitz katsayısı kullanılırsa,

$$\|\mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{T}_{\mathcal{H}1}(t)\| \leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_5 \|\mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{T}_{\mathcal{H}1}\| + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_5 \|\mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{T}_{\mathcal{H}1}\| t \quad (4.87)$$

yazılabilir. Eşitsizlik düzenlenirse,

$$\|\mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{T}_{\mathcal{H}1}(t)\| \left(1 - \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_5 - \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_5 t \right) \leq 0 \quad (4.88)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{V}1}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} (G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}}) - G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}1})) \\ &+ \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_6(v, \mathcal{X}_{\mathcal{V}}) - G_6(v, \mathcal{X}_{\mathcal{V}1})) dv \end{aligned} \quad (4.89)$$

olmak üzere bu fark denkleminin normu alınsın,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{V}1}(t)\| &\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \|G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}}) - G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}1})\| \\ &+ \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \|G_6(v, \mathcal{X}_{\mathcal{V}}) - G_6(v, \mathcal{X}_{\mathcal{V}1})\| dv \end{aligned} \quad (4.90)$$

bulunur. Çekirdeğin Lipschitz katsayısı kullanılırsa,

$$\|\mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{V}1}(t)\| \leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_6 \|\mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{V}1}\| + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_6 \|\mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{V}1}\| t \quad (4.91)$$

yazılabilir. Eşitsizlik düzenlenirse,

$$\|\mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{V}1}(t)\| \left(1 - \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_6 - \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_6 t \right) \leq 0 \quad (4.92)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{V}1}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} (G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}) - G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}1})) \\ &+ \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} (G_7(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}) - G_7(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}1})) dv \end{aligned} \quad (4.93)$$

olmak üzere bu fark denkleminin normu alınsın,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{V}1}(t)\| &\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \|G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}) - G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}1})\| \\ &+ \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \|G_7(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}) - G_7(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}1})\| dv \end{aligned} \quad (4.94)$$

bulunur. Çekirdeğin Lipschitz katsayısı kullanılırsa,

$$\|\mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{V}1}(t)\| \leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_7 \|\mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{V}1}\| + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_7 \|\mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{V}1}\| t \quad (4.95)$$

yazılabilir. Eşitsizlik düzenlenirse,

$$\|\mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{V}1}(t)\| \left(1 - \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_7 - \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_7 t \right) \leq 0 \quad (4.96)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_\nu(t) - \mathcal{Z}_{\nu_1}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}(G_8(t, \mathcal{Z}_\nu) - G_8(t, \mathcal{Z}_{\nu_1})) \\ &+ \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)}(G_8(v, \mathcal{Z}_\nu) - G_8(v, \mathcal{Z}_{\nu_1}))dv \end{aligned} \quad (4.97)$$

olmak üzere bu fark denkleminin normu alınsın,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Z}_\nu(t) - \mathcal{Z}_{\nu_1}(t)\| &\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}\|G_8(t, \mathcal{Z}_\nu) - G_8(t, \mathcal{Z}_{\nu_1})\| \\ &+ \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)}\|G_8(v, \mathcal{Z}_\nu) - G_8(v, \mathcal{Z}_{\nu_1})\|dv \end{aligned} \quad (4.98)$$

bulunur. Çekirdeğin Lipschitz katsayısı kullanılırsa,

$$\|\mathcal{Z}_\nu(t) - \mathcal{Z}_{\nu_1}(t)\| \leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}K_8\|\mathcal{Z}_\nu(t) - \mathcal{Z}_{\nu_1}\| + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)}K_8\|\mathcal{Z}_\nu(t) - \mathcal{Z}_{\nu_1}\|t \quad (4.99)$$

yazılabilir. Eşitsizlik düzenlenirse,

$$\|\mathcal{Z}_\nu(t) - \mathcal{Z}_{\nu_1}(t)\| \left(1 - \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}K_8 - \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)}K_8t \right) \leq 0 \quad (4.100)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Yukarıda bulunan denklemler göz önünde bulundurularak aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 4.3 *Verilen koşullar ile 4.2'in yalnız bir çözümü vardır.*

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}K_1 - \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)}K_1t \right) &> 0 \\ \left(1 - \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}K_2 - \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)}K_2t \right) &> 0 \\ \left(1 - \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}K_3 - \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)}K_3t \right) &> 0 \\ \left(1 - \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}K_4 - \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)}K_4t \right) &> 0 \\ \left(1 - \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}K_5 - \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)}K_5t \right) &> 0 \\ \left(1 - \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}K_6 - \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)}K_6t \right) &> 0 \\ \left(1 - \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}K_7 - \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)}K_7t \right) &> 0 \\ \left(1 - \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}K_8 - \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)}K_8t \right) &> 0 \end{aligned} \quad (4.101)$$

İspat Theorem (4.3)'teki koşullar sağlansın. (4.72) eşitsizliğinden,

$$\|\mathcal{X}_\mathcal{H}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{H}_1}(t)\| \left(1 - \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}K_1 - \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)}K_1t \right) \leq 0$$

olduğu için $\|\mathcal{X}_\mathcal{H}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{H}_1}(t)\| = 0$ olur. Buradan $\mathcal{X}_\mathcal{H}(t) = \mathcal{X}_{\mathcal{H}_1}(t)$ 'ye ulaşılır.(4.76) eşitsizliğinden,

$$\|\mathcal{Y}_\mathcal{H}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{H}_1}(t)\| \left(1 - \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}K_2 - \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)}K_2t \right) \leq 0$$

olduğu için $\|\mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{H}1}(t)\| = 0$ olur. Buradan $\mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t) = \mathcal{Y}_{\mathcal{H}1}(t)$ 'ye ulaşılır.(4.80) eşitsizliğinden,

$$\|\mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{H}1}(t)\| \left(1 - \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_3 - \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_3 t \right) \leq 0$$

olduğu için $\|\mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{H}1}(t)\| = 0$ olur. Buradan $\mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) = \mathcal{Z}_{\mathcal{H}1}(t)$ 'ye ulaşılır. (4.84) eşitsizliğinden,

$$\|\mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{T}_{\mathcal{H}1}(t)\| \left(1 - \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_4 - \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_4 t \right) \leq 0$$

olduğu için $\|\mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{T}_{\mathcal{H}1}(t)\| = 0$ olur. Buradan $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t) = \mathcal{T}_{\mathcal{H}1}(t)$ 'ye ulaşılır. (4.88) eşitsizliğinden,

$$\|\mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Q}_{\mathcal{H}1}(t)\| \left(1 - \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_5 - \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_5 t \right) \leq 0$$

olduğu için $\|\mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Q}_{\mathcal{H}1}(t)\| = 0$ olur. Buradan $\mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(t) = \mathcal{Q}_{\mathcal{H}1}(t)$ 'ye ulaşılır. (4.92) eşitsizliğinden,

$$\|\mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{V}1}(t)\| \left(1 - \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_6 - \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_6 t \right) \leq 0$$

olduğu için $\|\mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{V}1}(t)\| = 0$ olur. Buradan $\mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t) = \mathcal{X}_{\mathcal{V}1}(t)$ 'ye ulaşılır. (4.96) eşitsizliğinden,

$$\|\mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{V}1}(t)\| \left(1 - \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_7 - \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_7 t \right) \leq 0$$

olduğu için $\|\mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{V}1}(t)\| = 0$ olur. Buradan $\mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(t) = \mathcal{Y}_{\mathcal{V}1}(t)$ 'ye ulaşılır. (4.100) eşitsizliğinden,

$$\|\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{V}1}(t)\| \left(1 - \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} K_8 - \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} K_8 t \right) \leq 0$$

olduğu için $\|\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{V}1}(t)\| = 0$ olur. Buradan $\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(t) = \mathcal{Z}_{\mathcal{V}1}(t)$ 'ye ulaşılır. Böylece 4.2 denklem sisteminin tekliğine ulaşılır.

4.4. Kararlılık Analizi

Zika matematiksel modelinin kararlılığı incelenecektir.

Tanım 4.1 (4.1) 'in $\Delta_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ve $\varpi_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ sabitleri varsa Hyers-Ulam'a göre kararlıdır.

$$\begin{aligned}
|\mathcal{X}_{\mathcal{H}}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}G_1(t, \mathcal{X}_{\mathcal{H}}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)}G_1(v, \mathcal{X}_{\mathcal{H}}(v))dv| < \varpi_1, \\
|\mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}G_2(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)}G_2(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(v))dv| < \varpi_2, \\
|\mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}G_3(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)}G_3(v, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(v))dv| < \varpi_3, \\
|\mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)}G_4(v, \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(v))dv| < \varpi_4, \\
|\mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}G_5(t, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)}G_5(v, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(v))dv| < \varpi_5, \\
|\mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)}G_6(v, \mathcal{X}_{\mathcal{V}}(v))dv| < \varpi_6, \\
|\mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)}G_7(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(v))dv| < \varpi_7, \\
|\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}G_8(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)}G_8(v, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(v))dv| < \varpi_8,
\end{aligned} \tag{4.102}$$

$\mathcal{X}'_{\mathcal{H}}(t), \mathcal{Y}'_{\mathcal{H}}(t), \mathcal{Z}'_{\mathcal{H}}(t), \mathcal{T}'_{\mathcal{H}}(t), \mathcal{Q}'_{\mathcal{H}}(t), \mathcal{X}'_{\mathcal{V}}(t), \mathcal{Y}'_{\mathcal{V}}(t), \mathcal{Z}'_{\mathcal{V}}(t)$ var olsun,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{X}'_{\mathcal{H}}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}G_1(t, \mathcal{X}'_{\mathcal{H}}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)}G_1(v, \mathcal{X}'_{\mathcal{H}}(v))dv| < \varpi_1, \\
|\mathcal{Y}'_{\mathcal{H}}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}G_2(t, \mathcal{Y}'_{\mathcal{H}}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)}G_2(v, \mathcal{Y}'_{\mathcal{H}}(v))dv| < \varpi_2, \\
|\mathcal{Z}'_{\mathcal{H}}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}G_3(t, \mathcal{Z}'_{\mathcal{H}}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)}G_3(v, \mathcal{Z}'_{\mathcal{H}}(v))dv| < \varpi_3, \\
|\mathcal{T}'_{\mathcal{H}}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}G_4(t, \mathcal{T}'_{\mathcal{H}}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)}G_4(v, \mathcal{T}'_{\mathcal{H}}(v))dv| < \varpi_4, \\
|\mathcal{Q}'_{\mathcal{H}}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}G_5(t, \mathcal{Q}'_{\mathcal{H}}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)}G_5(v, \mathcal{Q}'_{\mathcal{H}}(v))dv| < \varpi_5, \\
|\mathcal{X}'_{\mathcal{V}}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}G_6(t, \mathcal{X}'_{\mathcal{V}}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)}G_6(v, \mathcal{X}'_{\mathcal{V}}(v))dv| < \varpi_6, \\
|\mathcal{Y}'_{\mathcal{V}}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}G_7(t, \mathcal{Y}'_{\mathcal{V}}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)}G_7(v, \mathcal{Y}'_{\mathcal{V}}(v))dv| < \varpi_7, \\
|\mathcal{Z}'_{\mathcal{V}}(t) &= \frac{1-\zeta}{B(\zeta)}G_8(t, \mathcal{Z}'_{\mathcal{V}}) + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)}G_8(v, \mathcal{Z}'_{\mathcal{V}}(v))dv| < \varpi_8,
\end{aligned} \tag{4.103}$$

Teorem 4.4 (4.2) denklem sistemi Hyers Ulam a göre kararlıdır.

İspat Teorem (4.3) de $\mathcal{X}_{\mathcal{H}}(t), \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t), \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t), \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t), \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(t), \mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t), \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(t), \mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(t)$ 'nin tek çözüm olduğu gösterilmiştir. Şimdi $\mathcal{X}'_{\mathcal{H}}(t), \mathcal{Y}'_{\mathcal{H}}(t), \mathcal{Z}'_{\mathcal{H}}(t), \mathcal{T}'_{\mathcal{H}}(t), \mathcal{Q}'_{\mathcal{H}}(t), \mathcal{X}'_{\mathcal{V}}(t), \mathcal{Y}'_{\mathcal{V}}(t), \mathcal{Z}'_{\mathcal{V}}(t)$

(4.2)'nin bir çözümü olmak üzere, (4.24)'ü sağlar. Buradan,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{X}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{X}'_{\mathcal{H}}(t)\| &\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \|G_1(t, \mathcal{X}_{\mathcal{H}}) - G_1(t, \mathcal{X}'_{\mathcal{H}})\| + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \\
&\quad \times \|G_1(v, \mathcal{X}_{\mathcal{H}}(v)) - G_1(v, \mathcal{X}'_{\mathcal{H}}(v))\| dv \\
&\leq \left(\frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} t \right) K_1 \|\mathcal{X}_{\mathcal{H}} - \mathcal{X}'_{\mathcal{H}}\|
\end{aligned} \tag{4.104}$$

Burada $\varpi_1 = K_1$ ve $\Delta_1 = \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} t$ alınırsa,

$$\|\mathcal{X}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{X}'_{\mathcal{H}}(t)\| \leq \varpi_1 \Delta_1$$

olur. (Burada eşitsizliğin sağındaki $\|\mathcal{X}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{X}'_{\mathcal{H}}(t)\|$ çok küçük bir sayı olduğu için ihmal edilmiştir.) Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Y}'_{\mathcal{H}}(t)\| &\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \|G_2(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}) - G_2(t, \mathcal{Y}'_{\mathcal{H}})\| + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \\
&\quad \times \|G_2(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(v)) - G_2(v, \mathcal{Y}'_{\mathcal{H}}(v))\| dv \\
&\leq \left(\frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} t \right) K_2 \|\mathcal{Y}_{\mathcal{H}} - \mathcal{Y}'_{\mathcal{H}}\|
\end{aligned} \tag{4.105}$$

Burada $\varpi_2 = K_2$ ve $\Delta_2 = \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} t$ alınırsa,

$$\|\mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Y}'_{\mathcal{H}}(t)\| \leq \varpi_2 \Delta_2$$

olur. (Burada eşitsizliğin sağındaki $\|\mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Y}'_{\mathcal{H}}(t)\|$ çok küçük bir sayı olduğu için ihmal edilmiştir.) Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Z}'_{\mathcal{H}}(t)\| &\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \|G_3(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}) - G_3(t, \mathcal{Z}'_{\mathcal{H}})\| + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \\
&\quad \times \|G_3(v, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(v)) - G_3(v, \mathcal{Z}'_{\mathcal{H}}(v))\| dv \\
&\leq \left(\frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} t \right) K_3 \|\mathcal{Z}_{\mathcal{H}} - \mathcal{Z}'_{\mathcal{H}}\|
\end{aligned} \tag{4.106}$$

Burada $\varpi_3 = K_3$ ve $\Delta_3 = \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} t$ alınırsa,

$$\|\mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Z}'_{\mathcal{H}}(t)\| \leq \varpi_3 \Delta_3$$

olur. (Burada eşitsizliğin sağındaki $\|\mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Z}'_{\mathcal{H}}(t)\|$ çok küçük bir sayı olduğu için ihmal

edilmiştir.) Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{T}'_{\mathcal{H}}(t)\| &\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \|G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}}) - G_4(t, \mathcal{T}'_{\mathcal{H}})\| + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \\
&\quad \times \|G_4(v, \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(v)) - G_4(v, \mathcal{T}'_{\mathcal{H}}(v))\| dv \\
&\leq \left(\frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} t \right) K_4 \|\mathcal{T}_{\mathcal{H}} - \mathcal{T}'_{\mathcal{H}}\|
\end{aligned} \tag{4.107}$$

Burada $\varpi_4 = K_4$ ve $\Delta_4 = \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} t$ alınırsa,

$$\|\mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{T}'_{\mathcal{H}}(t)\| \leq \varpi_4 \Delta_4$$

olur.(Burada eşitsizliğin sağındaki $\|\mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{T}'_{\mathcal{H}}(t)\|$ çok küçük bir sayı olduğu için ihmal edilmiştir.) Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Q}'_{\mathcal{H}}(t)\| &\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \|G_5(t, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}) - G_5(t, \mathcal{Q}'_{\mathcal{H}})\| + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \\
&\quad \times \|G_5(v, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(v)) - G_5(v, \mathcal{Q}'_{\mathcal{H}}(v))\| dv \\
&\leq \left(\frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} t \right) K_5 \|\mathcal{Q}_{\mathcal{H}} - \mathcal{Q}'_{\mathcal{H}}\|
\end{aligned} \tag{4.108}$$

Burada $\varpi_5 = K_5$ ve $\Delta_5 = \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} t$ alınırsa,

$$\|\mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Q}'_{\mathcal{H}}(t)\| \leq \varpi_5 \Delta_5$$

olur.(Burada eşitsizliğin sağındaki $\|\mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Q}'_{\mathcal{H}}(t)\|$ çok küçük bir sayı olduğu için ihmal edilmiştir.) Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t) - \mathcal{X}'_{\mathcal{V}}(t)\| &\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \|G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}}) - G_6(t, \mathcal{X}'_{\mathcal{V}})\| + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \\
&\quad \times \|G_6(v, \mathcal{X}_{\mathcal{V}}(v)) - G_6(v, \mathcal{X}'_{\mathcal{V}}(v))\| dv \\
&\leq \left(\frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} t \right) K_6 \|\mathcal{X}_{\mathcal{V}} - \mathcal{X}'_{\mathcal{V}}\|
\end{aligned} \tag{4.109}$$

Burada $\varpi_6 = K_6$ ve $\Delta_6 = \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} t$ alınırsa,

$$\|\mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t) - \mathcal{X}'_{\mathcal{V}}(t)\| \leq \varpi_6 \Delta_6$$

olur.(Burada eşitsizliğin sağındaki $\|\mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t) - \mathcal{X}'_{\mathcal{V}}(t)\|$ çok küçük bir sayı olduğu için ihmal edilmiştir.) Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(t) - \mathcal{Y}'_{\mathcal{V}}(t)\| &\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \|G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}) - G_7(t, \mathcal{Y}'_{\mathcal{V}})\| + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \\
&\quad \times \|G_7(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(v)) - G_7(v, \mathcal{Y}'_{\mathcal{V}}(v))\| dv \\
&\leq \left(\frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} t \right) K_7 \|\mathcal{Y}_{\mathcal{V}} - \mathcal{Y}'_{\mathcal{V}}\|
\end{aligned} \tag{4.110}$$

Burada $\varpi_7 = K_7$ ve $\Delta_7 = \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)}t$ alınır,

$$\|\mathcal{Y}_v(t) - \mathcal{Y}'_v(t)\| \leq \varpi_7 \Delta_7$$

olur. (Burada eşitsizliğin sağındaki $\|\mathcal{Y}_v(t) - \mathcal{Y}'_v(t)\|$ çok küçük bir sayı olduğu için ihmal edilmiştir.) Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Z}_v(t) - \mathcal{Z}'_v(t)\| &\leq \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} \|G_8(t, \mathcal{X}_v) - G_8(t, \mathcal{Z}'_v)\| + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{(\zeta-1)} \\ &\quad \times \|G_8(v, \mathcal{Z}_v(v)) - G_8(v, \mathcal{Z}'_v(v))\| dv \\ &\leq \left(\frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)}t \right) K_8 \|\mathcal{Z}_v - \mathcal{Z}'_v\| \end{aligned} \quad (4.111)$$

Burada $\varpi_8 = K_8$ ve $\Delta_8 = \frac{1-\zeta}{B(\zeta)} + \frac{\zeta}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)}t$ alınır,

$$\|\mathcal{Z}_v(t) - \mathcal{Z}'_v(t)\| \leq \varpi_8 \Delta_8$$

olur. (Burada eşitsizliğin sağındaki $\|\mathcal{Z}_v(t) - \mathcal{Z}'_v(t)\|$ çok küçük bir sayı olduğu için ihmal edilmiştir.) Böylece teorem ispatlanmış olur. Yani (4.2) denklem sistemi Hyres Ulam a göre karardır.

4.5. Nümerik Çözüm Yöntemi

Atangana ve Owolabi (2018) kesirli diferansiyel denklemlerin ayrılabilmesi için Caputo kesirli türevini kullanarak yeni diferansiyel denklemi düşünmüşlerdir.

$${}_0^{ABC}D_t^\zeta x(t) = (f(t, x(t))). \quad (4.112)$$

Bu denklem analizin temel teoremi kullanılarak düzenlenirse,

$$x(t) - x(0) = \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} f(t, x(t)) + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{\zeta-1} f(v, x(v)) dv, \quad (4.113)$$

ulaşılır. Bunun sonucunda,

$$x(t_{m+1}) - x(0) = \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} f(t_m, x(t_m)) + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_{m+1}} (t_{m+1}-v)^{\zeta-1} f(v, x(v)) dv, \quad (4.114)$$

olur ve t_m için

$$x(t_m) - x(0) = \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} f(t_{m-1}, x(t_{m-1})) + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_m} (t_m - v)^{\zeta-1} f(v, x(v)) dv, \quad (4.115)$$

olur. (4.114) ve (4.115) denklem sistemlerinin farkından,

$$\begin{aligned} x(t_{m+1}) - x(t_m) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} \{f(t_m, x(t_m)) - f(t_{m-1}, x(t_{m-1}))\} \\ &+ \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_{m+1}} (t_{m+1} - v)^{\zeta-1} f(v, x(v)) dv \\ &- \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_m} (t_m - v)^{\zeta-1} f(v, x(v)) dv \end{aligned} \quad (4.116)$$

denklemleri elde edilir. Böylece,

$$x(t_{m+1}) - x(t_m) = \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} \{f(t_m, x(t_m)) - f(t_{m-1}, x(t_{m-1}))\} + A_{\zeta,1} - A_{\zeta,2} \quad (4.117)$$

genelliğine bağlı olarak, $A_{\zeta,1}$ için

$$A_{\zeta,1} = \frac{\zeta f(t_m, x(t_m))}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)h} \left\{ \frac{2ht_{m+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{m+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} \right\} - \frac{\zeta f(t_{m-1}, x(t_{m-1}))}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)h} \left\{ \frac{ht_{m+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{m+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} \right\} \quad (4.118)$$

yazılır ve benzer şekilde, $A_{\zeta,2}$ için

$$A_{\zeta,2} = \frac{\zeta f(t_m, x(t_m))}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)h} \left\{ \frac{ht_m^\zeta}{\zeta} - \frac{t_m^{\zeta+1}}{\zeta+1} \right\} - \frac{\zeta f(t_{m-1}, x(t_{m-1}))}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)h} \left\{ \frac{ht_n^\zeta}{\zeta} - \frac{t_n^{\zeta+1}}{\zeta+1} \right\} \quad (4.119)$$

ulaşılır. Sonuçta,

$$\begin{aligned} x(t_{m+1}) &= x(t_m) + f(t_m, x(t_m)) \left\{ \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)h} \left[\frac{2ht_{m+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{m+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{ht_m^\zeta}{\zeta} + \frac{t_m^{\zeta+1}}{\zeta+1} \right] \right\} + f(t_{m-1}, x(t_{m-1})) \\ &\quad \times \left\{ \frac{\zeta-1}{ABC(\zeta)} - \frac{\zeta}{hABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \left[\frac{ht_{m+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{m+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} + t_m^{\zeta+1} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.120)$$

olur. Bu denkleme, Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevi için iki aşamalı Adams-Bashforth şeması denir.

Teorem 4.5 Aşağıdaki denklemin çözümü $x(t)$ olmak üzere,

$${}_0^{ABC}D_t^\zeta x(t) = f(t, x(t)), \quad (4.121)$$

f fonksiyonu sürekli ve sınırlıdır, $x(t)$ sayısal çözümü ise,

$$\begin{aligned} x(t_{m+1}) = & x(t_m) + f(t_m, x(t_m)) \left\{ \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)h} \left[\frac{2ht_{m+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{m+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{ht_m^\zeta}{\zeta} - \frac{t_m^{\zeta+1}}{\zeta+1} \right] \right\} + f(t_{m-1}, x(t_{m+1})) \\ & \times \left\{ \frac{\zeta-1}{ABC(\zeta)} - \frac{\zeta}{hABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \left[\frac{ht_{m+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{m+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} + t_m^{\zeta+1} \right] \right\} + \mathfrak{R}_\zeta \end{aligned} \quad (4.122)$$

dır. Buradan $\|\mathfrak{R}_\zeta\|_\infty < M$ olur.

4.5.1. Zika Modelinin Nümerik Çözümü

Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevi ile Zika virüsü için genişletilmiş matematiksel model (4.2) sisteminde gösterilmiştir. Elde edilen sistem (4.3) temel analiz teoremi ile yeniden düzenlendiğinde G_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ çekirdekleri için bir sonraki denklem sistem,

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_\mathcal{H}(t) - \mathcal{X}_\mathcal{H}(0) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} G_1(t, \mathcal{X}_\mathcal{H}(t)) \\ &+ \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{\zeta-1} G_1(v, \mathcal{X}_\mathcal{H}(v)) dv, \\ \mathcal{Y}_\mathcal{H}(t) - \mathcal{Y}_\mathcal{H}(0) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} G_2(t, \mathcal{Y}_\mathcal{H}(t)) \\ &+ \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{\zeta-1} G_2(v, \mathcal{Y}_\mathcal{H}(v)) dv, \\ \mathcal{Z}_\mathcal{H}(t) - \mathcal{Z}_\mathcal{H}(0) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} G_3(t, \mathcal{Z}_\mathcal{H}(t)) \\ &+ \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{\zeta-1} G_3(v, \mathcal{Z}_\mathcal{H}(v)) dv, \end{aligned} \quad (4.123)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(0) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} G_4(t, \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(t)) \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{\zeta-1} G_4(v, \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(v)) dv, \\
\mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(t) - \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(0) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} G_5(t, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(t)) \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{\zeta-1} G_5(v, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(v)) dv, \\
\mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{V}}(0) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} G_6(t, \mathcal{X}_{\mathcal{V}}(t)) \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{\zeta-1} G_6(v, \mathcal{X}_{\mathcal{V}}(v)) dv, \\
\mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(0) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} G_7(t, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(t)) \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{\zeta-1} G_7(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(v)) dv, \\
\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(0) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} G_8(t, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(t)) \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^t (t-v)^{\zeta-1} G_8(v, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(v)) dv,
\end{aligned}$$

olarak oluşturulur. Böylece,

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{\mathcal{H}m+1}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{H}}(0) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} G_1(t_m, \mathcal{X}_{\mathcal{H}m}(t)) \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_{m+1}} (t_{m+1}-v)^{\zeta-1} G_1(v, \mathcal{X}_{\mathcal{H}}(v)) dv, \\
\mathcal{Y}_{\mathcal{H}m+1}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(0) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} G_2(t_n, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}m}(t)) \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_{m+1}} (t_{m+1}-v)^{\zeta-1} G_2(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(v)) dv, \\
\mathcal{Z}_{\mathcal{H}m+1}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(0) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} G_3(t_n, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}m}(t)) \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_{m+1}} (t_{m+1}-v)^{\zeta-1} G_3(v, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(v)) dv, \\
\mathcal{T}_{\mathcal{H}m+1}(t) - \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(0) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} G_4(t_n, \mathcal{T}_{\mathcal{H}m}(t)) \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_{m+1}} (t_{m+1}-v)^{\zeta-1} G_4(v, \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(v)) dv,
\end{aligned} \tag{4.124}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{\mathcal{H}m+1}(t) - \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(0) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} G_5(t_n, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}m}(t)) \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_{m+1}} (t_{m+1} - v)^{\zeta-1} G_5(v, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(v)) dv, \\
\mathcal{X}_{\mathcal{V}m+1}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{V}}(0) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} G_6(t_n, \mathcal{X}_{\mathcal{V}m}(t)) \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_{m+1}} (t_{m+1} - v)^{\zeta-1} G_6(v, \mathcal{X}_{\mathcal{V}}(v)) dv, \\
\mathcal{Y}_{\mathcal{V}m+1}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(0) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} G_7(t_n, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}m}(t)) \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_{m+1}} (t_{m+1} - v)^{\zeta-1} G_7(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(v)) dv, \\
\mathcal{Z}_{\mathcal{V}m+1}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(0) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} G_8(t_n, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(t)) \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_{m+1}} (t_{m+1} - v)^{\zeta-1} G_8(v, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(v)) dv,
\end{aligned}$$

olur ve t_n için

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{\mathcal{H}m}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{H}}(0) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} G_1(t_{m-1}, \mathcal{X}_{\mathcal{H}m-1}(t)) \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_m} (t_m - v)^{\zeta-1} G_1(v, \mathcal{X}_{\mathcal{H}}(v)) dv, \\
\mathcal{Y}_{\mathcal{H}m}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(0) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} G_2(t_{m-1}, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}m-1}(t)) \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_m} (t_m - v)^{\zeta-1} \kappa_2(v, E(v)) dv, \\
\mathcal{Z}_{\mathcal{H}m}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(0) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} G_3(t_{m-1}, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}m-1}(t)) \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_m} (t_m - v)^{\zeta-1} G_3(v, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(v)) dv, \\
\mathcal{T}_{\mathcal{H}m}(t) - \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(0) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} G_4(t_{m-1}, \mathcal{T}_{\mathcal{H}m-1}(t)) \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_m} (t_m - v)^{\zeta-1} G_4(v, \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(v)) dv, \\
\mathcal{Q}_{\mathcal{H}m}(t) - \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(0) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} G_5(t_{m-1}, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}m-1}(t)) \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_m} (t_m - v)^{\zeta-1} G_5(v, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(v)) dv,
\end{aligned} \tag{4.125}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{\mathcal{V}m}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{V}}(0) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} G_6(t_{m-1}, \mathcal{X}_{\mathcal{V}m-1}(t)) \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_m} (t_m - v)^{\zeta-1} G_6(v, \mathcal{X}_{\mathcal{V}}(v)) dv, \\
\mathcal{Y}_{\mathcal{V}m}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(0) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} G_7(t_{m-1}, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}m-1}(t)) \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_m} (t_m - v)^{\zeta-1} G_7(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{V}}(v)) dv, \\
\mathcal{Z}_{\mathcal{V}m}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(0) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} G_8(t_{m-1}, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}m-1}(t)) \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_m} (t_m - v)^{\zeta-1} G_8(v, \mathcal{Z}_{\mathcal{V}}(v)) dv,
\end{aligned}$$

olarak bulunur. (4.124) ve (4.125) sistemlerinde denklemlerin herbirinin farkı alınırsa,

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{\mathcal{H}m+1}(t) - \mathcal{X}_{\mathcal{H}m}(t) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} \{G_1(t_m, \mathcal{X}_{\mathcal{H}m}(t)) - G_1(t_{m-1}, \mathcal{X}_{\mathcal{H}m-1}(t))\} \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_{m+1}} (t_{m+1} - v)^{\zeta-1} G_1(v, \mathcal{X}_{\mathcal{H}}(v)) dv, \\
&\quad - \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_m} (t_m - v)^{\zeta-1} G_1(v, \mathcal{X}_{\mathcal{H}}(v)) dv, \\
\mathcal{Y}_{\mathcal{H}m+1}(t) - \mathcal{Y}_{\mathcal{H}m}(t) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} \{G_2(t_m, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}m}(t)) - G_2(t_{m-1}, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}m-1}(t))\} \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_{m+1}} (t_{m+1} - v)^{\zeta-1} G_2(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(v)) dv, \\
&\quad - \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_m} (t_m - v)^{\zeta-1} G_2(v, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}(v)) dv, \\
\mathcal{Z}_{\mathcal{H}m+1}(t) - \mathcal{Z}_{\mathcal{H}m}(t) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} \{G_3(t_m, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}m}(t)) - G_3(t_{m-1}, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}m-1}(t))\} \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_{m+1}} (t_{m+1} - v)^{\zeta-1} G_3(v, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(v)) dv, \\
&\quad - \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_m} (t_m - v)^{\zeta-1} G_3(v, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}}(v)) dv, \\
\mathcal{T}_{\mathcal{H}m+1}(t) - \mathcal{T}_{\mathcal{H}m}(t) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} \{G_4(t_m, \mathcal{T}_{\mathcal{H}m}(t)) - G_4(t_{m-1}, \mathcal{T}_{\mathcal{H}m-1}(t))\} \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_{m+1}} (t_{m+1} - v)^{\zeta-1} G_4(v, \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(v)) dv, \\
&\quad - \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_m} (t_m - v)^{\zeta-1} G_4(v, \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(v)) dv, \\
\mathcal{Q}_{\mathcal{H}m+1}(t) - \mathcal{Q}_{\mathcal{H}m}(t) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} \{G_5(t_m, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}m}(t)) - G_5(t_{m-1}, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}m-1}(t))\} \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_{m+1}} (t_{m+1} - v)^{\zeta-1} G_5(v, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(v)) dv, \\
&\quad - \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_m} (t_m - v)^{\zeta-1} G_5(v, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}}(v)) dv,
\end{aligned} \tag{4.126}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{\nu_{m+1}}(t) - \mathcal{X}_{\nu_m}(t) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} \{G_6(t_m, \mathcal{X}_{\nu_m}(t)) - G_6(t_{m-1}, \mathcal{X}_{\nu_{m-1}}(t))\} \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_{m+1}} (t_{m+1} - v)^{\zeta-1} G_6(v, \mathcal{X}_{\nu}(v)) dv, \\
&\quad - \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_m} (t_m - v)^{\zeta-1} G_6(v, \mathcal{X}_{\nu}(v)) dv, \\
\mathcal{Y}_{\nu_{m+1}}(t) - \mathcal{Y}_{\nu_m}(t) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} \{G_7(t_m, \mathcal{Y}_{\nu_m}(t)) - G_7(t_{m-1}, \mathcal{Y}_{\nu_{m-1}}(t))\} \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_{m+1}} (t_{m+1} - v)^{\zeta-1} G_7(v, \mathcal{Y}_{\nu}(v)) dv, \\
&\quad - \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_m} (t_m - v)^{\zeta-1} G_7(v, \mathcal{Y}_{\nu}(v)) dv, \\
\mathcal{Z}_{\nu_{m+1}}(t) - \mathcal{Z}_{\nu_m}(t) &= \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} \{G_8(t_m, \mathcal{Z}_{\nu_m}(t)) - G_8(t_{m-1}, \mathcal{Z}_{\nu_{m-1}}(t))\} \\
&\quad + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_{m+1}} (t_{m+1} - v)^{\zeta-1} G_8(v, \mathcal{Z}_{\nu}(v)) dv, \\
&\quad - \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^{t_m} (t_m - v)^{\zeta-1} G_8(v, \mathcal{Z}_{\nu}(v)) dv,
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Teorem (4.5)'e göre,

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{\mathcal{H}m+1} &= \mathcal{X}_{\mathcal{H}m} + G_1(t_m, \mathcal{X}_{\mathcal{H}m}(t)) \left\{ \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)h} \right. \\
&\quad \times \left[\frac{2ht_{m+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{m+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} - \frac{ht_m^\zeta}{\zeta} + \frac{t_m^{\zeta+1}}{\zeta+1} \right] \Big\} \\
&\quad + G_1(t_{m-1}, \mathcal{X}_{\mathcal{H}m-1}(t)) \left\{ \frac{\zeta-1}{ABC(\zeta)} - \frac{\zeta}{hABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \right. \\
&\quad \times \left[\frac{ht_{m+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{m+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} + t_m^{\zeta+1} \right] \Big\} + {}^1\mathfrak{R}_\zeta
\end{aligned} \tag{4.127}$$

yazılarak böylece $\|{}^1\mathfrak{R}_\zeta\|_\infty < M$ 'ye ulaşılır.

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}_{\mathcal{H}m+1} &= \mathcal{Y}_{\mathcal{H}m} + G_2(t_m, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}m}(t)) \left\{ \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)h} \right. \\
&\quad \times \left[\frac{2ht_{m+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{m+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} - \frac{ht_m^\zeta}{\zeta} + \frac{t_m^{\zeta+1}}{\zeta+1} \right] \Big\} \\
&\quad + G_2(t_{m-1}, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}m-1}(t)) \left\{ \frac{\zeta-1}{ABC(\zeta)} - \frac{\zeta}{hABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \right. \\
&\quad \times \left[\frac{ht_{m+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{m+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} + t_m^{\zeta+1} \right] \Big\} + {}^2\mathfrak{R}_\zeta
\end{aligned} \tag{4.128}$$

yazılarak böylece $\|{}^2\mathfrak{R}_\zeta\|_\infty < M$ 'ye ulaşılır.

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{\mathcal{H}m+1} &= \mathcal{Z}_{\mathcal{H}m} + G_3(t_m, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}m}(t)) \left\{ \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)h} \right. \\
&\quad \times \left[\frac{2ht_{m+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{m+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} - \frac{ht_m^\zeta}{\zeta} + \frac{t_m^{\zeta+1}}{\zeta+1} \right] \Big\} \\
&\quad \times + G_3(t_{m-1}, \mathcal{Z}_{\mathcal{H}m-1}(t)) \left\{ \frac{\zeta-1}{ABC(\zeta)} - \frac{\zeta}{hABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \right. \\
&\quad \times \left[\frac{ht_{m+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{m+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} + t_m^{\zeta+1} \right] \Big\} + {}^3\mathfrak{R}_\zeta
\end{aligned} \tag{4.129}$$

yazılarak böylece $\|{}^3\mathfrak{R}_\zeta\|_\infty < M$ 'ye ulaşılır.

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\mathcal{H}m+1} &= \mathcal{T}_{\mathcal{H}m} + G_4(t_m, \mathcal{T}_{\mathcal{H}m}(t)) \left\{ \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)h} \right. \\
&\quad \times \left[\frac{2ht_{m+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{m+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} - \frac{ht_m^\zeta}{\zeta} + \frac{t_m^{\zeta+1}}{\zeta+1} \right] \Big\} \\
&\quad \times + G_4(t_{m-1}, \mathcal{T}_{\mathcal{H}m-1}(t)) \left\{ \frac{\zeta-1}{ABC(\zeta)} - \frac{\zeta}{hABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \right. \\
&\quad \times \left[\frac{ht_{m+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{m+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} + t_m^{\zeta+1} \right] \Big\} + {}^4\mathfrak{R}_\zeta
\end{aligned} \tag{4.130}$$

yazılarak böylece $\|{}^4\mathfrak{R}_\zeta\|_\infty < M$ 'ye ulaşılır.

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{\mathcal{H}m+1} &= \mathcal{Q}_{\mathcal{H}m} + G_5(t_m, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}m}(t)) \left\{ \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)h} \right. \\
&\quad \times \left[\frac{2ht_{m+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{m+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} \right] - \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)h} \left[\frac{ht_m^\zeta}{\zeta} - \frac{t_m^{\zeta+1}}{\zeta+1} \right] \Big\} \\
&\quad \times + G_5(t_{m-1}, \mathcal{Q}_{\mathcal{H}m-1}(t)) \left\{ \frac{\zeta-1}{ABC(\zeta)} - \frac{\zeta}{hABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \right. \\
&\quad \times \left[\frac{ht_{m+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{m+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} + t_m^{\zeta+1} \right] \Big\} + {}^5\mathfrak{R}_\zeta
\end{aligned} \tag{4.131}$$

yazılarak böylece $\|{}^5\mathfrak{R}_\zeta\|_\infty < M$ 'ye ulaşılır.

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{\mathcal{V}m+1} &= \mathcal{X}_{\mathcal{V}m} + G_6(t_m, \mathcal{X}_{\mathcal{V}m}(t)) \left\{ \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)h} \right. \\
&\quad \times \left[\frac{2ht_{m+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{m+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} - \frac{ht_m^\zeta}{\zeta} + \frac{t_m^{\zeta+1}}{\zeta+1} \right] \Big\} \\
&\quad + G_6(t_{m-1}, \mathcal{X}_{\mathcal{V}m-1}(t)) \left\{ \frac{\zeta-1}{ABC(\zeta)} - \frac{\zeta}{hABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \right. \\
&\quad \times \left[\frac{ht_{m+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{m+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} + t_m^{\zeta+1} \right] \Big\} + {}^6\mathfrak{R}_\zeta
\end{aligned} \tag{4.132}$$

yazılarak böylece $\|{}^6\mathfrak{R}_\zeta\|_\infty < M$ 'ye ulaşılır.

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_{\nu_{m+1}} &= \mathcal{Y}_{\nu_m} + G_7(t_m, \mathcal{Y}_{\nu_m}(t)) \left\{ \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)h} \right. \\ &\quad \times \left[\frac{2ht_{m+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{m+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} - \frac{ht_m^\zeta}{\zeta} + \frac{t_m^{\zeta+1}}{\zeta+1} \right] \Big\} \\ &\quad + G_7(t_{m-1}, \mathcal{Y}_{\nu_{m-1}}(t)) \left\{ \frac{\zeta-1}{ABC(\zeta)} - \frac{\zeta}{hABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \right. \\ &\quad \times \left[\frac{ht_{m+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{m+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} + t_m^{\zeta+1} \right] \Big\} + {}^7\mathfrak{R}_\zeta\end{aligned}\tag{4.133}$$

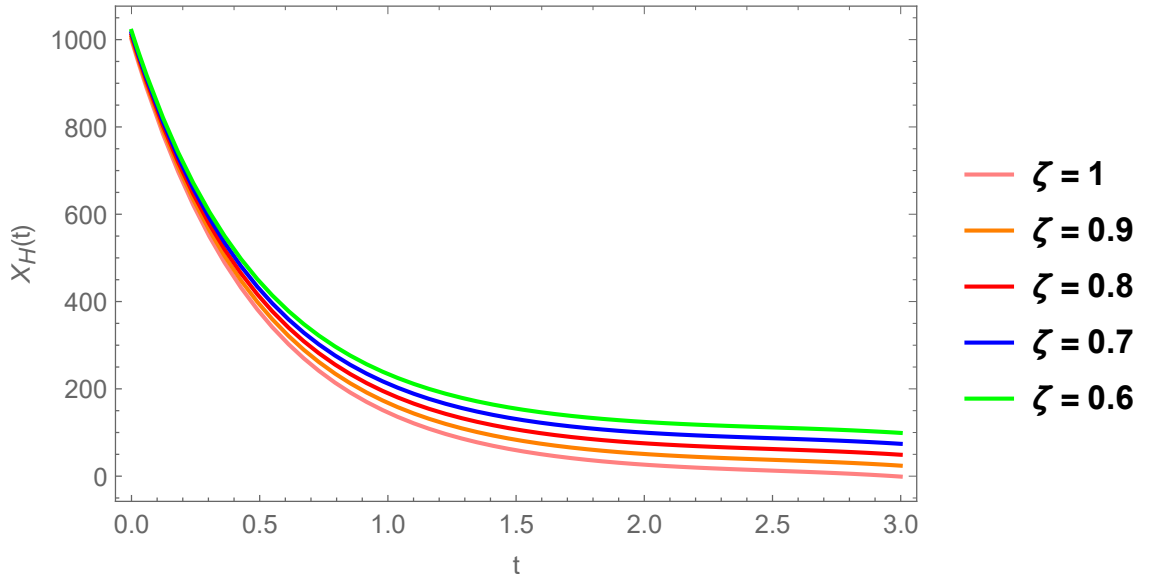
yazılarak böylece $\|{}^7\mathfrak{R}_\zeta\|_\infty < M$ 'ye ulaşılır.

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{\nu_{m+1}} &= \mathcal{Z}_{\nu_m} + G_8(t_m, \mathcal{Z}_{\nu_m}(t)) \left\{ \frac{1-\zeta}{ABC(\zeta)} + \frac{\zeta}{ABC(\zeta)\Gamma(\zeta)h} \right. \\ &\quad \times \left[\frac{2ht_{m+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{m+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} - \frac{ht_m^\zeta}{\zeta} + \frac{t_m^{\zeta+1}}{\zeta+1} \right] \Big\} \\ &\quad + G_8(t_{m-1}, \mathcal{Z}_{\nu_{m-1}}(t)) \left\{ \frac{\zeta-1}{ABC(\zeta)} - \frac{\zeta}{hABC(\zeta)\Gamma(\zeta)} \right. \\ &\quad \times \left[\frac{ht_{m+1}^\zeta}{\zeta} - \frac{t_{m+1}^{\zeta+1}}{\zeta+1} + t_m^{\zeta+1} \right] \Big\} + {}^8\mathfrak{R}_\zeta\end{aligned}\tag{4.134}$$

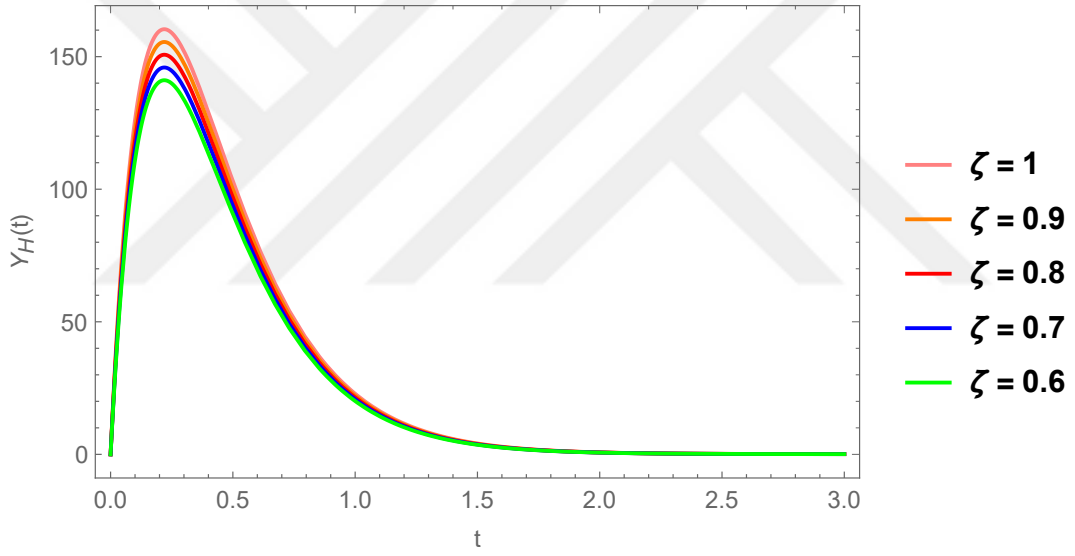
yazılarak böylece $\|{}^8\mathfrak{R}_\zeta\|_\infty < M$ 'ye ulaşılır.

Nümerik çözümü yapılan (4.2) Zika matematiksel modelinin farklı ζ kesirli türev değerleri için simülasyonları aşağıda verilmiştir.

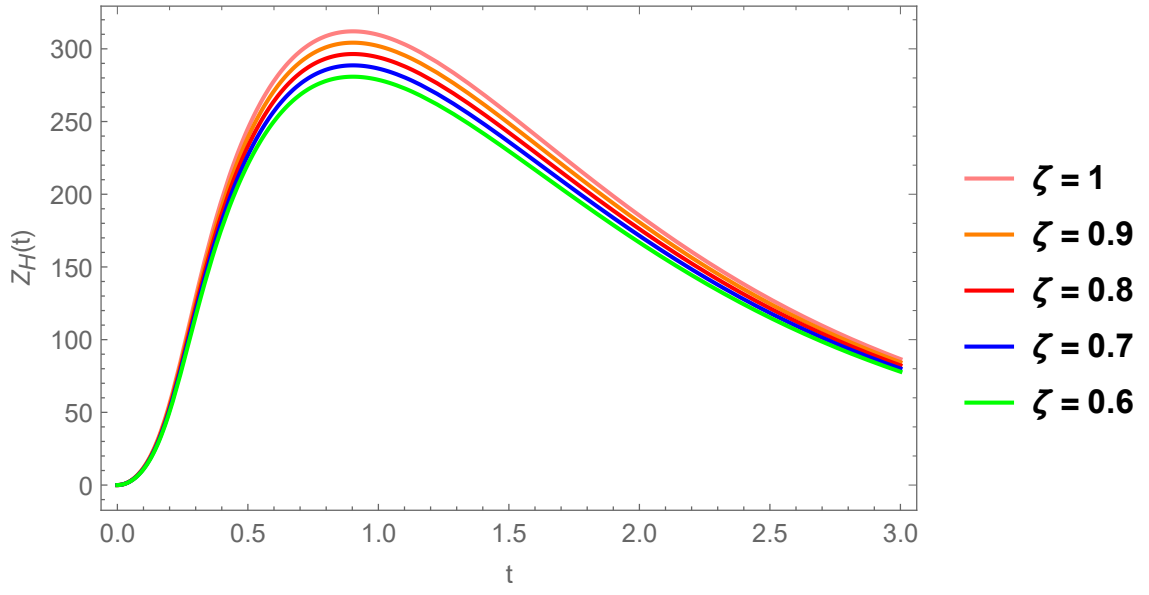
Şekil (4.1)'de duyarlı birey popülasyonunun farklı mertebeden türevleri incelenmiştir. $\mathcal{X}_\mathcal{H}$ duyarlı birey popülasyonunun zaman ile azaldığı gözlemlenmiştir. Şekil (4.2)'de maruz kalan birey popülasyonunun farklı mertebeden türevleri incelenmiştir. $\mathcal{Z}_\mathcal{H}$ maruz kalan birey popülasyonu belli bir müddet artış gösterdikten sonra azaldığı gözlemlenmiştir. Şekil (4.3)'de enfekte birey popülasyonunun farklı mertebeden türevleri incelenmiştir. $\mathcal{Y}_\mathcal{H}$ enfekte birey popülasyonu ani bir artış gösterdikten sonra azaldığı gözlemlenmiştir. Şekil (4.4)'de iyileşen birey popülasyonunun farklı mertebeden türevleri incelenmiştir. $\mathcal{T}_\mathcal{H}$ iyileşen birey popülasyonunun sürekli bir artış gösterdiği gözlemlenmiştir. Şekil (4.5)'de taşıyıcı birey popülasyonunun farklı mertebeden türevleri incelenmiştir. $\mathcal{Q}_\mathcal{H}$ taşıyıcı birey popülasyonunun öncelikle bir artış gösterdiği daha sonra azaldığı gözlemlenmiştir.



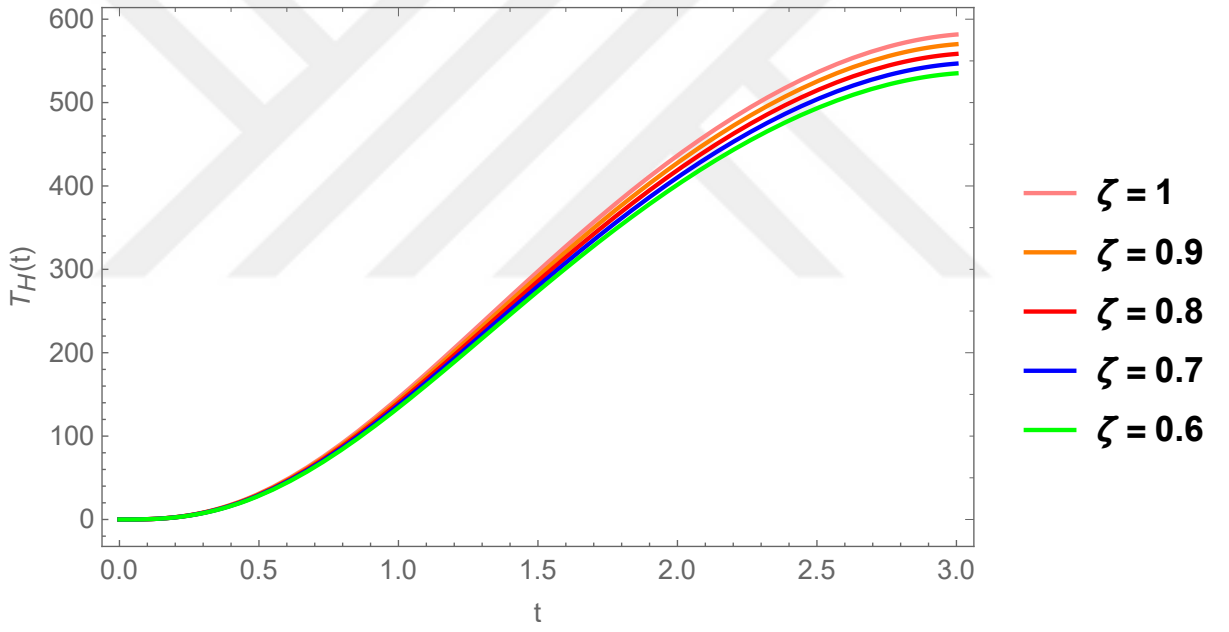
Şekil 4.1. $\mathcal{X}_{\mathcal{H}}$ fonksiyonunun farklı ζ değerleri için simülasyonları



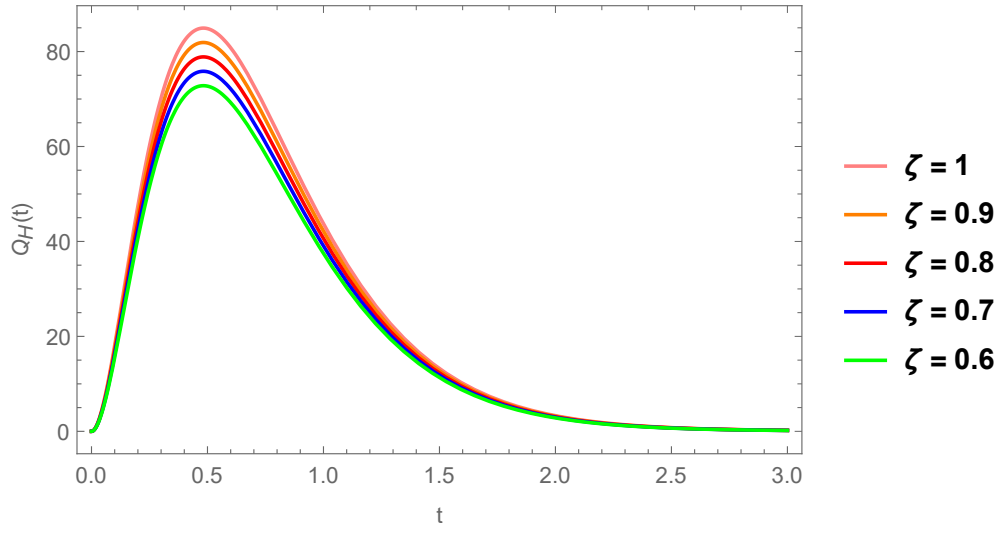
Şekil 4.2. $\mathcal{Y}_{\mathcal{H}}$ fonksiyonunun farklı ζ değerleri için simülasyonları



Şekil 4.3. Z_H fonksiyonunun farklı ζ degerleri için simülasyonları



Şekil 4.4. T_H fonksiyonunun farklı ζ degerleri için simülasyonları



Şekil 4.5. Q_H fonksiyonunun farklı ζ degerleri için simülasyonları

5. SONUÇ

Bu tezde Zika virüs matematiksel modelinin analizi yapılmıştır. Sekiz farklı diferansiyel denklemden oluşan matematiksel model: duyarlı birey popülasyonu, enfekte birey popülasyonu, maruz kalan (temaslı) birey popülasyonu, iyileşen birey popülasyonu, taşıyıcı birey popülasyonu, duyarlı sivrisinek popülasyonu, enfekte sivrisinek popülasyonu ve maruz kalan (temaslı) sivrisinek popülasyonu olarak incelenmiştir. Öncelikle Zika virüs matematiksel modeli kesirli mertebeden Caputo anlamında Atangana-Baleanu operatörüne genişletilmiştir. Daha sonra sırasıyla modelin sabit nokta teoremi yardımıyla varlık-teklik çözümleri, Hyers Ullam kararlılık teoremi yardımıyla kararlılık analizi ve Adams-Bashforth şeması yöntemi ile nümerik çözümleri yapılmış ve grafikleri çizilmiştir. Grafiklere göre duyarlı birey popülasyonunda azalma olurken enfekte, taşıyıcı ve maruz kalan birey popülasyonlarında artış gözlemlenmiştir. Gerekli önlem ve tedaviler yapıldıktan sonra iyileşen birey popülasyonunda artış, enfekte, taşıyıcı ve maruz kalan birey popülasyonunda azalma gözlemlenmiştir.

Kesirli türev operatörleri alanında çalışan araştırmacılar, farklı matematiksel modelleri Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türev operatörüne genişleterek analizlerini yapabilirler.

KAYNAKLAR

- Agarwal, R. (1953). A propos dune note de humbert, pierre. *Comtes rendus hebdomadaires des seances de l academie des sciences*, 236(21):2031–2032.
- Agusto, F. B., Bewick, S., ve Fagan, V. (2017). Mathematical model of zika virus with vertical transmission. *Infec. Dis.Model*, 2(2):244–267.
- Alkahtani, B. S. T., Atangana, A., ve Koca, I. (2017). Novel analysis of the fractional zika model using the adams type predictor-corrector rule for non-singular and non-local fractional operators. *J. Nonlinear Sci. Appl*, s. 3191–3200.
- Altin, A. (2011). *Uygulamalı Matematik*. Gazi Kitapevi.
- Atangana, A. ve Baleanu, D. (2016). New fractional derivatives with non-local and non singular kernel: Theory and application to heat transfer model. *Thermal Science*, 20(2):763–769.
- Atangana, A. ve Koca, I. (2016). Chaos in a simple nonlinear system with atangana-baleanu derivatives with fractional order. *Chaos, Solitons and Fractal*, s. 447–454.
- Atangana, A. ve Owolabi, K. M. (2018). New numerical approach for fractional differential equations. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 13(1):3.
- Atici, F., Nguyen, N., ve Robinson, M. (2011). Development of fractional trigonometry and an application of fractional calculus to pharmacokinetic model. *Amera Almusharrf, Western Kentucky University*, s. 1048.
- Bashforth, F. ve Adams, J. C. (1883). *An attempt to test the theories of capillary action by comparing the theoretical and measured forms of drops of fluid*. University Press.
- Benghorbal, M. (2004). Power series solutions of fractional differential equations and symbolic derivatives and integrals”,. *PhD thesis, Faculty of Graduate Studies The University of Western Ontario, Canada*,.
- Bogoch, I. I., Brady, O. J., Kraemer, M. U., German, M., Creatore, M. I., Kulkarni, Manisha

- A and, B. J. S., Mekaru, S. R., Hay, S. I., Groot, E., ve et al. (2016). Anticipating the international spread of zika virus from brazil. *Lancet*, 387 (10016):335–336.
- Bonyah, E., Dontwi, I., ve Nyabadza, F. (2014). A theoretical model for the transmission dynamics of the buruli ulcer with saturated treatment. *Comput. Math. Methods Med*, 2014.
- Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent—ii. *Geophysical Journal International*, 13(5):529–539.
- Caputo, M. ve Fabrizio, M. (2015). A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progr. Fract. Differ. Appl*, 1(2):1–13.
- Din, C., Tao, N., ve Zhu, Y. (2016). A mathematical model of zika virus and its optimal control. *Control Conference (CCC)*, s. 2642–2645.
- Dokuyucu, M. A. ve Çelik, E. (2021). Analyzing a novel coronavirus model (covid-19) in the sense of caputo-fabrizio fractional operator. *Applied and Computational Mathematics*, s. 49–69.
- Dokuyucu, M. A., Çelik, E., Bulut, H., ve Baskonus, H. M. (2018). Cancer treatment model with the caputo-fabrizio fractional derivative. *The European Physical Journal Plus*, s. 1–6.
- Gao, D., Lou, Y., He, D., Porco, T. C., Kuang, Y., Chowell, G., ve Ruan, S. (2016). Prevention and control of zika as a mosquito-borne and sexually transmitted disease: a mathematical modeling analysis. *Bilim Tarihi Araştırmaları: Salgın Hastalıklar Tarihi*, 6.
- Hristov, J. (2015a). Approximate solutions to time-fractional models by integral-balance approach. In *Fractional dynamics*, s. 78–109.
- Hristov, J. (2015b). Diffusion models of heat and momentum with weakly singular kernels in the fading memories: How the integral-balance method can be applied? *Thermal Science*, 19(3):947–957.

- Khan, M., Shah, S. W., Ullah, S., ve Gómez-Aguilar, J. (2019). A dynamical model of asymptomatic carrier zika virus with optimal control strategies. *Optimal Control Applications and Methods*, 50:144–170.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., ve Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations*, volume 204. elsevier.
- Koca, I. (2018a). Analysis of rubella disease model with non-local and non-singular fractional derivatives. *An International Journal of Optimization and Control: Theories and Applications (IJOCTA)*, s. 17–25.
- Koca, I. (2018b). Modelling the spread of ebola virus with atangana-baleanu fractional operators. *The European Physical Journal Plus*, 133:1–11.
- Koca, I., Akçetin, E., ve Yaprakdal, P. (2020). Numerical approximation for the spread of siqr model with caputo fractional order derivative. *Turkish Journal of Science*, s. 3191–3200.
- Lee, E. K., Liu, Y., ve Pietz, F. H. (2016). A compartmental model for zika virus with dynamic human and vector populations. *American Medical Informatics Association Annual Symposium Proceedings*, 2016:743.
- Losada, J. ve Nieto, J. J. (2015). Properties of a new fractional derivative without singular kernel. *Progr. Fract. Differ. Appl*, 1(2):87–92.
- Matignon, D. (1996). *Stability Results for Fractional Differential Equations with Applications to Control Processing.*, volume 2.
- Miller, K. S. ve Ross, B. (1993). *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Wiley.
- Musso, D., Nilles, E., ve Cao-Lormeau, V. (2014). Rapid spread of emerging zika virus in the pacific area. *Clin. Microbiol.Infec.*, 20(10):595–596.
- Parıldar, H. (2020). Tarihte bulaşıcı hastalık salgınları. *Tepecik Eğitim ve Araştırma Hastanesi Dergisi*, 30:19–26.

- Podlubny, I. (1998). *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier.
- Podlubny, I. (1999). Fractional differential equations, vol. 198 of mathematics in science and engineering.
- Samko, S. G., Kilbas, A. A., ve Marichev, O. I. (1993). *Fractional integrals and Derivatives*. Gordon and Breach Science.
- Sherman, I. W. (2016). *Dünyamızı Değiştiren On İki Hastalık*. İş Bankası Kültür Yayınları.
- Simpson, D. (1964). Zika virus infection in man. *Trans. Roy. Soc. Tropical Med. Hygiene*, 58(4):335–337.
- Suparit, P., Wiratsudakul, A., ve Modchang, C. (2018). A mathematical model for zika virus transmission dynamics with a time-dependent mosquito biting rate. *Theoret. Biol. Med. Model.*, 15(1):11.
- Terefe, Y., Gaff, H., Kamga, M., ve Mescht, L. D. (2018). Mathematics of a model for zika transmission dynamics. *Theory Biosci.*, 137(2):209–218.
- Tesla, B., Demakovsky, L. R., Mordecai, E. A., Ryan, S. J., Bonds, M. H., Ngonghala, C. N., Brindley, M. A., ve Murdock, C. C. (2018). Temperature drives zika virus transmission: evidence from empirical and mathematical models. *bioRxiv*, 25953 1.
- Yang., X. (2011). Local fractional laplace's transform based on the local fractional calculus. *roc. Of The 2011 International Conference on Computer Science and Information Engineering*, s. 391–397.
- Yaprakdal, P. (2019). Kesirli basamaktan diferansiyel denklemler sitr modeli üzerine. *Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi*.
- Yurdakul, E. S. (2015). Tarihte önemli bulaşıcı hastalık salgınları. *Türkiye Klinikleri Halk Sağlığı Dergisi*, 1(3):1–6.

ÖZGEÇMİŞ

